邻接几何

——四色问题及普遍着色问题证明

宋金墀

内蒙古人民出版社

邻接几何

四色问题及普遍着色问题证明

宋金墀　著

内蒙古人民出版社

一九八七·呼和浩特

邻 接 几 何

四色问题及普遍着色问题证明

宋金墀 著

*

内蒙古人民出版社出版发行
（呼和浩特市新城西街82）
锡盟印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：7.875 字数：162千
1990年11月第一版 1991年8月第1次印刷
印数：1—1,000册
ISBN7—204—00338—I/0.4 每册：3.65元

内容提要

本书通过新建立的几何体系《邻接几何》对连接图进行了普遍的讨论，并给出了任意曲面上的连接图一般定理以及颜色图或标志图定理。其中包括“四色问题”的证明及定理。

该~~书共有21章~~。第2、3章是定义和公理。第6章是4色定理，第11章是“4色问题”定理或四色地图定理。

本书可供数学爱好者、地图工作者及有关科技人员参考。

前　　言

相互邻接是在各种事物中普遍存在的问题，其中最为著名的是通常所说的“4色问题”。

为了求证普遍存在的邻接问题，本人建立了一个新的几何体系，并命名为《邻接几何》。该体系和其中的“四色问题”证明于1975年完成。

在该几何中给了定义、公理和任一连通度曲面上的连接图、邻接图和颜色图或标志图等的一般定理。其中包括4色问题定理或4色地图定理，并给出了4色世界地图和4色中国分省地图。

同时，还给出了任一连通度曲面上的相交面一般定理和其颜色图或标志图等的一般定理。

本著作的出版得到了包头市科委，包头市科协，冶金部包头钢铁设计研究院，包头土木建筑学会，内蒙古人民出版社的大力支持，特别是该社汉文科技编辑室同志们的积极协助，在这里一并表示衷心的感谢。

限于作者水平，不够完善和错误之处，请读者给予指正。

宋金墀

1986年1月

目　　录

前言
第一章　引论……1
§1存在现象……1
§2着色和标志……3
§3邻接几何的建立……4
§4相关领域……8
§5约定条件……9
第二章　定义……10
§1连接面……10
§2连接点……12
§3连接点图……13
§4对偶图……21
§5连接面图……23
§6典型图……27
§7分离图……27
§8最小单元图……26
§9叠合图……29
§10连面图……33
§11颜色图和标志图……35
第三章　公理……37
第四章　连接点图……38
§1连接线数……38
§2邻接线数……42

§ 3 交叉线数……………………………………………51
§ 4 3 环形点图数……………………………………51
§ 5 邻接 3 环形点图数………………………………57
§ 6 交叉 3 环形点图数………………………………58
§ 7 完全连接点图……………………………………59
§ 8 图的构造数………………………………………60
§ 9 1 连面连接点图各数值…………………………62
第五章 1、2、3,邻接图……………………………66
§ 1 邻接点图…………………………………………66
§ 2 完全邻接点图……………………………………73
§ 3 完全连接点图……………………………………74
§ 4 邻接面图…………………………………………74
§ 5 完全邻接面图……………………………………77
§ 6 完全连接面图……………………………………77
§ 7 1、2、3 色定理…………………………………79
§ 8 例…………………………………………………82
第六章 4 色定理……………………………………90
§ 1 4 邻接点图………………………………………90
§ 2 4 完全邻接点图…………………………………91
§ 3 4 完全连接点图…………………………………91
§ 4 4 邻接面图………………………………………91
§ 5 4 完全邻接面图…………………………………92
§ 6 4 完全连接面图…………………………………92
§ 7 4 色定理…………………………………………93
§ 8 例…………………………………………………96
§ 9 图形与颜色数……………………………………100
第七章 凸带…………………………………………102
§ 1 凸带………………………………………………102

§ 2 凸带数……102
第八章　连面与连接图……104
§ 1 连面与连接图……104
§ 2 图的分解数……108
§ 3 图的添加和消除……111
第九章　分离图……113
§ 1 连接点图……113
§ 2 连接点……114
§ 3 连接面图……115
§ 4 区域面……116
§ 5 连接点图分离图数……116
§ 6 连接面图分离图数……116
§ 7 分离点数……117
§ 8 分离面数……118
第十章　1连面邻接图……120
§ 1 邻接点图……120
§ 2 完全连接点图……125
§ 3 邻接面图……126
§ 4 完全连接面图……129
§ 5 颜色图……129
第十一章　4色问题定理或4色地图定理……132
§ 1 4色问题定理或4色地图定理……132
§ 2 4色地图……133
第十二章　2连面邻接图……140
§ 1 邻接点图……140
§ 2 邻接面图……142
§ 3 颜色图……144
§ 4 连接点图……145

§ 5 2连面连接点图各数值……148
第十三章　3连面邻接图……151
§ 1 邻接点图……151
§ 2 邻接面图……155
§ 3 颜色图……157
§ 4 连接点图……158
§ 5 3连面连接点图各数值……160
第十四章　h连面邻接图……163
§ 1 邻接点图……163
§ 2 邻接面图……165
§ 3 n色定理……166
§ 4 邻接线数……168
§ 5 交叉线数……168
§ 6 交叉3环形点图数……169
§ 7 邻接3环形点图数……170
§ 8 连接点图的n、h、p数值……170
第十五章　1连面m交面图……173
§ 1 连接线数……173
§ 2 3环形点图数……173
§ 3 1连面m交面图……174
§ 4 1连面m交面邻接图……175
§ 5 1连面m交面颜色图……177
§ 6 1连面m交面连接点图……178
§ 7 1连面m交面连接点图各数值……181
第十六章　2连面m交面图……184
§ 1 2连面m交面图……184
§ 2 2连面m交面邻接图……185
§ 3 2连面m交面颜色图……187

§ 4 2连面m交面连接点图 ……………………………………139
§ 5 2连面m交面连接点图各数值 ……………………………192

第十七章　3连面m交面图 ……………………………………195
§ 1 3连面m交面图 …………………………………………195
§ 2 3连面m交面邻接图 ……………………………………196
§ 3 3连面m交面颜色图 ……………………………………197
§ 4 3连面m交面连接点图 …………………………………199
§ 5 3连面m交面连接点图各数值 ……………………………202
第十八章　h连面m交面图 ……………………………………205
§ 1 h连面m交面图 …………………………………………205
§ 2 h连面m交面邻接图 ……………………………………206
§ 3 h连面m交面颜色图 ……………………………………209
§ 4 h连面m交面连接点图 …………………………………210
§ 5 相交面m与h、p数值 ……………………………………212
第十九章　连接图组合 ………………………………………215
§ 1 连接点图组合 ……………………………………………215
§ 2 连接面图组合 ……………………………………………216
第二十章　叠合图 ……………………………………………217
§ 1 叠合点图 …………………………………………………217
§ 2 叠合面图 …………………………………………………231
§ 3 1连面叠合图 ……………………………………………233
§ 4 2连面叠合图 ……………………………………………234
§ 5 3连面叠合图 ……………………………………………234
§ 6 h连面叠合图 ……………………………………………235
第二十一章　正三角形多面体定理 …………………………237
参考文献 ………………………………………………………240

第一章 引 论

§ 1 存在现象

1.点线集合

一张网，一个带孔的编织物，一个用杆件组成的构件，画在一个物体表面上的线路，画在一张纸上的网格等的节扣、节点、交点等，可看作是点，其间的连线、杆件、线路等可看作是线。它们各自的整体就是点线集合。我们称这些点线集合是第1类点线集合。

又如车轮上的辐条，在靠近车轴处相互交叠，人们在做翻绳游戏时，手指间的线绳也相互交叠，或在5个点间均做连线时，其中有一些线将相互交叠等。如果将车圈和车轴的外侧看作是线，辐条与车圈和车轴的相接处，手指与线绳相连处看作是点，辐条、线绳、连线等的交叠看作是交叉线，那么，它们各自的整体是带有交叉线的点线集合。我们称这些点线集合是第2类点线集合。

以上两类点线集合，都是有形的和直观的。因此，我们也可称为显形点线集合。

一个由甲地至乙地的交通路线，其中有路由和车站，当我们将路由抽象为一条线，车站抽象为一个点时，也可形成

点线的集合；又如我们在构思一个旅游路径和旅游点时，如将路径和旅游点分别抽象为线和点时，也是点线集合。

将两辆车的行驶路由或人与车的行驶路由看做是线，那么，两车或人车相撞时，两者的路由就构成了交叉线。为了避免此类点线集合中的交叉线，即交通事故，在城市的交通拥挤处，建立了立交桥。

我们将这些抽象的，不能直接看清的点线集合称作隐形点线集合。

一个隐形点线集合，可以通过抽象的图形变换为显形点线集合图。当其中含有交叉线时，可归入第2类点线集合中，无交叉线时，归入第1类点线集合中。

显然，一个点线集合，可以在任意连通度的曲面上，如平面、球面、环面上等。

在本书中不论是显形点线集合或隐形点线集合，均抽象为点线集合图形进行论证。

2.面集合

我们经常会看到这样一些现象，如马路上铺砌的水泥板块、城市中的公路带和街坊区、树叶由叶脉分出的面块、印在纸上或纤维织物上的图案或花饰等划分出的面块、一个国家的省份、一张世界地图上的国家或地区、一个纸盒、多面形的足球、救生圈、各式充气玩具等。

如将上述的现象中的板块、面块、表面、省份、国家或地区等，看成是面时，则它们各自的整体，就是面的集合。我们称它是第1类面集合。

又如在一条平坦的公路上架起一座桥梁，用竹片编织的

各种编织物等，如果我们将公路和编制物看作是面，桥梁和竹片看作是凸出的面带或凸带，那么，它们各自是有凸带的面集合。我们称它是第2类面集合。

一个面集合和一个点线集合一样，可以在平面上、球面上、投影面上、环面上或任意连通度的曲面上。

§2 着色和标志

1.四色问题

“四色问题”是1852年由F·古斯里（F·Guthrie）提出的一个地图着色问题。它的原意是“能否以数学证明画出在一张纸上的每幅地图，仅用4种颜色使其共同边界的国家有不同的颜色。”

用本书中的集合来说，就是对一连通度上的第1类面集合，能否仅用4种颜色，使各相邻面都具有不同的颜色。

2.“四色问题”和四色定理

显然，通常所提的“四色问题”就是地图着色问题，与本书中的四色定理和“四色问题”不完全相同。

本书中的四色定理可以是任一连通度的任一相交面的曲面上的着色问题。而“四色问题”是连通度为1的相交面数小于或等于3的曲面上的着色问题。

3.颜色和标志

使一个集合中的物件，做上标记进行识别，这是普遍存

在的问题。

以颜色作标记区分物件是标志当中的一种特殊情况。在一般的情况下，采用“标志”一词，具有较广的内涵。因标志可以用颜色、用文字、用图例、用符号等进行表示。

在点线集合和面集合中，不论采用标志当中的哪一种标记，其效果是一致的，结果是相同的。

§ 3　邻接几何的建立

1.问题的普遍性

“四色问题”仅仅是面集合当中的一个问题，即平面或球面上的相邻面的问题。作为相邻问题，对面集合来说不仅在平面或球面上，在投影面、环面以至任意曲面上都存在。

同样的问题，在点线集合中也存在。如在一块平地上建有三栋房子，拟由水泵站、锅炉房、煤气厂等分别引来水管，暖气管、煤气管时，问在同一个平面上布置这些管道，要求不相交是否可能？

如果将每栋房子、水泵站、锅炉房、煤气厂视为点，各管道视为线，则是一个点线集合。是6个点9条线的集合。

问题要求能否实现第一类点线集合，但实际上是属于第2类点线集合的问题。

又如9个人坐在圆桌上吃饭，若使每两个相邻椅子有不同的款式，共需几种款式的椅子？

如将每个椅子视为相邻面时，则是1个面集合问题。是9个面相邻的环形面集合的问题。

因为任一事件或物件的相邻问题，抽象后均能变换为点线集合或面集合的相邻问题，因此，相邻问题具有普遍性及普遍意义。

能否建立一种理论体系解决这些普遍性的问题，这就是本书中新建立的几何体系的目的，本人将此新几何体系命名为《邻接几何》。

2.点线面间的对应

因任一事件或物件，当为相邻问题时，经抽象后，均可变换为点线集合或面集合的相邻问题，因此，点线集合和面集合是我们探讨相邻问题的数学手段。

如果我们能使点线集合与面集合一一对应，不仅能使两个问题变换为两者当中的任意一个，还能使问题便于讨论。

这种点线集合与面集合的一一对应，就是点与面的对偶。如第1类点线集合与第1类面集合相对偶，第二类点线集合与第二类面集合相对偶。如果我们使点线集合中的点和线，分别与面集合中的面和面之间的边界线一一对应时，两者便形成了对偶。

当点线集合和面集合分别为点线集合图和面集合图时，两者对偶后，就是对偶图。

在本书的各定理的证明中，均用点线集合图进行求证，之后，再利用对偶图对应到面集合图上。

由此可见，采用对偶图后，点线集合中的相邻问题与面集合中的相邻问题是等价的.

3.整体观点

在本书的《邻接几何》中，采用从整体着手的方法求证

相邻问题。即从任一连通度的曲面上能最大可能实现的点线集合或面集合着手，再分解出可能出现的典型图进行求证。

采用整体方法，可得出更一般性的理论，适用于更普遍的问题上，使理论具有普遍意义。

因此，在本书所建立的《邻接几何》中，不仅给出了连通度为1的曲面上的点线集合或面集合的邻接问题证明，也给出了任一连通度和任一相交面上的点线集合或面集合的邻接问题证明，从而证明了点线集合或面集合的普遍邻接问题和着色问题。

4.交叉线

在本书的《邻接几何》中，提出了连接线、邻接线和交叉线等概念。连接线是邻接线和交叉线的总称。

由于建立了交叉线的概念，对于求证任一连通度曲面上的邻接问题，获得了完美的结果，其中包括四色问题的证明。

使用交叉线这一概念不仅得出了“四色问题”的证明，同时，也得出了任一连通度曲面上的着色证明。

当求证任意一个连通度曲面上的邻接问题时，可采用变换交叉线为邻接线的方法进行。从这种变换关系中，可给出相邻问题的相关公式。

5.相交面

在一个给定的连通度的曲面上，能允许有几个面相交于1点，这就是相交面问题。如为什么在连通度为1的曲面

上，只能允许等于或小于3的相交面。

利用交叉线的概念，对任一连通度曲面上的相交面问题，也可得到证明。

6. 分离图

因为我们是从整体着手求证邻接问题的，当从整体的点线集合图形中找典型图形进行讨论时，需将整体图形进行分离。

利用分离图的办法，可以将复杂的图形进行分离，形成一些典型图。

在进行点线集合图的分离时，规定图的相邻性不改变。这就保证了点线集合图的再还原性。使它仍是起始的整体图。

7. 叠合图

只要我们求证出一个连通度的曲面上的点线集合图或面集合图是n邻接图，就可以将它叠合成n点最小单元图或n面最小单元图。

如在本书中，当证明出世界地图是四色时，就可以将它叠合为锥形点最小单元叠合图或锥形面最小单元叠合图。

提出叠合概念，可对任一邻接图，最终总能叠合成一个最小单元叠合图。

8. 证明普遍的着色和标志问题

当采用点线集合图求证出点线的邻接问题之后，再利用对偶图就可相应的得出面集合图上的邻接问题。