

陈树明讲义

# 解析几何讲义

陈 鷟 編

高等教育出版社

本讲义是按照前高等教育部 1956 年审定的综合大学数学专业四年制解析几何教学大纲编写的。本书内容主要选自 Н. И. 穆斯海里什维利著(中山大学译)的解析几何教程一书。曾在个别综合大学四年制的解析几何课应用,(按教学计划,讲授 96 学时,课堂练习 79 学时),讲义每节末附有习题,可供课堂练习或家庭作业采用。

## 解 析 几 何 讲 义

---

陈 舜 编

高等教育出版社出版 北京宣武门内承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 051 号)

人民教育印刷厂印刷 新华书店发行

---

统一书号 13010·441 开本 550×1162 1/32 印张 11 12/16 字数 300,000 印数 13001—15,000

1958 年 8 月第 1 版 1960 年 2 月北京第 5 次印刷 定价(8) 1.30

# 目 录

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| 第一章 緒論 .....                                         | 1  |
| 第二章 平面上的笛卡兒坐标·極坐标·橢圓·双曲綫·拋物綫 .....                   | 8  |
| I. 坐标法 .....                                         | 8  |
| § 1. 直綫上的坐标·平面上的直角坐标·兩点間的距离 .....                    | 8  |
| § 2. 平面上的極坐标·直角坐标和極坐标的变换公式·斜角坐标的概念·直角坐标系的平移 .....    | 16 |
| § 3. 曲綫方程的例子·两个曲綫的交点 .....                           | 20 |
| II. 橢圓·双曲綫·拋物綫 .....                                 | 27 |
| § 4. 橢圓的定义、方程和形狀·焦半徑·离心率 .....                       | 28 |
| § 5. 双曲綫的定义、方程和圖形·焦半徑·离心率·漸近綫 .....                  | 34 |
| § 6. 橢圓和双曲綫的准綫·这些曲綫的新定义·离心率的新定义 .....                | 39 |
| § 7. 拋物綫的定义和方程 .....                                 | 43 |
| § 8. 橢圓、双曲綫和拋物綫对于頂点的方程 .....                         | 45 |
| § 9. 橢圓、双曲綫和拋物綫的極坐标方程 .....                          | 47 |
| 第三章 矢量·仿射坐标 .....                                    | 49 |
| I. 矢量 .....                                          | 49 |
| § 10. 平面上和空間中的矢量 .....                               | 49 |
| § 11. 矢量的加法·矢量和數量的乘法 .....                           | 51 |
| § 12. 平行射影 .....                                     | 60 |
| § 13. 力学和物理学上的例子 .....                               | 66 |
| II. 仿射坐标系 .....                                      | 67 |
| § 14. 平面上和空間中的仿射坐标系·矢量和点在已給仿射坐标系里的坐标 .....           | 68 |
| § 15. 用矢量的坐标作矢量运算 .....                              | 76 |
| § 16. 分綫段成定比的点 .....                                 | 78 |
| § 17. 直角坐标系看作仿射坐标系的特例·空間中兩点的距离 .....                 | 80 |
| 第四章 直綫 .....                                         | 84 |
| § 18. 平面上和空間中两个矢量(或三个点)共綫的条件 .....                   | 85 |
| § 19. 平面上和空間中的直綫方程·被一点和定向矢量所决定的直綫和被两个点所决定的直綫方程 ..... | 88 |
| § 20. 平面上仿射坐标的变换公式 .....                             | 94 |

|                                                          |     |
|----------------------------------------------------------|-----|
| §21. 平面曲线和空间曲线的参数方程·平面代数曲线的一般概念 .....                    | 97  |
| §22. 平面上直线的普遍方程及其特款·二元一次方程决定直线的定理·<br>两直线平行与重合的条件 .....  | 101 |
| §23. 二元一次不等式·已知新坐标轴的方程求仿射坐标变换公式·双<br>曲线对于渐近线的方程 .....    | 107 |
| §24. 平面直线束·过两条直线交点的直线方程·三条直线过一点的条<br>件 .....             | 110 |
| §25. 平面上和空间中两个矢量的数积坐标表示式·两矢量间的角·垂<br>直的条件 .....          | 118 |
| §26. 平面上和空间中两条直线间的角·三角形的面积 .....                         | 123 |
| §27. 平面上直线的法方程·直线到点的有向距离 .....                           | 131 |
| <b>第五章 空间中平面和直线</b> .....                                | 137 |
| §28. 空间中三个矢量的线性相关·空间仿射坐标变换公式 .....                       | 137 |
| §29. 平面的矢方程、参数方程和对称方程 .....                              | 140 |
| §30. 曲面方程·代数曲面·平面的普遍方程 .....                             | 143 |
| §31. 两个平面平行和重合的条件·三个平面的相互关系 .....                        | 150 |
| §32. 空间直线的普遍方程和简化方程 .....                                | 157 |
| §33. 平面和直线的相互关系 .....                                    | 159 |
| §34. 平面束·直线把·平面把 .....                                   | 163 |
| §35. 决定平面上直线的参数个数·决定空间中平面与直线的参数个数·<br>三元一次不等式的几何意义 ..... | 167 |
| §36. 平面的法方程·平面到点的距离 .....                                | 170 |
| §37. 直线和平面间的角以及垂直的条件·平面和平面间的角以及垂直<br>的条件 .....           | 173 |
| §38. 两个矢量的矢积·三个矢量的混合积·四面体体积 .....                        | 174 |
| §39. 空间的点和直线间的距离·空间两条直线间的距离 .....                        | 184 |
| <b>第六章 仿射变换和运动</b> .....                                 | 188 |
| §40. 直角坐标变换和正交矩阵 .....                                   | 188 |
| §41. 欧拉角 .....                                           | 199 |
| §42. 刚体运动(或运动) .....                                     | 202 |
| §43. 仿射变换 .....                                          | 207 |
| §44. 变换群 .....                                           | 217 |
| <b>第七章 柱面·锥面·旋转面·椭圆面·双曲面·抛物面</b> .....                   | 219 |
| §45. 柱面·锥面·旋转面 .....                                     | 219 |
| §46. 椭圆面 .....                                           | 226 |
| §47. 双曲面 .....                                           | 229 |
| §48. 抛物面 .....                                           | 233 |
| §49. 直线二阶曲面 .....                                        | 236 |

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| <b>第八章 二阶曲线的一般理论</b>                   | 243 |
| §50. 二阶曲线与直线的交点                        | 245 |
| §51. 复平面                               | 247 |
| §52. 切线·渐近方向·渐近线                       | 249 |
| §53. 中心                                | 253 |
| §54. 对于已给方向共轭的直径·二阶曲线的某些仿射性质           | 256 |
| §55. 二阶曲线对于一对共轭直径的方程                   | 261 |
| §56. 二阶曲线仿射分类                          | 264 |
| §57. 主方向·主直径                           | 267 |
| §58. 二阶曲线在直角坐标系下的标准方程·度量分类             | 269 |
| §59. 运用正交变换,化二元二次齐式为标准形状·二次齐式的特征根、特征矢量 | 272 |
| §60. 二元二次多项式的基本正交不变量                   | 275 |
| §61. 化二阶曲线的方程为标准形状                     | 279 |
| §62. 圆                                 | 286 |
| §63. 对仿射变换的应用                          | 287 |
| <b>第九章 二阶曲面的一般理论</b>                   | 289 |
| §64. 二阶曲面与直线的交点                        | 290 |
| §65. 复空间                               | 291 |
| §66. 渐近方向·渐近锥面·中心·把二阶曲面按渐近方向和中心分型      | 292 |
| §67. 与已知方向共轭的直径面                       | 296 |
| §68. 共轭方向·共轭直径                         | 297 |
| §69. 二阶曲面对于三个互相共轭的直径的方程(仿射标准方程)        | 298 |
| §70. 主方向                               | 306 |
| §71. 三元二次齐式的特征方程、特征根和特征矢量              | 308 |
| §72. 运用直角坐标变换把三元二次齐式化为标准形状             | 311 |
| §73. 二次齐式的主方向的个数与特征根的重数的关系             | 312 |
| §74. 三元二次多项式的基本正交不变量                   | 315 |
| §75. 化二阶曲面方程为标准形状                      | 316 |
| §76. 二阶曲面的度量分类                         | 324 |
| <b>第十章 二阶曲线和二阶曲面的射影理论</b>              | 326 |
| §77. 无穷远元素·齐次坐标                        | 326 |
| §78. 射影平面·射影空间·对偶原则                    | 334 |
| §79. 射影变换群                             | 338 |
| §80. 平面上射影坐标的概念                        | 346 |
| §81. 用齐次坐标表示直线和平面的参数方程                 | 348 |
| §82. 二阶曲线射影分类                          | 352 |
| §83. 五点决定一个二阶曲线                        | 356 |

---

|                      |     |
|----------------------|-----|
| §84. 切綫和極綫 .....     | 359 |
| §85. 配極理論 .....      | 363 |
| §86. 二阶曲面的射影分类 ..... | 367 |
| §87. 九点定一个二阶曲面 ..... | 370 |

## 第一章 緒論<sup>①</sup>

几何学是研究现实空間形式的科学。最初，它的对象只限于物体的空間关系和形狀。其后，在这个基础上，逐步發展与推广，以至于包括其他在結構上与上述关系和形狀相类似的现实的关系和形狀。

在下面，我們將簡略地叙述几何的發生和發展过程。和其他科学一样，几何学的發生是由于人类的生产实践，然后它随着生产力的發展而發展了。但是，如同恩格斯所指出，尽管純粹数学的对象是非常现实的資料，但这些資料却表现为非常抽象的形式<sup>②</sup>。关于几何学的特点，斯大林更有極明确的說明：“几何学上的定理是把具体对象加以抽象化，把各种对象看成沒有具体性的物体，并在决定它們之間的相互关系的时候，不当成某些具体对象間的具体关系，而当成一般沒有任何具体性的物体間的相互关系<sup>③</sup>。”几何学的这个特性时常被唯心論的哲学家所曲解：他們強調几何的所謂先驗性，他們認為几何学發源于“純粹的冥想”和外界实验上的探究無關，这是完全荒謬的論断。列宁說得好：“人的实践，重复了不止亿万次，于是在人的意識中以邏輯形式固定下来，而成为公理”。事实上，几何的抽象都是客觀世界規律的反映。正因为这个原因，几何学，連它的最抽象的推广在內，在其他科学与生产实践中，都有着广泛的应用。

几何学的發展，可以分作以下四个时期<sup>④</sup>：

- ① 建議讀者參看 1956 出版的关麟譯 D. J. Struik 的数学簡史。
- ② 見恩格斯：反杜林論中譯本第二版，第 35 頁。
- ③ 見斯大林，馬克思主义与語言学問題，中譯本第二版，第二十二頁。
- ④ 分期法根据苏联大百科全書“几何学”条，見数学通报 1955 第九期，我国的分期与之不一致，見李儼著中国算学史。



1. 第一个时期(萌芽时期)。五千年前,世界上已有文明古国:如埃及、巴比倫、中国和印度。这些都是具有大河流的国家,主要依賴农业生产,因而土地的測量就成為必要;几何学可能就由此萌芽。据希臘历史記載,埃及尼罗河每年在泛滥之后,要重新測量土地。在希臘文中,几何学即測地学的意思。那时,埃及就有高达138公尺的金字塔,这就是运用几何知識的明証。我国黄河流域一带开化最早。从出土的文物来看,三四千年前就有附有精美圖案的各种陶器和磚;殷墟的甲骨文留下了我国的数字并有象形手拿圓規作圖的規字和象形直角曲尺的矩字。据史書記載,西周时候,八岁兒童就开始有数学教育<sup>①</sup>。無論如何,在那个时候,几何知識是憑經驗得到的,其推理是粗糙的,幼稚的。

2. 第二个时期。在紀元前七世紀的时候,希臘哲学家泰列士(Θαλῆς, 紀元前 640—550)到埃及經商,把埃及的几何学帶到希臘。这时欧洲正当奴隶社会的初期,經濟文化正是欣欣向荣的时候,几何的發展也达到了一定的高峰。从紀元前七世紀到三世紀,很多希臘学者都对几何有貢獻,推理的方法越来越被重視,几何学得到进一步的發展。如希臘畢达哥拉斯(Πυθαγόρας, 紀元前 569—600)学派对几何邏輯的严整性有很大的貢獻;柏拉圖(Πλάτων, 紀元前 430—349)把几何学建立在公理、公設和邏輯的基础上,开始用演繹的方法,并且以几何为訓練人类思想的工具。这些工作,对几何發展有重大意义。但另一方面,他們却都強調了思維的重要,忽略了公理以实践为基础的事实;他們認為数学概念独立存在,为人类智力活动的結果,与实在世界無關。相反的,亞里士多德(Αριστοτέλης, 紀元前 384—322)則認為数学的概念乃是实在事物的抽象,这是唯心唯物兩個方向在哲学和科学上的最早形成。

希臘数学家欧几里得(Εὐκλείδης, 紀元前 330—275)总结了

<sup>①</sup> 見李儼著中国算学史和中国古代数学史料。

前三、四世紀幾何學家的結果，寫了“幾何原本”一書。他當時主持亞力山大大學數學系，收集了幾何的不同的定理與證明，把它們嚴格地按邏輯組織起來。不久以後，經過幾何學和物理學家阿基米德（*Αρχιμήδης*，紀元前 287—212）在面積體積方面的補充，阿波羅尼斯（*Απολλώνιος*，紀元前 260—200）在圓錐截綫方面的補充，幾何的內容更為充實了。我們今天中學用的初等幾何教科書形式與內容都和幾何原本極相似。這樣一本用了兩千多年的教科書是很少見的。根據幾何原本的公設所推導出來的幾何學，後來就稱為歐氏幾何學。這個時期，幾何方面的人才輩出，所以紀元前三世紀曾被稱為幾何世紀。在紀元前後，隨著希臘羅馬奴隸時期的沒落，幾何和其他科學一樣停滯了一千多年之久。這是因為在歐洲封建社會初期，侵略者（日耳曼人）極端殘酷的統治摧殘了生產力，而在整個封建社會時期，極端保守的宗教思想又占統治地位，生產力無法發展，因而科學文化也就無所進展。

由於東西方社會發展的進程有所不同，加上古時交通不便，東方數學的發展，不可能和歐洲的相同，因而時期的劃分也就不一致。我國在春秋戰國以及秦漢時期（紀元前八世紀到紀元後二世紀），由於天文、治河、工程、建築、戰爭、商業等種種需要，幾何學方面有不少成就。例如張衡（78—139）造渾天儀，他還給出圓周率兩個值： $\pi = \sqrt{10} = 3.16$  及  $\pi = \frac{92}{29}$ （其後 200 年，阿剌伯數學書中才出現  $\pi = \sqrt{10}$ ）；劉洪（二世紀）造乾象術以測定日月星辰的位置；趙爽証勾股弦定理等等。此後研究割圓術最著名的有祖沖之（429—500），他算出  $\pi = \frac{355}{113}$ ， $\pi = \frac{22}{7}$  和  $\pi$  介乎 3.1415926 與 3.1415927 之間；相同的結果，在一千多年後歐洲才有人發現。他的兒子祖暅（一作祖暅之），有開立圓術，求出球的體積  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ 。隋唐宋之間（六世紀到十四世紀），國家還以考試來鼓勵數學，可以

想見當時對於數學也還重視。關於數學的著述，也很豐富。就已有的史料看來，我國對於幾何的貢獻是由于實際的需要而得到很先進的，但比較孤立的公式和結果，而歐洲則更注意方法：這是那個時代東西數學基本不同之點。

3. 第三個時期。在歐洲資本主義社會的前夕和初期，生產力的發達和經濟基礎的改變，促進了文化經濟的繁榮。這就是歷史上所謂的文藝復興的時期。在幾何方面，有開普勒(Kepler, 1571—1630)和德薩格(Desargues, 1593—1662)對於純粹幾何的整理和擴充。到1637年，法國數學家笛卡兒(Descartes, 1596—1650)建立了坐標，引進了變量，把幾何大大地推進了一步。在這以前，數學的對象是靜止的、孤立的；在這以後，人們就開始從運動變化的觀點來處理幾何問題。恩格斯說：“笛卡兒的變量是數學中的轉捩點。於是運動與辯證法就進入了數學，立即有了微分和積分，這是由牛頓和萊布尼茲完成，而不是由他們發現的。”<sup>①</sup> 笛卡兒的工作的影響，是值得這樣高的評價的。雖然阿基米德和十六世紀的歐洲幾何學家也用代數來研究幾何，但笛卡兒的坐標法完全是嶄新的。他用數(坐標)表示點，用變數表示動點，從圖形的簡單特性求出它的點的坐標所應適合的條件或方程，然後又從方程求得圖形的更普遍的與更複雜的性質。這種通過坐標，利用代數的方法來研究圖形和變換的科學，稱為解析幾何學。解析幾何學標誌着幾何學的第三個時期的開始。我們這個課程，正是以笛卡兒的方法為基礎來研究平面和空間的最簡單的圖形及其變換。

最早，德國科學家開普勒在1604年引入曲率半徑的概念。稍後荷蘭數學家惠更斯(Huygens, 1629—1695)又在1673年開始了漸近綫與漸伸綫的研究。其後在十八、十九世紀，瑞士數學家歐拉(Euler, 1707—1783)，法國數學家蒙日(Monge, 1746—1818)，德

<sup>①</sup> 恩格斯，辯證法與自然科學，中譯本第128頁。

國數學家高斯 (Gauss, 1777—1855) 與俄國數學家彼得森 (Петерсон) 等導出了微分幾何學。這一門幾何的分支, 在十九與二十世紀有着極為壯闊的發展。

雖然許多射影幾何的重要概念早已萌芽; 例如在阿波羅尼斯和帕勃斯 (Pappus, 紀元後二、三世紀), 以及十七世紀的德薩格的工作中, 已經有关于透視理論的研究并發展了关于無窮遠元素的概念, 德薩格與法國數學家巴斯卡 (Pascal, 1623—1662) 曾用射影觀點研究圓錐截綫, 但由于解析幾何的方法長時間支配了幾何的研究, 他們這方面的工作沒有引起人們的注意。直到十九世紀初, 蒙日的學生法國數學家龐西萊 (Poncelet, 1788—1867) 和瑞士數學家斯坦納 (Steiner, 1796—1863) 開始了射影幾何的研究。接着這一幾何的分支就有很大的發展。在這方面, 龐西萊和德國數學家房施陶特 (Von Staudt, 1798—1867) 都有著名的著作。德國數學家普呂格 (Plücker, 1801—1868) 還建立了以直綫為基本元素的幾何學; 格拉斯曼 (Grassmann, 1809—1877) 則創立了  $n$  維空間的仿射幾何學與度量幾何學。

蒙日在十八世紀末就研究了画法幾何, 這支實用幾何的發生和發展, 和文藝復興時期的繪畫與建築的發展高潮是分不開的。

這個時期, 東西的交通已逐漸便利; 由于西方教徒與商人到中國來, 東西方的曆法與數學就交流起來。在 1583, 意大利傳教士利馬竇來華, 與徐光啓在十七世紀初年翻譯幾何原本, 把歐氏幾何介紹到中國。在十九世紀, 中國不少數學家有关于方圓、弧矢、橢圓等的著述。

4. 第四個時期。這個時期實際上和前面关于微分幾何的研究是并行着的。從俄國偉大數學家羅巴切夫斯基 (Лобачевский, 1793—1856) 建立新的幾何開始到現在, 可以稱為第四時期。從幾何原本問世以來二千多年, 由于它的平行公設在直覺上比較其他

公設不显然，吸引了許多几何学家的研究。其中有不少几何学家从一个和平行公設相反的公設出發，推得若干和欧氏几何完全不同的結果。但是他們有的为自己主观或成見所蔽，在一定的地方推理上發生錯誤；有的則不自覺地引进了与平行公設本質上相同的公設。他們就这样引到了“矛盾”，因而肯定平行公設已經証明。有个别的几何学家，虽然沒有犯錯誤，但沒有坚持下去，或怀着顧慮，不敢發表自己的結果。罗氏和別人一样，也曾經企圖“証明”平行公設，而且在他失敗以后，也引进了相反的公設（經過已給直綫外的一点可以作兩条直綫和已給直綫平行）来代替平行公設。但是，他和別人不同的是，他不但沒有找出矛盾，反而得了一个邏輯完整的几何体系；他自称發現了新世界。他的唯物主义的 world 觀和他的坚持客觀真理的精神，使他成为这个新的几何学的創始人。1826年，他在喀山大学的物理数学系大会上宣布了他的新几何理論。这种新几何就成为非欧几何的一种，称为罗巴切夫斯基几何学或双曲几何学。同时独立發現这种几何的有高斯和匈牙利数学家約翰·波里埃 (J. Bolyai, 1802—1860)，但前者沒有發表，后者發表較迟，而且沒有繼續研究下去。罗氏的發現，不仅解决了二千年来关于欧氏几何的問題，并且是具有革命性的發現；因为他以前的人，都把公理看成絕对的，而他打破了这个束縛。称他为几何学的哥白尼，他是当之无愧的。罗氏几何之可以作为空間关系的一种可能的理論，而且和欧氏几何一样沒有矛盾性，直到他死后，才由克萊因 (Klein, 1849—1925) 找到罗氏几何的一个完整的模型而被証实。从此，在不同的公理系統上，建立了不同的几何学。与此相联系的，他的結果引出了几何基础的研究：这个問題，后来为德国数学家希尔伯特 (Hilbert, 1862—1943) 所解决。

1854年，德国数学家黎曼 (Riemann, 1826—1866) 又指出另一种非欧几何 (1868發表)，其中直綫的長有限，过直綫外一点沒有

直線与之平行,称为橢圓几何学。我們的现实空間究竟是屬於欧氏的,罗氏的还是黎氏的,在目前的有限条件下,还未能确定。非欧几何广泛地应用于数学分析、物理、天文、量子力学等方面。黎曼在1854年建立了 $n$ 維流形的概念,連同由微分齐式 $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ 所确定的度量,开创了 $n$ 維流形的微分几何学。在拓扑学的領域中,最初关于多維流形的思想也屬於黎曼的。

德国数学家克莱因在1872年曾將当时的各种几何学在变换群的概念下联系起来,統一起来。他把每一种几何学和一定的变换群相对应:这个几何学所研究的,是圖形的一些性質,当我们令圖形經過变换群中的任意一个变换时,这些性質保持不变。这样,各个几何学之間的相互关系就寓于各个变换群之間的相互关系之中。在本課程里,我們將涉及这个概念。

在这个时期<sup>①</sup>,微分几何是几何学的一个主要力量。意大利数学家貝尔特拉米(Beltrami, 1835—1900),法国数学家达布(Darboux, 1842—1917)等对于欧氏三維空間的微分几何学作了有系統的發展。随后出現了各种不同变换群的微分几何学。广义相对論更推动它的發展,使成为近代数学中發展最快的学科之一。在近代微分几何的發展中,意大利数学家列維-奇維塔(Levi-Civita, 1873—1941),法国数学家加当(E. Cartan, 1869—1951)和德国数学家淮尔(H. Weyl, 1885—1955)的貢獻最为突出。近代苏联数学家卡岡(В. Ф. Каган)、耶戈罗夫(Д. Ф. Егоров)、菲尼科夫(С. П. Фиников)、魯金(Н. П. Лузин)等在这方面都有重要的貢獻。我国数学家苏步青在这方面也有卓越的成就。

在代数学与几何学的交界,挪威数学家索弗斯李(S. Lie, 1842

<sup>①</sup> 关于近代几何学的发展,还可以参看上文所引的苏联百科全书“几何学”条,科学出版社出版的三十年来苏联数学“几何学”的譯本,以及苏联大百科全书选譯“数学,算术”第58頁,高教出版社出版。

—1899)在1873年建立了連續群(李群)論,苏联数学家龐特里亞金(Понтрягин)等在这方面有極重要的貢獻。

綜上所述,可以看出,当生产关系适合生产力性質的时候,几何学就和整个科学文化同时,由于回答生产發展所提出的問題,并概括了实践,出現了繁荣的时期。四十年来,在社会主义制度下苏联科学的光輝成就,更強有力地說明这一点。我国的社会主义革命已經取得了决定性的胜利,中国共产党提出的社会主义建設的总路綫以及技术革命和文化革命的偉大号召正鼓舞着全国人民,把人們的思想从各种束縛中解放出来;社会主义的生产建設高潮一个高似一个。生产力的空前鉅大發展必然促使科学飞躍前进。可以断言,我国的几何学在極短期也一定和其他科学一道有蓬勃的發展。

## 第二章 平面上的笛卡兒坐标· 極坐标·橢圓·双曲綫·拋物綫

如緒論上所說,解析几何是用代数的方法来研究几何圖形的科学。在这一章里,我們主要介紹平面上的直角坐标,从而把实数偶的集合和平面上的点的集合作一一对应。这样,我們就可以利用坐标这个工具,来探討平面几何圖形的一些性質。我們初步来研究直綫和三种圓錐截綫。

### I. 坐标法

#### §1. 直綫上的坐标·平面上的直角坐标·

##### 兩点間的距离

##### 1.1. 綫段·軸·單位長度(或單位長) 我們簡單地介紹以下

一些定义。綫段是直綫的有限部分，若它的两个端点为  $A, B$ ，則以  $\overline{AB}$  表示这綫段。它具有長度(或長)，用  $|AB|$  表示，是一个正值或零。若  $A, B$  兩点叠合，則其長为零。

**軸。** 一条直綫有两个相反的方向，任意选其中的一个作为正向，則另一个就是負向。已經指定正向的直綫，称为軸或有向直綫。

**單位長度。** 提到一个綫段的長度，一定相对于一个單位長度而言。我們可以任选一个綫段，以它的長代表單位長度，这單位長度既經选定，不再变更。任意一个綫段的長度，就是用这个單位長度的綫段量得的正数或零。

1.2. 直綫上的坐标 在直綫上选定一个正向，取定一个点  $O$ ，并且从  $O$  起沿直綫正向的一端取另一个点  $E$ ，以  $\overline{OE}$  的長代表單位長度。一般習慣把直綫放在水平地位，正向放在右端，以箭头符号表示(因此， $E$  也就取在  $O$  的右边)。

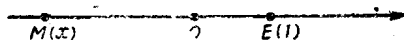


圖 1.

有了單位長度的軸，称为坐标軸，它被  $O$  点分成兩部分，含  $E$  点的部分(即帶箭头的部分)称为正半軸，另一部分称为負半軸。点  $O$  称为原点。点  $E$  称为單位点。我們說原点和單位点确定了直綫上一个坐标系，用  $\{O; e\}$  表示。

以下我們要証明：在确定一个坐标系以后，直綫上每一个点对应于一个一定的实数；反过来，每一个实数对应于直綫上一个一定的点。

在已給的坐标系下，設  $M$  是直綫上任一点，我們用这样一个实数  $x$  来表示  $M$ ：它的絕對值是  $\overline{OM}$  的長度，它的符号規定如下：若  $M$  在正半軸， $x$  是正数；若  $M$  在負半軸， $x$  是負数。显然，表示原点的实数是  $0$ 。



反之，已給任一實數  $x$ ，在已給的坐標系下我們同樣可以在直線上找到一個唯一的點和它對應。這個點在正半軸或負半軸按  $x$  的符號是正是負，從原點  $O$  到這個點的線段的長等於  $x$  的絕對值。實數  $0$  對應於原點。

在確定了一個坐標系之後，直線上點的集合和實數的集合之間，就建立了一個一一對應關係：每個點對應於一個唯一的實數，每個實數對應於一個唯一的點。這個數稱為它對應的點的坐標。我們通常把一個點  $M$  和它的坐標  $x$  寫在一起，如  $M(x)$ 。在不同坐標系下，同一個點一般地具有不同的坐標。

1.3. 兩點間的距離 線段的長度，實際上就是它的兩個端點的距離。現在我們可以用端點的坐標來計算這個距離。

設已給直線上兩點  $M_1(x_1)$ ,  $M_2(x_2)$ 。我們要證明距離公式

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|, \quad (1)$$

或用話來表示：直線上兩點的距離等於它們坐標之差的絕對值。

要證明這個公式，我們應當考慮  $M_1, M_2$  的種種相對的位置，以及對於原點的位置。不妨先假設  $M_2$  在  $M_1$  的右側，即  $x_2 > x_1$ 。現在分兩款來談：

先設  $M_1, M_2$  在原點的同一側，如果它們都在正半軸，則（參看圖 2a）

$$|M_1M_2| = |OM_2| - |OM_1| = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|.$$

如果都在負半軸，則（參看圖 2b）

$$\begin{aligned} |M_1M_2| &= |OM_1| - |OM_2| = \\ &= -x_1 - (-x_2) = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

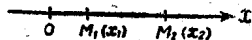


圖 2 a.

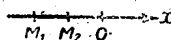


圖 2 b.

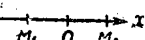


圖 2 c.