[illegible]析湖讲义

解析几何講义

陈 鶚編

高等教育出版社

本講义是按照前高等教育部1956年审定的綜合大学数学專業四年制解析几何教学大綱編写的。本書內容主要选自 Н. И. 穆斯海里什維利著(中山大学譯)的解析几何教程一書。曾在个别綜合大學四年制的解析几何課应用,(按教学計划,講授96学时,課堂練習79学时),講义每节末附有習題,可供課堂練習或家庭作業采用。

解析几何講义

陈鹗 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第051号)

人民教育印刷厂印刷 新华書店發行

統一書号13010·441 開本850×1168 1/32 印張11 13/16 字數300,000 印數13001—15,000

1958年8月第1版 1960年2月北京第5次印刷 定價(8)¥1.30

目　录

第一章　緒論[1]

几何学是研究現实空間形式的科学。最初，它的对象只限于物体的空間关系和形狀。其后，在这个基础上，逐步發展与推广，以至于包括其他在結構上与上述关系和形狀相类似的現实的关系和形狀。

在下面，我們將簡略地叙述几何的發生和發展过程。和其他科学一样，几何学的發生是由于人类的生产实踐，然后它随着生产力的發展而發展了。但是，如同恩格斯所指出，尽管純粹数学的对象是非常現实的資料，但这些資料却表現为非常抽象的形式[2]。关于几何学的特点，斯大林更有極明确的說明：“几何学上的定理是把具体对象加以抽象化，把各种对象看成沒有具体性的物体，并在决定它們之間的相互关系的时候，不当成某些具体对象間的具体关系，而当成一般沒有任何具体性的物体間的相互关系[3]。”几何学的这个特性时常被唯心論的哲学家所曲解：他們强調几何的所謂先驗性，他們認为几何学發源于“純粹的瞑想”和外界实驗上的探究無关，这是完全荒謬的論断。列宁說得好：“人的实踐，重复了不止亿万次，于是在人的意識中以邏輯形式固定下来，而成为公理”。事实上，几何的抽象都是客观世界規律的反映。正因为这个原因，几何学，連它的最抽象的推广在内，在其他科学与生产实踐中，都有着广泛的应用。

几何学的發展，可以分作以下四个时期[4]：

---

① 建議讀者參看 1956 出版的关嗣譯 D. J. Struik 的数学簡史。

② 見恩格斯：反杜林論中譯本第二版，第 35 頁。

③ 見斯大林，馬克思主义与語言学問題，中譯本第二版，第二十二頁。

④ 分期法根据苏联大百科全書“几何学”条，見数学通报 1955 第四期，我国的分期与之不一致，見李儼著中国算学史。

1. 第一个时期（萌芽时期）。五千年前，世界上已有文明古国：如埃及、巴比倫、中国和印度。这些都是具有大河流的国家，主要依賴农業生产，因而土地的測量就成为必要；几何学可能就由此萌芽。据希臘历史記載，埃及尼罗河每年在泛濫之后，要重新測量土地。在希臘文中，几何学即測地学的意思。那时，埃及就有高达138公尺的金字塔，这就是运用几何知識的明証。我国黄河流域一帶开化最早。从出土的文物来看，三四千年前就有附有精美圖案的各种陶器和磚；殷墟的甲骨文留下了我国的数字并有象形手拿圓規作圖的規字和象形直角曲尺的矩字。据史書記載，西周时候，八岁兒童就开始有数学教育①。無論如何，在那个时候，几何知識是憑經驗得到的，其推理是粗糙的，幼稚的。

2. 第二个时期。在紀元前七世紀的时候，希臘哲学家泰列士（Θαλῆς，紀元前 640—550）到埃及經商，把埃及的几何学帶到希臘。这时欧洲正当奴隶社会的初期，經济文化正是欣欣向荣的时候，几何的發展也达到了一定的高峰。从紀元前七世紀到三世紀，很多希臘学者都对几何有貢献，推理的方法越来越被重視，几何学得到进一步的發展。如希臘畢达哥拉斯（*Πυθαγόρασ*，紀元前 569—600）学派对几何邏輯的严整性有很大的貢献；柏拉圖（*Πλάτων*，紀元前 430—349）把几何学建立在公理、公設和邏輯的基础上，开始用演繹的方法，并且以几何为訓練人类思想的工具。这些工作，对几何發展有重大意义。但另一方面，他們却都强調了思維的重要，忽略了公理以实踐为基础的事实；他們認为数学概念独立存在，为人类智力活动的結果，与实在世界無关。相反的，亞里士多德（*Αριστοτέλησ*，紀元前 384—322）則認为数学的概念乃是实在事物的抽象，这是唯心唯物两个方向在哲学和科学上的最早形成。

希臘数学家欧几里得（*Εύκλειδησ*，紀元前 330—275）总結了

① 見李儼著中国算学史和中国古代数学史料。

前三、四世紀几何学家的結果，写了“几何原本”一書。他当时主持亚力山大大学数学系，收集了几何的不同的定理与証明，把它們严格地按邏輯組織起来。不久以后，經过几何学和物理学家阿基米得($A\rho\chi\iota\mu\acute{\eta}\delta\eta\sigma$, 紀元前287—212)在面积体积方面的补充，阿波罗尼斯($'A\pi o\lambda\lambda\acute{\omega}\nu\iota o\sigma$, 紀元前260—200)在圓錐截綫方面的补充，几何的內容更为充实了。我們今天中学用的初等几何教科書形式与內容都和几何原本極相似。这样一本用了兩千多年的教科書是很少見的。根据几何原本的公設所推导出来的几何学，后来就称为欧氏几何学。这个时期，几何方面的人才輩出，所以紀元前三世紀曾被称为几何世紀。在紀元前后，随着希臘罗馬奴隶时期的沒落，几何和其他科学一样停滞了一千多年之久。这是因为在欧洲封建社会初期，侵略者(日耳曼人)極端殘酷的統治摧殘了生产力，而在整个封建社会时期，極端保守的宗教思想又占統治地位，生产力無法發展；因而科学文化也就無所进展。

由于东西方社会發展的进程有所不同，加上古时交通不便，东方数学的發展，不可能和欧洲的相同，因而时期的划分也就不一致。我国在春秋战国以及秦汉时期（紀元前八世紀到紀元后二世紀），由于天文、治河、工程、建筑、战爭、商業等种种需要，几何学方面有过不少成就。例如張衡(78—139)造渾天仪，他还給出圓周率兩个值：$\pi=\sqrt{10}=3.16$ 及 $\pi=\frac{92}{29}$(其后200年，阿剌伯数学書中才出現 $\pi=\sqrt{10}$)；刘洪（二世紀）造乾象术以測定日月星辰的位置；赵爽証勾股弦定理等等。此后研究割圓术最著名的有祖冲之(429—500)，他算出 $\pi=\frac{355}{113}$，$\pi=\frac{22}{7}$ 和 π 介乎 3.1415926 与 3.1415927 之間；相同的結果，在一千多年后欧洲才有人發現。他的兒子祖暅(一作祖暅之)，有开立圓术，求出球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$。隋唐宋之間(六世紀到十四世紀)，国家还以考試来鼓励数学，可以

想見当时对于数学也还重視。关于数学的著述，也很丰富。就已有的史料看来，我国对于几何的貢献是由于实际的需要而得到很先进的，但比較孤立的公式和結果，而欧洲則更注意方法：这是那个时代东西数学基本不同之点。

3．第三个时期。在欧洲資本主义社会的前夕和初期，生产力的發达和經济基础的改变，促进了文化經济的繁荣。这就是历史上所謂的文艺复兴的时期。在几何方面，有开普勒(Kepler, 1571—1630)和德薩格(Desargues, 1593—1662)对于純粹几何的整理和扩充。到1637年，法国数学家笛卡兒(Descartes, 1596—1650)建立了坐标，引进了变量，把几何大大地推进了一步。在这以前，数学的对象是靜止的、孤立的；在这以后，人們就开始从运动变化的观点来处理几何問題。恩格斯說："笛卡兒的变量是数学中的轉捩点。于是运动与辯証法就进入了数学，立即有了微分和积分，这是由牛頓和萊布尼茲完成，而不是由他們發現的。"[①] 笛卡兒的工作的影响，是値得这样高的評价的。虽然阿基米得和十六世紀的欧洲几何学家也用代数来研究几何，但笛卡兒的坐标法完全是嶄新的。他用数(坐标)表示点，用变数表示动点，从圖形的簡單特性求出它的点的坐标所应适合的条件或方程，然后又从方程求得圖形的更普遍的与更复杂的性質。这种通过坐标，利用代数的方法来研究圖形和变換的科学，称为解析几何学。解析几何学标志着几何学的第三个时期的开始。我們这个課程，正是以笛卡兒的方法为基础来研究平面和空間的最簡單的圖形及其变換。

最早，德国科学家开普勒在1604年引入曲率半徑的概念。稍后荷蘭数学家惠更斯(Huygens, 1629—1695)又在1673年开始了漸近綫与漸伸綫的研究。其后在十八、十九世紀，瑞士数学家欧拉(Euler, 1707—1783)，法国数学家蒙日(Monge, 1746—1818)，德

① 恩格斯，辯証法与自然科学，中譯本第128頁。

国数学家高斯(Gauss,1777—1855)与俄国数学家彼得森(Пeтe-pcoн)等导出了微分几何学。这一門几何的分支,在十九与二十世紀有着極为壯闊的發展。

虽然許多射影几何的重要概念早已萌芽;例如在阿波罗尼斯和帕勃斯(Pappus,紀元后二、三世紀),以及十七世紀的德薩格的工作中,已經有关于透視理論的研究并發展了关于無穷远元素的概念,德薩格与法国数学家巴斯卡(Pascal,1623—1662)曾用射影观点研究园錐截綫,但由于解析几何的方法長时間支配了几何的研究,他們这方面的工作沒有引起人們的注意。直到十九世紀初,蒙日的学生法国数学家龎西莱(Poncelet,1788—1867)和瑞士数学家斯坦納(Steiner,1796—1863)开始了射影几何的研究。接着这一几何的分支就有很大的發展。在这方面,龎西莱和德国数学家房施陶特(Von Staudt,1798—1867)都有著名的著作。德国数学家普呂梳(Plücker,1801—1868)还建立了以直綫为基本元素的几何学;格拉斯曼(Grassmann,1809—1877)則創立了 n 維空間的仿射几何学与度量几何学。

蒙日在十八世紀末就研究了画法几何,这支实用几何的發生和發展,和文艺复兴时期的繪画与建筑的發展高潮是分不开的。

这个时期,东西的交通已逐漸便利;由于西方教徒与商人到中国来,东西方的历法与数学就交流起来。在1583,意大利傳教士利馬竇来华,与徐光啓在十七世紀初年翻譯几何原本,把欧氏几何介紹到中国。在十九世紀,中国不少数学家有关于方圓、弧矢、橢圓等的著述。

4. 第四个时期。 这个时期实际上和前面关于微分几何的研究是并行着的。从俄国偉大数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский,1793—1856)建立新的几何开始到現在,可以称为第四时期。从几何原本問世以来二千多年,由于它的平行公設在直覺上比較其他

公設不显然，吸引了許多几何学家的研究。其中有不少几何学家从一个和平行公設相反的公設出發，推得若干和欧氏几何完全不同的結果。但是他們有的为自己主观或成見所蔽，在一定的地方推理上發生錯誤；有的則不自覺地引进了与平行公設本質上相同的公設。他們就这样引到了"矛盾"，因而肯定平行公設已經証明。有个别的几何学家，虽然沒有犯錯誤，但沒有堅持下去，或怀着顧虑，不敢發表自己的結果。罗氏和別人一样，也曾經企圖"証明"平行公設，而且在他失敗以后，也引进了相反的公設(經过已給直綫外的一点可以作兩条直綫和已給直綫平行)来代替平行公設。但是，他和別人不同的是，他不但沒有找出矛盾，反而得了一个邏輯完整的几何体系；他自称發現了新世界。他的唯物主义的世界观和他的堅持客观眞理的精神，使他成为这个新的几何学的創始人。1826年，他在喀山大学的物理数学系大会上宣布了他的新几何理論。这种新几何就成为非欧几何的一种，称为**罗巴切夫斯基几何学**或**双曲几何学**。同时独立發現这种几何的有高斯和匈牙利数学家約翰·波里埃(J. Bolyai, 1802—1860)，但前者沒有發表，后者發表較迟，而且沒有繼續研究下去。罗氏的發現，不仅解决了二千年来关于欧氏几何的問題，并且是具有革命性的發現；因为他以前的人，都把公理看成絕对的，而他打破了这个束縛。称他为几何学的哥白尼，他是当之無愧的。罗氏几何之可以作为空間关系的一种可能的理論，而且和欧氏几何一样沒有矛盾性，直到他死后，才由克萊因(Klein, 1849—1925)找到罗氏几何的一个完整的模型而被証实。从此，在不同的公理系統上，建立了不同的几何学。与此相联系的，他的結果引出了几何基础的研究：这个問題，后来为德国数学家希尔倍脫(Hilbert, 1862—1943)所解决。

1854年，德国数学家黎曼(Riemann, 1826—1866)又指出另一种非欧几何(1868發表)，其中直綫的長有限，过直綫外一点沒有

直綫与之平行，称为橢圓几何学。我們的現实空間究竟是屬于欧氏的，罗氏的还是黎氏的，在目前的有限条件下，还未能确定。非欧几何广泛地应用于数学分析、物理、天文、量子力学等方面。黎曼在1854年建立了 n 維流形的概念，連同由微分齐式 $ds^2=\Sigma a_{ik}\,dx_i\,dx_k$ 所确定的度量，开創了 n 維流形的微分几何学。在拓朴学的領域中，最初关于多維流形的思想也屬于黎曼的。

德国数学家克萊因在 1872 年曾將当时的各种几何学在变換群的概念下联系起来，統一起來。他把每一种几何学和一定的变換群相对应：这个几何学所研究的，是圖形的一些性質，当我們令圖形經过变換群中的任意一个变换时，这些性質保持不变。这样，各个几何学之間的相互关系就寓于各个变換群之間的相互关系之中。在本課程里，我們將涉及这个概念。

在这个时期[①]，微分几何是几何学的一个主要力量。意大利数学家貝尔特拉米(Beltrami,1835—1900)，法国数学家达布(Darboux, 1842—1917）等对于欧氏三維空間的微分几何学作了有系統的發展。隨后出現了各种不同变換群的微分几何学。广义相对論更推动它的發展，使成为近代数学中發展最快的学科之一。在近代微分几何的發展中，意大利数学家列維-奇維塔（Levi-Civita, 1873—1941），法国数学家加当（E. Cartan, 1869—1951）和德国数学家淮尔（H. Weyl, 1885—1955）的貢献最为突出。近代苏联数学家卡岡（B. Ф. Каган）、耶戈罗夫（Д. Ф. Егоров）、菲尼科夫(С. П. Фиников)、魯金(Н. Н. Лузин)等在这方面都有重要的貢献。我国数学家苏步青在这方面也有卓越的成就。

在代数学与几何学的交界，挪威数学家索弗斯李(S. Lie, 1842

① 关于近代几何学的發展，还可以参看上文所引的苏联百科全書“几何学”条，科学出版社出版的三十年来苏联数学“几何学”的譯本，以及苏联大百科全書选譯“数学，算术”第58頁，高教出版社出版。

—1899)在 1873 年建立了連續群(李群)論，苏联数学家龐特里亞金(Понтрягин)等在这方面有極重要的貢献。

綜上所述，可以看出，当生产关系适合生产力性質的时候，几何学就和整个科学文化同时，由于回答生产發展所提出的問題，并概括了实踐，出現了繁荣的时期。四十年来，在社会主义制度下苏联科学的光輝成就，更强有力地說明这一点。我国的社会主义革命已經取得了决定性的胜利，中国共产党提出的社会主义建設的总路綫以及技术革命和文化革命的偉大号召正鼓舞着全国人民，把人們的思想从各种束縛中解放出来；社会主义的生产建設高潮一个高似一个。生产力的空前鉅大發展必然促使科学飞躍前进。可以断言，我国的几何学在極短期也一定和其他科学一道有蓬勃的發展。

第二章 平面上的笛卡兒坐标·極坐标·橢圓·双曲綫·拋物綫

如緒論上所說，解析几何是用代数的方法来研究几何圖形的科学。在这一章里，我們主要介紹平面上的直角坐标，从而把实数偶的集合和平面上的点的集合作一一对应。这样，我們就可以利用坐标这个工具，来探討平面几何圖形的一些性質。我們初步来研究直綫和三种圓錐截綫。

I. 坐标法

§1. 直綫上的坐标·平面上的直角坐标·两点間的距离

1.1. 綫段·軸·單位長度(或單位長) 我們簡單地介紹以下

一些定义。綫段是直綫的有限部分，若它的兩个端点为 A, B，則以 $\overline{AB}$ 表示这綫段。它具有長度(或長)，用 $|AB|$ 表示，是一个正值或零。若 A, B 兩点叠合，則其長为零。

軸. 一条直綫有兩个相反的方向，任意选其中的一个作为正向，則另一个就是負向。已經指定正向的直綫，称为**軸**或**有向直綫**。

單位長度. 提到一个綫段的長度，一定相对于一个單位長度而言。我們可以任选一个綫段，以它的長代表單位長度，这單位長度既經选定，不再变更。任意一个綫段的長度，就是用这个單位長度的綫段量得的正数或零。

1.2. **直綫上的坐标** 在直綫上选定一个正向，取定一个点 O，并且从 O 起沿直綫正向的一端取另一个点 E，以 $\overline{OE}$ 的長代表單位長度。一般習慣把直綫放在水平地位，正向放在右端，以箭头符号表示(因此，E 也就取在 O 的右边)。

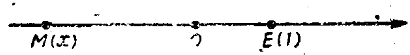

圖 1.

有了單位長度的軸，称为**坐标軸**，它被 O 点分成兩部分，含 E 点的部分(即帶箭头的部分)称为**正半軸**，另一部分称为**負半軸**。点 O 称为**原点**。点 E 称为**單位点**。我們說原点和單位点确定了直綫上一个坐标系，用 $\{O; x\}$ 表示。

以下我們要証明：在确定一个坐标系以后，直綫上每一个点对应于一个一定的实数；反过来，每一个实数对应于直綫上一个一定的点。

在已給的坐标系下，設 M 是直綫上任一点，我們用这样一个实数 x 来表示 M：它的絕对値是 $\overline{OM}$ 的長度，它的符号规定如下：若 M 在正半軸，x 是正数；若 M 在負半軸，x 是負数。显然，表示原点的实数是 0。

反之，已給任一实数 x，在已給的坐标系下我們同样可以在直綫上找到一个唯一的点和它对应。这个点在正半軸或負半軸按 x 的符号是正是負，从原点 O 到这个点的綫段的長等于 x 的絕对值。实数 0 对应于原点。

在确定了一个坐标系之后，直綫上点的集合和实数的集合之間，就建立了一个一一对应关系：每个点对应于一个唯一的实数，每个实数对应于一个唯一的点。这个数称为它对应的点的坐标。我們通常把一个点 M 和它的坐标 x 写在一起，如 $M(x)$。在不同坐标系下，同一个点一般地具有不同的坐标。

1.3. 兩点間的距离　綫段的長度，实际上就是它的兩个端点的距离。現在我們可以用端点的坐标来計算这个距离。

設已給直綫上兩点 $M_1(x_1)$，$M_2(x_2)$。我們要証明距离公式

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|, \tag{1}$$

或用話来表示：直綫上兩点的距离等于它們坐标之差的絕对值。

要証明这个公式，我們应当考慮 M_1, M_2 的种种相对的位置，以及对于原点的位置。不妨先假設 M_2 在 M_1 的右側，即 $x_2 > x_1$。現在分兩款来談：

先設 M_1，M_2 在原点的同一側，如果它們都在正半軸，則(参看圖 $2a$)

$$|M_1M_2| = |OM_2| - |OM_1| = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|.$$

如果都在負半軸，則(参看圖 $2b$)

$$|M_1M_2| = |OM_1| - |OM_2| =$$

$$= -x_1 - (-x_2) = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|.$$

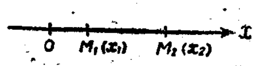

圖 2 a.

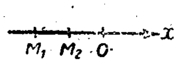

圖 2 b.

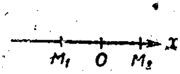

圖 2 c.