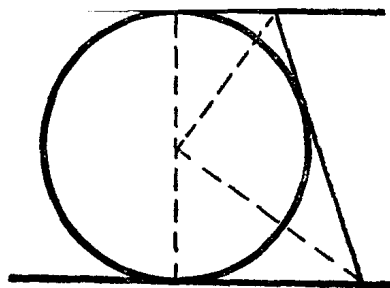


中学数学解题方法与技巧

蔡 道 法



安徽教育出版社

前 言

中学数学教学的任务是使学生切实学好数学基础知识，具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力，达到“开发智力，培养能力”的目的。没有知识，便谈不到能力，没有能力，便难以掌握知识。作为数学学科，做足够数量的练习，是使学生牢固掌握基础知识和基本技能的必要途径。只有有目的、有步骤地去引导学生解题，才能把知识转化为能力。因此，不论是开发智力，还是培养能力，都离不开解题。我国著名数学家、复旦大学校长苏步青教授讲过：“学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，……，一般说来，多演算习题，第一是为了加强基础概念、定义、定理（包括证明）的理解；第二是为了训练我们的运算技巧和逻辑思维。这就是“懂”和“熟”的结合”。这一段话既指出了解题在学习数学中的重要性，又指出了其目的性。为此，我们选题、演题都要围绕其目的来进行，既不能越多越好单纯追求数量而陷入题海，又不能从形式出发一味追求偏题、难题。

如何进行解题才能达到目的？首先，必须在充分理解课本知识的基础上去进行解题。其次，应该明确做题本身是一个思考问题、解决问题的过程。在解题时要去探索、总结、掌握其解题规律和方法。在做完一道题之后，应联想到有关问题，给自己提出很多问题，然后通过思考使这些问题得到解决。这样，在作了一定数量的题后，就能由量变引起质的

变化，做到解题时能对基础知识运用自如、得心应手。然而，这正是目前不少同学所缺少的，他们只是以题演题，演前不能深入去进行分析，演后又不做很好的归纳总结，因而，题虽做得不少，但收效甚微，甚至过时即忘。

为此，本书针对教材各部分的主要内容，分析解题时的思考方法，指出应掌握的解题规律，并配以一定数量的典型例题来加以说明，从而有助于读者加强对基础概念、定义、定理的理解，而又能发展运算技巧和逻辑思维能力，使之做到举一反三，把知识转化为能力。在例题的演示中，有不少题目都有“分析”、“注”，帮助读者思考与抓住关键。对于同类的题则加以“说明”，以帮助总结规律。为便于读者检验自己对解题方法的掌握程度，书后备有“自我检查题”，附有答案。对其中难度较大的题，酌情予以提示或略解，以便于读者自学。

数学题是千变万化的，解题时必须根据题目的实际情况，灵活地运用本书提供的方法与技巧，决不能生搬硬套。

本书在编写过程中，得到许多同志的鼓励和支持，并由程健生同志仔细地审阅了底稿，蔡善德、孙建安两同志绘制了插图，花费了许多精力。在此，向上述所有同志致以衷心的感谢。

由于自己水平有限，书中的错误和缺点一定不少，敬希读者批评指正。

蔡 道 法

1982年10月于合肥

目 录

一、代数式	(1)
1. 如何应用配方法解题	(1)
2. 公式 $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ 的应用	(4)
3. 公式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ 的应用	(7)
4. 如何证明条件等式	(9)
5. 如何解分式、根式的综合题	(19)
二、方程	(27)
1. 如何应用根的判别式解题	(27)
2. 如何应用韦达定理解题	(39)
3. 解方程和方程组的主要方法	(52)
三、函数	(81)
1. 如何应用指数函数、对数函数性质三解题	(81)
2. 如何在有限区间内求函数的极值	(87)
3. 如何在给定的条件下求二次函数	(94)
4. 如何作函数的图象	(100)
5. 如何解与复合函数有关的题	(105)
四、对数	(110)
1. 如何运用对数换底公式解题	(110)
2. 如何解“不查表求对数值”的一类问题	(117)
3. 如何解对数中的一类证明题	(119)
五、不等式	(121)

1. 如何解无理不等式 (只含二次根式的)、指数不等式 和对数不等式	(121)
2. 如何证明不等式	(127)
六、数列	(148)
1. 如何运用等差数列的判定定理和性质定理解题	(148)
2. 如何求等差数列前若干项和的最大值	(159)
3. 如何用“化差求和法”解题	(163)
4. 如何用“退位相减法”解题	(167)
5. 如何解数列的综合题	(169)
6. 如何解“无穷递缩等比数列求和”的问题	(175)
7. 如何求数列前 n 项和的极限	(179)
七、排列、组合、数学归纳法、二项式定理	(183)
1. 如何解排列、组合的应用题	(183)
2. 如何应用数学归纳法解题	(189)
3. 如何应用二项式定理解题	(197)
八、复数	(209)
1. 如何解有关复数概念的题	(211)
2. 如何用复数解有关三角的题	(213)
3. 如何用复数解有关几何的题	(216)
九、三角函数式的恒等变换	(222)
1. 三角函数式恒等变换的方法	(222)
2. 如何应用万能公式解题	(236)
3. 如何证明三角中的条件等式	(241)
4. 涉及三角形的一类三角恒等式的证明方法	(250)
十、三角不等式、斜三角形、三角函数的定义域	(256)
1. 如何证明三角不等式	(256)
2. 如何用正弦定理、余弦定理来解综合题	(264)

3. 如何求三角函数的定义域	(280)
十一、充分条件、必要条件和充要条件	(288)
1. 如何正确理解充分、必要和充要条件	(288)
2. 关于分段式命题的“条件”的判断	(293)
3. 在解题时如何使用条件	(293)
十二、几何题的三角证法	(298)
十三、四点共圆、与圆有关的比例线段问题	(306)
1. 如何证明四点共圆	(306)
2. 如何证明与圆有关的比例线段问题	(309)
十四、几何证题中的面积证法	(318)
十五、如何用解析法证几何题	(328)
十六、直线和平面	(337)
1. 如何证明直线、平面间的平行和垂直关系	(337)
2. 如何应用三垂线定理及其逆定理	(340)
3. 如何求空间两条异面直线所成的角，直线和平面所成的角	(343)
4. 如何求距离	(349)
十七、立体几何中的反证法、极值问题	(360)
1. 反证法及其应用	(360)
2. 求极值的几种方法	(369)
十八、曲线和方程、参数方程	(378)
1. 如何求轨迹方程	(378)
2. 参数方程及其应用	(397)
十九、解析几何解题中的技巧	(418)
二十、解析几何中的一类证明题、一类极值题的解法	(430)
1. 解析几何中的一类证明题的解法	(430)

一、代 数 式

1. 如何应用配方法解题

配方法，是代数解题中的一种基本方法，有着广泛的应用，掌握使用这种方法的规律，在各种场合下灵活地使用它去解题，无疑是极为重要的。

配方法，通常指的是在解析式的变形中，使用公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ，使之出现二项和(或差)的完全平方，较多的情况是在左边缺掉某些项，需要配上这些缺项，然后使之成为一个完全平方。在使用时可分下述几种情况：

(1) 不缺项的配方

这类题本身并不需要添项，而是需要进行拆项、移项等变形处理才能得出完全平方。

例 求证

$$4^x + 4^y \geq 4^{\frac{x+y+1}{2}}.$$

分析：只需证明 $4^x + 4^y - 4^{\frac{x+y+1}{2}} \geq 0$ 即可，这只要设法使左边化成一完全平方，就能达到目的。

证明： $(4^x + 4^y) - 4^{\frac{x+y+1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 &= (2^x)^2 - 2^{x+y+1} + (2^y)^2 \\
 &= (2^x)^2 - 2 \cdot 2^{x+y} + (2^y)^2 \\
 &= (2^x - 2^y)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

因而 $4^x + 4^y \geq 4^{\frac{x+y+1}{2}}$ 。

(2) 有第一、二项，缺第三项的配方

这类题在使用配方法中最为常见，只要同时加、减第二项系数一半的平方即可。

例 求函数

$y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ 的极值。

解：将右边展开，整理得

$$\begin{aligned}
 y &= nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\
 &= n \left[x^2 - \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + \frac{1}{n^2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - \frac{1}{n^2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \right] \\
 &\quad + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\
 &= n \left[x - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \right]^2 - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2
 \end{aligned}$$

因为 $n > 0$ ，故 y 有极小值。

$$y_{\text{极小值}} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2。$$

(3) 有第一、三项，缺中间项的配方

这类题需仔细观察所给的式中有哪两个平方项，然后配以中间项。

例 解方程

$$x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2$$

分析：左边两项分别为 $x(1+x)$ 及 x 的平方，可看作第一、三项，而配以中间项（即在方程两边同时加上 $2x(1+x)x$ 项）。

解：原方程可化成

$$\begin{aligned} [x(1+x)]^2 + 2x(1+x)x + x^2 &= 8(1+x)^2 \\ &+ 2x(1+x)x, \end{aligned}$$

$$\text{即 } [x(1+x)]^2 = 2(1+x)[4(1+x) + x^2],$$

$$x^2(x+2)^2 = 2(1+x)(x+2)^2,$$

$$(x+2)^2(x^2 - 2x - 2) = 0.$$

$$\text{解得 } x_1 = -2, \quad x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

(4) 只有中间项缺第一、三项的配方

此类题难度最大，主要抓住：中间项的系数通常都含有 2 这个因数，在式中找到中间项，则可配以第一、三项。

例 1 化简

$$\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}.$$

$$\text{解：原式} = \sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}}$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{2}+12}}$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{17+2\sqrt{72}}}$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2}}$$

$$= \sqrt{3+6+2\sqrt{8}}$$

$$= 2\sqrt{2}+1.$$

注： 本题通过配方，从里到外逐步去掉根号，以 $3+2\sqrt{2}$ 而言，视 $2\sqrt{2}$ 为第二项，将 3 拆成 $2+1$ ，即得

$2+2\sqrt{2}+1$ ，等于 $(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1^2$ ，即 $(\sqrt{2}+1)^2$ ，而本题第三步中，是将 $12\sqrt{2}$ 化成 $2\sqrt{72}$ ，以使出现“2”。

例 2 解方程

$$2(x+1)=2\sqrt{x(x+8)}+\sqrt{x}-\sqrt{x+8}。$$

分析：本题有两个“二倍式”，但纵观全题，应以 $2\sqrt{x(x+8)}$ 作为中间项，可将原方程化为

$$x-2\sqrt{x(x+8)}+(x+8)=\sqrt{x}-\sqrt{x+8}+6，$$

$$\text{即 } (\sqrt{x}-\sqrt{x+8})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{x+8})-6=0，$$

由 $\sqrt{x}-\sqrt{x+8}=3$ 或 -2 ，解得

$$x = \frac{1}{36} \text{ (经检验，是增根) 或 } x=1$$

故原方程的解为 $x=1$ 。

2. 公式 $x^2+(a+b)x+ab$

$= (x+a)(x+b)$ 的应用

这个公式的更一般形式是

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)。$$

它的直接应用是用来分解二次三项式，它告诉我们，分解 $x^2+(a+b)x+ab$ ，就是要求找两个数，使其积为 ab ，其和为 $a+b$ 。

由于二次三项式的因式分解在分式化简、解方程、解不等式、求函数定义域、三角变换等方面都起着十分重要的作用，因此灵活地应用这个公式进行因式分解也就显得其重要性。

例 1 分解因式： $a^2+a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6 \\
 &= a^2(1 + q^2 + q^4 + q^6) \\
 &= a^2[1 + (q^2 + q^4) + q^2 \cdot q^4] \\
 &= a^2(1 + q^2)(1 + q^4).
 \end{aligned}$$

例 2 分解因式:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

分析: 把所给式看作是关于 a 的“二次三项式”，然后设法用上述公式来分解。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
 &= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + bc(b-c) \\
 &= (b-c)[a^2 - (b+c)a + bc] \\
 &= (b-c)(a-b)(a-c).
 \end{aligned}$$

例 3 化简 $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2}.$

解: 原式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1+a)(1-a)}{(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)} \\
 &= \frac{(1+a)(1-a)}{(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)} \\
 &= \frac{1}{(1+x)(1-x)}.
 \end{aligned}$$

例 4 解方程

$$5x^2 + x - x\sqrt{5x^2 - 1} - 2 = 0.$$

解: 原方程即为

$$\begin{aligned}
 &(5x^2 - 1) - x\sqrt{5x^2 - 1} + (x - 1) = 0, \\
 &(\sqrt{5x^2 - 1})^2 - [1 + (x - 1)]\sqrt{5x^2 - 1} + (x - 1) = 0, \\
 &(\sqrt{5x^2 - 1} - x + 1)(\sqrt{5x^2 - 1} - 1) = 0,
 \end{aligned}$$

由 $\sqrt{5x^2 - 1} - x + 1 = 0$ 解得

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

由 $\sqrt{5x^2-1}-1=0$ 解得

$$x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

经验算知 $\frac{1}{2}, -1$ 都是增根, 所以原方程的根是 $\pm \frac{\sqrt{10}}{5}$.

例 5 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z = \sqrt{x+y+z+1}+5 & (i) \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} & (ii) \end{cases}$$

解: 由 (i) 得

$$(x+y+z+1) - \sqrt{x+y+z+1} - 6 = 0,$$

因式分解得

$$(\sqrt{x+y+z+1}+2)(\sqrt{x+y+z+1}-3)=0,$$

$\sqrt{x+y+z+1}+2=0$ 在实数范围内不成立, 舍去。

由 $\sqrt{x+y+z+1}-3=0$ 得 $x+y+z=8$ 。

对 (ii) 用等比定理

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{8}{9},$$

得原方程组的解为

$$\begin{cases} x = 1\frac{7}{9}, \\ y = 2\frac{3}{2}, \\ z = 3\frac{5}{9}. \end{cases}$$

3. 公式 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \times$

$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ 的应用

此公式也有不少应用，我们先将公式推导一下，然后再来看它是如何应用的。

解法一：

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 &= (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\
 &= [(a+b)^3 + c^3] - 3ab(a+b+c) \\
 &= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) \\
 &\quad - 3ab(a+b+c) \\
 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).
 \end{aligned}$$

解法二：

$$\because \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\text{又} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{列}_3 + \text{列}_1]{\text{列}_2 + \text{列}_1} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{行}_2 - \text{行}_1 \\ \text{行}_3 - \text{行}_1 \end{array} \quad (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)[(a-b)(a-c) - (b-c)(c-b)]$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)。$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)。$$

下面我们看一下这个公式是如何运用的。

例 1 若 $\triangle AEC$ 的三边 a 、 b 、 c 有 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 的关系，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

$$\text{解：} \because a^3+b^3+c^3-3abc=0,$$

$$\therefore (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0,$$

$$\because a+b+c \neq 0,$$

$$\therefore a-b=0, b-c=0, c-a=0。$$

$$\therefore a=b=c,$$

故 $\triangle ABC$ 为等边三角形。

例 2 求证：如果 $a+b+c=0$ ，则

$$a^3+b^3+c^3=3abc。$$

$$\text{证明：} \because a+b+c=0,$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= 0。$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=3abc。$$

例 3 如果 $a+b+c=0$ ，则

$$\begin{aligned} & (ax+by+cz)^3 + (bx+cy+az)^3 + (cx+ay+bz)^3 \\ &= 3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)。 \end{aligned}$$

$$\text{证明：} \because (ax+by+cz) + (bx+cy+az) + (cx+ay+bz)$$

$$= (a+b+c)(x+y+z) = 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore & (ax+by+cz)^3 + (bx+cy+az)^3 + (cx+ay+bz)^3 \\ &= 3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)。 \end{aligned}$$

例 4 因式分解

$$(x^2+y^2)^3 + (z^2-x^2)^3 - (y^2+z^2)^3。$$

$$\text{解：} \because (x^2+y^2) + (z^2-x^2) + (-y^2-z^2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore & (x^2+y^2)^3 + (z^2-x^2)^3 - (y^2+z^2)^3 \\ &= 3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(-y^2-z^2) \\ &= 3(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x^2-z^2)。 \end{aligned}$$

4. 如何证明条件等式

在某种条件下成立的恒等式叫做附有条件的恒等式，简称条件等式，它通常由两部分组成：一是已知条件，二是求证的等式，解题的原则是：要充分运用给定的条件，也即要对题目的条件(或欲证的等式)作灵活的变形以及发掘其潜在的因素，证题的一般方法有以下几种：

(1) 将已知条件直接(或变形后)代入求证式中去，证得等式成立。

例 1 已知 a, b, c 为等比数列，

求证: $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^2 + b^2 + c^2$ 。

证明: 设公比为 q , 则 $b = aq$, $c = aq^2$ 。

$$\begin{aligned}\therefore a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) \\&= a^6q^6\frac{1}{a^3}\left(1 + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^6}\right) \\&= a^3q^6 + a^3q^3 + a^3 \\&= c^3 + b^3 + a^3,\end{aligned}$$

此例是将已知条件直接代入求证式来证明的。

例 2 已知: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$,

求证: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{(a+b+c)^3}$ 。

证明: 由已知得

$$\frac{bc+ca+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c},$$

即 $(a+b+c)(bc+ca+ab) - abc = 0$,

$$[a+(b+c)][bc+a(b+c)] - abc = 0,$$

$$(b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) = 0,$$

因而 $(b+c)(c+a)(a+b) = 0$,

故得 $b = -c$ 或 $c = -a$ 或 $a = -b$,

将 $b = -c$ 代入求证式, 得

$$\text{左边} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3},$$

$$\text{右边} = \frac{1}{(a+b+c)^3} = \frac{1}{a^3},$$

$$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

(当 $c = -a$ 或 $a = -b$ 时, 证法相同)

此例实际上包含了两道小题, 先证得 $b = -c$ 或 $c = -a$ 或 $a = -b$ [在证明时, 依 $(b+c)$ 为标准进行了整理, 这种依某代数式为标准进行整理, 是变形中常用的一种技巧], 然后再证得结论成立, 故此例虽也是从条件入手, 但却作了复杂的变形, 然后再代入求证式。

(2) 从已知条件入手进行推理, 直接推得欲证的等式。

例 已知: $a+b+c=0$,

求证: $a^3+b^3+c^3=3abc$ 。

证明: 由已知条件得 $a+b=-c$,

$\therefore (a+b)^3 = -c^3$ 。

即 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = -c^3$,

也即 $a^3+b^3+c^3 = -3ab(a+b)$ 。

再将 $a+b=-c$ 代入, 即得

$$a^3+b^3+c^3=3abc。$$

此例在前面是用因式分解公式推得的, 这里则直接由已知条件进行推理而得。

(3) 从结论入手, 将求证式变形, 使之出现已知的条件, 然后将已知条件代入, 推得结论成立。

例 已知: $a+b+c=0$,

求证: $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$ 。

证明: 从结论入手, 即证

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0,$$

而 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$