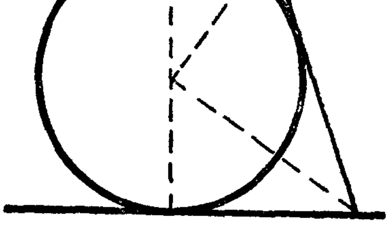
# 中学数学解题方法与技巧

蔡 道 法



安徽教育出版社

# 前言

中学数学教学的任务是使学生切实学好数学基础知识，具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力，达到“开发智力，培养能力”的目的。没有知识，便谈不到能力，没有能力，便难以掌握知识。作为数学学科，做足够数量的练习，是使学生牢固掌握基础知识和基本技能的必要途径。只有有目的、有步骤地去引导学生解题，才能把知识转化为能力。因此，不论是开发智力，还是培养能力，都离不开解题。我国著名数学家、复旦大学校长苏步青教授讲过：“学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，……，一般说来，多演算习题，第一是为了加强基础概念、定义、定理（包括证明）的理解；第二是为了训练我们的运算技巧和逻辑思维。这就是“懂”和“熟”的结合”。这一段话既指出了解题在学习数学中的重要性，又指出了其目的性。为此，我们选题、演题都要围绕其目的来进行，既不能越多越好单纯追求数量而陷入题海，又不能从形式出发一味追求偏题、难题。

如何进行解题才能达到目的？首先，必须在充分理解课本知识的基础上去进行解题。其次，应该明确做题本身是一个思考问题、解决问题的过程。在解题时要去探索、总结、掌握其解题规律和方法。在做完一道题之后，应联想到有关问题，给自己提出很多问题，然后通过思考使这些问题得到解决。这样，在作了一定数量的题后，就能由量变引起质的

变化，做到解题时能对基础知识运用自如、得心应手。然而，这正是目前不少同学所缺少的，他们只是以题演题，演前不能深入去进行分析，演后又不去很好的归纳总结，因而，题虽做得不少，但收效甚微，甚至过时即忘。

为此，本书针对教材各部分的主要内容，分析解题时的思考方法，指出应掌握的解题规律，并配以一定数量的典型例题来加以说明，从而有助于读者加强对基础概念、定义、定理的理解，而又能发展运算技巧和逻辑思维的能力，使之做到举一反三，把知识转化为能力。在例题的演示中，有不少题目都有“分析”、“注”，帮助读者思考与抓住关键。对于同类的题则加以“说明”，以帮助总结规律。为便于读者检验自己对解题方法的掌握程度，书后备有“自我检查题”，附有答案。对其中难度较大的题，酌情予以提示或略解，以便于读者自学。

数学题是千变万化的，解题时必须根据题目的实际情况，灵活地运用本书提供的方法与技巧，决不能生搬硬套。

本书在编写过程中，得到许多同志的鼓励和支持，并由程健生同志仔细地审阅了底稿，蔡善德、孙建安两同志绘制了插图，花费了许多精力。在此，向上述所有同志致以衷心的感谢。

由于自己水平有限，书中的错误和缺点一定不少，敬希读者批评指正。

蔡 道 法

1982年10月于合肥

# 目　录

# 一、代 数 式

## 1.如何应用配方法解题

配方法，是代数解题中的一种基本方法，有着广泛的应用，掌握使用这种方法的规律，在各种场合下灵活地使用它去解题，无疑是极为重要的。

配方法，通常指的是在解析式的变形中，使用公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$，使之出现二项和（或差）的完全平方，较多的情况是在左边缺掉某些项，需要配上这些缺项，然后使之成为一个完全平方。在使用时可分下述几种情况：

（1） **不缺项的配方**

这类题本身并不需要添项，而是需要进行拆项、移项等变形处理才能得出完全平方。

**例** 求证

$$4^x + 4^y \geqslant 4^{\frac{x+y+1}{2}}。$$

**分析**：只需证明 $4^x + 4^y - 4^{\frac{x+y+1}{2}} \geqslant 0$ 即可，这只要设法使左边化成一完全平方，就能达到目的。

**证明**： $(4^x + 4^y) - 4^{\frac{x+y+1}{2}}$

$$=(2^x)^2-2^{x+y+1}+(2^y)^2$$
$$=(2^x)^2-2\cdot 2^{x+y}+(2^y)^2$$
$$=(2^x-2^y)^2\geqslant 0$$

因而　　$4^x+4^y\geqslant 4^{\frac{x+y+1}{2}}$。

**（2） 有第一、二项，缺第三项的配方**

这类题在使用配方法中最为常见，只要同时加、减第二项系数一半的平方即可。

**例**　求函数

$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$的极值。

**解**：将右边展开，整理得

$$y=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

$$=n\left[x^2-\frac{2}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)x+\frac{1}{n^2}\left(a_1+a_2+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+a_n\right)^2-\frac{1}{n^2}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2\right]$$
$$+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

$$=n\left[x-\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+c_n\right)\right]^2-\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots\right.$$
$$\left.+c_n\right)^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

因为$n>0$，故$y$有极小值。

$$y_{\text{极小值}}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2。$$

**（3） 有第一、三项，缺中间项的配方**

这类题需仔细观察所给的式中有哪两个平方项，然后配以中间项。

**例** 解方程

$$x^2(1+x)^2+x^2=8(1+x)^2$$

**分析：**左边两项分别为$x(1+x)$及$x$的平方，可看作第一、三项， 而配以中间项 （即在方程两边同时加上$2x(1+x)x$项）。

**解：**原方程可化成

$$[x(1+x)]^2+2x(1+x)x+x^2=8(1+x)^2$$
$$+2x(1+x)x,$$

即 $[x(1+x)]^2=2(1+x)[4(1+x)+x^2]$,

$$x^2(x+2)^2=2(1+x)(x+2)^2,$$

$$(x+2)^2(x^2-2x-2)=0。$$

解得 $x_1=-2$， $x_{2、3}=1\pm\sqrt{3}$。

**（4） 只有中间项缺第一、三项的配方**

此类题难度最大，主要抓住：中间项的系数通常都含有2这个因数，在式中找到中间项，则可配以第一、三项。

**例 1** 化简

$$\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}。$$

**解：**原式$=\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}}$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{2}+12}}$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{17+2\sqrt{72}}}$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2}}$$

$$=\sqrt{3+6+2\sqrt{8}}$$

$$=2\sqrt{2}+1。$$

**注：** 本题通过配方，从里到外逐步去掉根号，以$3+2\sqrt{2}$而言，视$2\sqrt{2}$为第二项，将3拆成2+1，即得

$2+2\sqrt{2}+1$，等于 $(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1^2$，即 $(\sqrt{2}+1)^2$，而本题第三步中，是将 $12\sqrt{2}$ 化成 $2\sqrt{72}$，以使出现"2"。

**例 2** 解方程

$$2(x+1)=2\sqrt{x(x+8)}+\sqrt{x}-\sqrt{x+8}\text{。}$$

**分析**：本题有两个"二倍式"，但纵观全题，应以 $2\sqrt{x(x+8)}$ 作为中间项，可将原方程化为

$$x-2\sqrt{x(x+8)}+(x+8)=\sqrt{x}-\sqrt{x+8}+6,$$

即 $(\sqrt{x}-\sqrt{x+8})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{x+8})-6=0$,

由 $\sqrt{x}-\sqrt{x+8}=3$ 或 $-2$，解得

$$x=\frac{1}{36}\text{（经检验，是增根）或 } x=1$$

故原方程的解为 $x=1$。

## 2. 公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 的应用

这个公式的更一般形式是

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)\text{。}$$

它的直接应用是用来分解二次三项式，它告诉我们，分解 $x^2+(a+b)x+ab$，就是要求找两个数，使其积为 $ab$，其和为 $a+b$。

由于二次三项式的因式分解在分式化简、解方程、解不等式、求函数定义域、三角变换等方面都起着十分重要的作用，因此灵活地应用这个公式进行因式分解也就显得其重要性。

**例 1** 分解因式：$a^2+a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6$。

**解**：$a^2+a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6$

$=a^2(1+q^2+q^4+q^6)$

$=a^2[1+(q^2+q^4)+q^2\cdot q^4]$

$=a^2(1+q^2)(1+q^4)$。

**例 2** 分解因式：

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

**分析**：把所给式看作是关于 $a$ 的"二次三项式"，然后设法用上述公式来分解。

**解**：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$。

**例 3** 化简 $\dfrac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$。

**解**：原式

$$=\frac{(1+a)(1-a)}{(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)}$$

$$=\frac{(1+a)(1-a)}{(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)}$$

$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)}。$$

**例 4** 解方程

$5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$。

**解**：原方程即为

$(5x^2-1)-x\sqrt{5x^2-1}+(x-1)=0$，

$(\sqrt{5x^2-1})^2-[1+(x-1)]\sqrt{5x^2-1}+(x-1)=0$，

$(\sqrt{5x^2-1}-x+1)(\sqrt{5x^2-1}-1)=0$，

由 $\sqrt{5x^2-1}-x+1=0$ 解得

$$x_1=\frac{1}{2}\ ,\quad x_2=-1\ 。$$

由 $\sqrt{5x^2-1}-1=0$ 解得

$$x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\ 。$$

经验算知$\frac{1}{2}$, $-1$ 都是增根，所以原方程的根是$\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$。

**例 5** 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{x+y+z+1}+5 & \text{( i )} \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} & \text{( ii )} \end{cases}$$

**解**：由 (i) 得

$$(x+y+z+1)-\sqrt{x+y+z+1}-6=0,$$

因式分解得

$$(\sqrt{x+y+z+1}+2)(\sqrt{x+y+z+1}-3)=0,$$

$\sqrt{x+y+z+1}+2=0$ 在实数范围内不成立，舍去。

由 $\sqrt{x+y+z+1}-3=0$ 得 $x+y+z=8$。

对 (ii) 用等比定理

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{8}{9},$$

得原方程组的解为

$$\begin{cases} x=1\dfrac{7}{9}, \\ y=2\dfrac{3}{2}, \\ z=3\dfrac{5}{9}\ 。\end{cases}$$

## 3. 公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$的应用

此公式也有不少应用，我们先将公式推导一下，然后再来看它是如何应用的。

**解法一：**

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc\\
&=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)\\
&\quad -3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)。
\end{aligned}
$$

**解法二：**

$$\because \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\text{又} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{列}_3+\text{列}_1]{\text{列}_2+\text{列}_1} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行}_3-\text{行}_1]{\text{行}_2-\text{行}_1}(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\0 & a-b & b-c\\0 & c-b & a-c\end{vmatrix}$$

$=(a+b+c)[(a-b)(a-c)-(b-c)(c-b)]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$。

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$。

下面我们看一下这个公式是如何运用的。

**例 1** 若$\triangle ABC$的三边$a$、$b$、$c$有$a^3+b^3+c^3=3abc$的关系，则$\triangle ABC$为等边三角形。

**解：** $\because\quad a^3+b^3+c^3-3abc=0$，

$\therefore\quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0$，

即 $\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$，

$\because\quad a+b+c\neq 0$，

$\therefore\quad a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$。

$\therefore\quad a=b=c$，

故$\triangle ABC$为等边三角形。

**例 2** 求证：如果$a+b+c=0$，则

$a^3+b^3+c^3=3abc$。

**证明：** $\because\quad a+b+c=0$，

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$。

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3=3abc$。

**例 3** 如果$a+b+c=0$，则

$$(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$$
$$=3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)。$$

**证明**：$\because$ $(ax+by+cz)+(bx+cy+az)$
$$+(cx+ay+bz)$$
$$=(a+b+c)(x+y+z)=0,$$

$\therefore$ $(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3$
$$+(cx+ay+bz)^3$$
$$=3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)。$$

**例 4** 因式分解
$$(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3。$$

**解**：$\because$ $(x^2+y^2)+(z^2-x^2)+(-y^2-z^2)=0,$

$\therefore$ $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$
$$=3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(-y^2-z^2)$$
$$=3(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x^2-z^2)。$$

## 4. 如何证明条件等式

在某种条件下成立的恒等式叫做附有条件的恒等式，简称条件等式，它通常由两部分组成：一是已知条件，二是求证的等式，解题的原则是：要充分运用给定的条件，也即要对题目的条件（或欲证的等式）作灵活的变形以及发掘其潜在的因素，证题的一般方法有以下几种：

（1） **将已知条件直接（或变形后）代入求证式中去，证得等式成立。**

**例 1** 已知 $a$、$b$、$c$ 为等比数列，

求证：$a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=a^2+b^2+c^2$。

**证明：** 设公比为 $q$，则 $b=aq$，$c=aq^2$。

$$\therefore\quad a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$

$$=a^6q^6\frac{1}{a^3}\left(1+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^6}\right)$$

$$=a^3q^6+a^3q^3+a^3$$

$$=c^3+b^3+a^3,$$

此例是将已知条件直接代入求证式来证明的。

**例 2** 已知：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$，

求证：$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{1}{(a+b+c)^3}$。

**证明：** 由已知得

$$\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c},$$

**即** $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$,

$[a+(b+c)][bc+a(b+c)]-abc=0$,

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=0$,

**因而** $(b+c)(c+a)(a+b)=0$,

**故得** $b=-c$ 或 $c=-a$ 或 $a=-b$,

**将** $b=-c$ 代入求证式，得

$$左边=\frac{1}{a^3}-\frac{1}{c^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3},$$

$$右边=\frac{1}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{a^3},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}。$$

（当 $c=-a$ 或 $a=-b$ 时，证法相同）

此例实际上包含了两道小题，先证得 $b=-c$ 或 $c=-a$ 或 $a=-b$ [在证明时，依 $(b+c)$ 为标准进行了整理，这种依某代数式为标准进行整理，是变形中常用的一种技巧]，然后再证得结论成立，故此例虽也是从条件入手，但却作了复杂的变形，然后再代入求证式。

**（2）从已知条件入手进行推理，直接推得欲证的等式。**

**例** 已知：$a+b+c=0$，

求证：$a^3+b^3+c^3=3abc$。

**证明：** 由已知条件得 $a+b=-c$，

$\therefore\quad (a+b)^3=-c^3$。

即 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3$，

也即 $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$。

再将 $a+b=-c$ 代入，即得

$$a^3+b^3+c^3=3abc。$$

此例在前面是用因式分解公式推得的，这里则直接由已知条件进行推理而得。

**（3） 从结论入手，将求证式变形，使之出现已知的条件，然后将已知条件代入，推得结论成立。**

**例** 已知：$a+b+c=0$，

求证：$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$。

**证明：** 从结论入手，即证

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0，$$

而 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$