# 高次方程

上海教育出版社

# 高次方程

# 高 次 方 程

李传芳
陈汝作　编
陈永明

上海教育出版社

## 内 容 提 要

求解三次以上的代数方程，问题远比一元一次和二次方程复杂得多．本书首先介绍了高次方程的代数理论，并在这基础上介绍了三次、四次方程的求根公式以及一些特殊形式的高次方程的求解方法．另外，书中还以导数作为工具，研究了多项式的重根、图象以及泰勒展开，并在此基础上概要介绍了秦九韶方法．最后，介绍了最基本，也是用得较多的一些计算方法．

本书可供中学数学教师教学和业务进修参考，也可供中学生课外阅读．


高 次 方 程

李传芳
陈汝作 编
陈永明

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　　上海日历印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 1.75　字数 38,000
1979 年 5 月第 1 版　1979 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—180,000 本

统一书号：7150·2052　　定价：0.17 元

# 目　　录

# 一、一元 $n$ 次方程的代数理论

对于一元一次方程 $ax+b=0$ 和一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$(其中 $a\neq0$)，想必读者已很熟悉了．由于它们有简单易记的求根公式，求解这些方程是并不困难的．

什么是一元 $n$ 次方程呢？

一元 $n$ 次方程，指的是下述形式的代数方程：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{1}$$

这里，$n$ 是非负整数，$a_0$、$a_1$、…、$a_{n-1}$、$a_n$ 是常数($a_0\neq0$)．当 $n\geqslant3$ 时，即是高次方程．

对于一元 $n$ 次方程，等号的左端

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

是一元 $n$ 次多项式．这里，因 $a_0\neq0$，称该多项式的次数是 $n$，并把 $a_0x^n$ 称为该多项式的最高次项(由于这里的多项式的各项是按 $x$ 的降幂顺序排列的，所以，最高次项又称多项式的首项)．当 $a_0\neq0$、$n=0$ 时，这时 $f(x)$ 等于一个非零常数，称为零次多项式．

至于 $a_0=0$、$n=0$ 时，这时 $f(x)\equiv0$，称 $f(x)$ 为零多项式．

零次多项式的次数为 0，而把零多项式的次数看成是 $-\infty$(负无穷大)．

把 $x=x_0$ 代入方程左端的多项式，当满足 $f(x_0)=0$ 时，称 $x_0$ 为方程 $f(x)=0$ 的解(或称做方程的根)；又称 $x_0$ 为多项式 $f(x)$ 的一个零点(也称做多项式的根)．

对于方程 $f(x)=0$ (或多项式 $f(x)$)，系数 $a_0$、$a_1$、…、$a_n$

可以是有理数，可以是实数，也可以是复数．当这些系数全属有理数时，称方程 $f(x)=0$ 为有理系数一元 $n$ 次方程，多项式 $f(x)$ 即是有理系数一元 $n$ 次多项式；当这些系数全属实数时，称方程 $f(x)=0$ 为实系数一元 $n$ 次方程，多项式 $f(x)$ 即是实系数一元 $n$ 次多项式．

我们知道，在实数范围里，即使是很简单的二次方程，例如 $x^2+1=0$，也没有实数解．但是，在复数范围里，它就有两个解：$x_1=i$、$x_2=-i$．对于任意一元 $n$ 次方程，它是否有解呢？下面，首先运用代数工具，来讨论一元 $n$ 次方程的求解．

## 1. 余数定理和因式定理

多项式的零点与多项式的因式有联系，为了讨论多项式的因式，这就得从多项式的除法谈起．

[例 1]　求 $x^3-x-9$ 除以 $x-2$ 的余数．

**解**　进行直式除法，列式如下：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -x & -9 & x-2 \\
\cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & x^2+2x+3 \\
\cline{1-4}
& 2x^2 & -x & & \\
& 2x^2 & -4x & & \\
\cline{2-4}
& & 3x & -9 & \\
& & 3x & -6 & \\
\cline{3-4}
& & & -3 &
\end{array}
$$

所以，$x^3-x-9$ 除以 $x-2$ 的余数是 $-3$．

另外，我们发现，$-3$ 恰为 $f(x)=x^3-x-9$ 当 $x=2$ 时的函数值，即

$$f(2)=2^3-2-9=-3.$$

**定理 1**(余数定理)　$n$ 次多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$, 余数等于 $f(a)$.

**证明**　$n$ 次多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$, 设商为 $g(x)$, 余式为 $R$, 那么,根据带余除法法则,有

$$f(x)=(x-a)\cdot g(x)+R. \tag{2}$$

由于除式是一次式,所以商 $g(x)$ 是 $n-1$ 次多项式,余式 $R$ 是一个常数.

在(2)式中,如果令 $x=a$, 得

$$f(a)=(a-a)\cdot g(a)+R,$$

即

$$R=f(a).$$

从例 1 看出,求 $n$ 次多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数,运用余数定理要比直式除法方便得多.

[例 2]　求 $f(x)=x^5-2x^4-5x^2+5x+3$ 除以 $x-2$ 的余数.

**解**　运用余数定理,可知所求余数为

$$R=f(2)=2^5-2\cdot 2^4-5\cdot 2^2+5\cdot 2+3=-7.$$

**定理 2**　$n$ 次多项式 $f(x)$ 可被 $x-a$ 整除的充分与必要条件是 $f(a)=0$.

**证明**　先证充分性, 即要根据 $f(a)=0$ 来推出 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除. 由余数定理,有

$$f(x)=(x-a)\cdot g(x)+f(a),$$

因 $f(a)=0$, 故 $f(x)=(x-a)\cdot g(x)$, 此即表明 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除.

再证必要性, 即要根据 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除来推出 $f(a)=0$. 既然 $f(x)$ 被 $x-a$ 整除, 即相除的余数等于 0, 而由余数定理,余数又等于 $f(a)$, 所以 $f(a)=0$.

[例 3]　已知 $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，求证：

(1) 在 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$ 时，$f(x)$ 能被 $x-1$ 整除；

(2) 在 $a_0-a_1+\cdots+(-1)^na_n=0$ 时，$f(x)$ 能被 $x+1$ 整除.

**证明**　(1) 已知 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$，而 $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$，所以 $f(1)=0$，此即表明 $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除.

(2) 已知 $a_0-a_1+\cdots+(-1)^na_n=0$，而

$$f(-1)=\begin{cases}-[a_0-a_1+\cdots+(-1)^na_n], & \text{当 } n \text{ 为奇数时；}\\ a_0-a_1+\cdots+(-1)^na_n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

所以 $f(-1)=0$，此即表明 $f(x)$ 能被 $x+1$ 整除.

由于 $f(x)$ 可被 $x-a$ 整除，与 $x-a$ 是 $f(x)$ 的因式是一回事，所以定理 2 又可表成下述形式：

**定理 3**(因式定理)　$x-a$ 是 $n$ 次多项式 $f(x)$ 的因式的充分与必要条件是 $f(a)=0$.

另一方面，$f(a)=0$ 与 $x=a$ 是 $n$ 次多项式 $f(x)$ 的零点又是一回事，所以定理 3 又告诉我们：当 $x=a$ 是 $f(x)$ 零点时，总有 $f(x)$ 可被 $x-a$ 整除；并且，反过来亦成立.

## 2. 一元 $n$ 次方程的解的讨论

我们知道，一元一次方程有且仅有一个根，一元二次方程在复数范围里有且仅有两个根(重根依重数计). 那么，一元 $n$ 次方程有几个根呢？

**定理 4**(代数基本定理)　在复数范围里，一元 $n$ 次方程 $(n\geqslant1)$ 至少有一个根.

这个定理的重要性，已不限于解高次方程，也超出了代数的领域，以至我们称它为代数基本定理. 定理的第一个证明

是由高斯 (Gauss) 给出的，以后得到了好多种证明方法，有代数的方法、几何的方法以及复变函数论的方法，由于比较复杂，且要用到不少预备知识，这些都已超出了本书的范围❶.

由代数基本定理，即可得到下面的结论：

**定理 5** 复系数一元 $n$ 次方程 $f(x)=0$ 在复数范围里有且仅有 $n$ 个根.

**证明** 先证明 $f(x)=0$ 在复数范围里有 $n$ 个根. 由代数基本定理，可知方程 $f(x)=0$ 在复数范围内至少有一个根. 设这个根是 $x_1$，根据因式定理，多项式 $f(x)$ 必有一个因式 $x-x_1$，即有

$$f(x)=(x-x_1)\cdot\varphi_1(x).$$

这里，$\varphi_1(x)$ 是 $n-1$ 次多项式. 如果 $n-1>0$，再根据代数基本定理，方程 $\varphi_1(x)=0$ 也至少有一个根，设为 $x_2$. 这样，$\varphi_1(x)$ 又可以分解成 $\varphi_1(x)=(x-x_2)\varphi_2(x)$. 即有

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\varphi_2(x),$$

其中 $\varphi_2(x)$ 是 $n-2$ 次多项式. 当 $n-2>0$ 时，对 $\varphi_2(x)$，仍可作出相仿的结论，如此继续下去，$n$ 次后便有

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\varphi_{n+1}(x).$$

由于 $\varphi_{n+1}(x)$ 是零次多项式，可以知道 $\varphi_{n+1}(x)=a_0$，所以

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{3}$$

由(3)式可以看出，方程 $f(x)=0$ 有 $n$ 个根 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$, 这就证明了定理的前半部分.

进一步，证明仅有 $n$ 个根. 如果方程 $f(x)=0$ 除了前面求得的 $n$ 个根 $x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$ 之外，还有另外的一个根 $x_{n+1}$,

---

❶ 这里可以简要介绍一种证明的思想方法. 由于多项式是连续函数，根据连续函数的性质，$|f(z)|$ 在一个有界闭域里一定能取得极小值. 运用反证法，可以证明 $|f(z_0)|$ 的极小值等于 0，这就证得了代数基本定理.

那么 $x_{n+1}$ 应满足 $f(x)=0$，而

$$f(x_{n+1})=a_0(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\cdots(x_{n+1}-x_n).$$

事实上，当 $x_{n+1}$ 与 $x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 均互异时，上式右边显然不等于零，即 $f(x_{n+1})\neq 0$，此即表明 $x_{n+1}$ 不是方程 $f(x)=0$ 的根．所以 $f(x)=0$ 只有 $n$ 个根．这就证明了定理的后半部分，至此，定理全部得到证明．

在(3)中，$x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 不一定各不相同，如果某一个根 $x_i$ 与 $x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 中其他的根都不相同，这时多项式 $f(x)$ 可被 $(x-x_i)$ 整除，而不能被 $(x-x_i)^2$ 整除，那么，我们称 $x_i$ 是 $f(x)$ 的单根；如果在 $x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 中，设有 $k$ 个相等的根 $x_i$，这时多项式 $f(x)$ 就可被 $(x-x_i)^k$ 整除，而不能被 $(x-x_i)^{k+1}$ 整除，那么我们称 $x_i$ 为 $f(x)$ 的重根，并称重数为 $k$，也称 $x_i$ 为 $f(x)$ 的 $k$ 重根，$x-x_i$ 为 $f(x)$ 的 $k$ 重因式．

这样，如果(3)式中，有 $k_1$ 个 $x-x_1$，有 $k_2$ 个 $x-x_2$，…，有 $k_r$ 个 $x-x_r$，这里 $k_1$、$k_2$、…、$k_r$ 均为自然数，且 $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$，则有

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}. \tag{4}$$

(4) 式称为多项式 $f(x)$ 的标准分解式．对于一个多项式，如不计各因式的次序，那么它的标准分解式是唯一确定的．

运用定理 5，还可得出下述两条关于多项式的重要推论：

**推论 1** 多项式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

恒等于零的充要条件是：它们的各项系数都等于零，即

$$a_0=a_1=\cdots=a_n=0.$$

**证明** 充分性是显然的．因为如果 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，$f(x)$ 就是零多项式．这时，不论 $x$ 取什么值，$f(x)\equiv 0$．

现在来证明必要性．如果 $a_0\neq 0$，这时 $f(x)$ 是 $n$ 次多项式．根据定理 5，$f(x)$只能有 $n$ 个根．也就是说，最多只能有 $n$ 个数 $\alpha_1$、$\alpha_2$、…、$\alpha_n$ 能使 $f(x)=0$，这与 $f(x)$恒等于零这一已知事实矛盾．所以 $a_0\neq 0$ 是不可能的，这就证得了 $a_0=0$．同样，可以证明：

$$a_1=0,\ \cdots,\ a_{n-1}=0,\ a_n=0.$$

由此可知，要使 $f(x)\equiv 0$，必须 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$．这就证明了必要性．

**推论 2** 两个多项式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$\varphi(x)\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

恒等的充要条件是：

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ a_n=b_n.$$

**证明** $f(x)$与 $\varphi(x)$ 恒等的充要条件是 $f(x)-\varphi(x)$ 恒等于零，就是

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots$$

$$+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)\equiv 0.$$

因此，根据推论 1，必须并且只须

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots=a_{n-1}-b_{n-1}=a_n-b_n=0,$$

即

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots,\ a_n=b_n.$$

前面的讨论，都是在复数范围里进行的．如果在实数范围里讨论，还可以证明下述重要结果．

**定理 6** 如果实系数方程 $f(x)=0$ 有虚根 $a+bi$，这里 $a$ 和 $b$ 都是实数，$b\neq 0$，那么它还有另一个虚根 $a-bi$．

**证明** 考虑二次因式

$$g(x)=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$$

$$=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

设 $f(x)$ 除以 $g(x)$，所得的商是 $q(x)$，余式是 $rx+s$. 那么，根据带余除法法则，有

$$f(x)=q(x)[x^2-2ax+(a^2+b^2)]+rx+s.$$

上式中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的各项系数都是实数，所以商 $q(x)$ 和余式 $rx+s$ 的各项系数亦都是实数.

因为 $a+bi$ 是方程 $f(x)=0$ 的根，把 $x=a+bi$ 代入上式，得

$$0=0+r(a+bi)+s,$$

即

$$(ra+s)+rbi=0.$$

根据复数等于零的条件，得

$$\begin{cases} ra+s=0, \\ rb=0. \end{cases}$$

因为 $b\neq0$，所以由 $rb=0$ 得 $r=0$；代入 $ra+s=0$ 得 $s=0$. 因此

$$f(x)=q(x)[x-(a+bi)][x-(a-bi)].$$

从而 $f(a-bi)=0$. 由此可知，$a-bi$ 也是 $f(x)=0$ 的根.

根据定理 6，可以推得下面三个结论：

**推论 1** 实系数奇次方程至少有一个实根，一般有奇数个实根.

**推论 2** 实系数偶次方程或者没有实根，或者有偶数个实根.

**推论 3** 实系数一元 $n$ 次多项式 $(n\geq1)$ 可以分解成实系数的一次或二次因式的乘积(即：在实数范围里，不可约多项式❶的次数不超过二次).

❶ 在数的某个范围里，如果多项式不含除了本身以及零次式以外的因式，则这多项式即称在这个数的范围里的不可约多项式.

关于一元 $n$ 次方程，还要讨论根与系数的关系.

对于一元二次方程 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$，设它的两个根是 $x_1$、$x_2$，则有

$$a_0x^2+a_1x+a_2=a_0(x-x_1)(x-x_2),$$

即

$$a_0x^2+a_1x+a_2=a_0x^2-a_0(x_1+x_2)x+a_0x_1x_2.$$

根据前面两个多项式相等的条件，可知

$$-a_0(x_1+x_2)=a_1,\quad a_0x_1x_2=a_2.$$

这就得到关于一元二次方程的根与系数关系：

$$x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_0},\quad x_1x_2=\frac{a_2}{a_0}.$$

对于一元 $n$ 次方程，也有类似的根与系数的关系.

**定理 7**（韦达定理） 如果一元 $n$ 次方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

的根是 $x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$，那么

$$\left.\begin{aligned}&x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{-a_1}{a_0},\\&x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{i<j}x_ix_j=\frac{a_2}{a_0},\\&\cdots\cdots\\&x_1x_2\cdots x_n=\prod_{i=1}^{n}x_i=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

**证明** 因为方程 $f(x)=0$ 的 $n$ 个根是 $x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$，所以多项式 $f(x)$ 有分解式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

把上式右端展开，可得：

$$\begin{aligned}&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\\&=a_0[x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots\\&\quad+x_{n-1}x_n)x^{n-2}+\cdots+(-1)^nx_1x_2\cdots x_n].\end{aligned}$$

上式中，根据两多项式恒等的条件，即得(5)式.

[例 4] 已知 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 是方程 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根，求作三次方程，使它的三个根是：

(1) $-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$; (2) $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\gamma}$;

(3) $\alpha-k,\ \beta-k,\ \gamma-k$.

**解** 运用定理 7，有：

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma=\frac{a_2}{a_0},$$

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=-\frac{a_3}{a_0}.$$

(1) 于是，有

$$(-\alpha)+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{a_1}{a_0},$$

$$(-\alpha)(-\beta)+(-\alpha)(-\gamma)+(-\beta)(-\gamma)$$

$$=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{a_2}{a_0},$$

$$(-\alpha)(-\beta)(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=\frac{a_3}{a_0}.$$

所以，以 $-\alpha$、$-\beta$、$-\gamma$ 为根的三次方程是

$$a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3=0.$$

(2) $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{a_2}{a_0}}{-\frac{a_3}{a_0}}=-\frac{a_2}{a_3},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{\gamma+\beta+\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-\frac{a_1}{a_0}}{-\frac{a_3}{a_0}}=\frac{a_1}{a_3},$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{a_0}{a_3}.$$

所以，所求方程（称为原方程的倒根方程）为：

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

(3) $(\alpha-k)+(\beta-k)+(\gamma-k)=\alpha+\beta+\gamma-3k$

$$=-\frac{a_1+3a_0k}{a_0},$$

$$(\alpha-k)\cdot(\beta-k)+(\alpha-k)(\gamma-k)+(\gamma-k)(\beta-k)$$

$$=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-2k(\alpha+\beta+\gamma)+3k^2$$

$$=\frac{a_2+2ka_1+3a_0k^2}{a_0},$$

$$(\alpha-k)(\beta-k)(\gamma-k)=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)k$$

$$+(\alpha+\beta+\gamma)k^2-k^3=-\frac{a_3+a_2k+a_1k^2+a_0k^3}{a_0}.$$

所以，所求方程（称为原方程的减根方程）为：

$$a_0x^3+(a_1+3a_0k)x^2-(a_2+2a_1k+3a_0k^2)x$$

$$+(a_3+a_2k+a_1k^2+a_0k^3)=0.$$

## 3. 综合除法

$n$ 次多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$，怎样来求出商和余数呢？下面介绍一种简便的方法.

我们知道，$n$ 次多项式 $f(x)$ 除以一次式 $x-a$，商 $g(x)$ 便是 $n-1$ 次多项式，不妨把它记作

$$g(x)\equiv b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

即有：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=(x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1})+R.$$

把等式右端展开，得

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}$$
$$+(b_2-ab_1)x^{n-2}+\cdots+(b_{n-1}-ab_{n-2})x+R-ab_{n-1}.$$

根据定理 5 的推论 2，有

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0, && \therefore\quad b_0=a_0;\\
&a_1=b_1-ab_0, && \therefore\quad b_1=a_1+ab_0;\\
&a_2=b_2-ab_1, && \therefore\quad b_2=a_2+ab_1;\\
&\cdots\cdots\\
&a_{n-1}=b_{n-1}-ab_{n-2}, && \therefore\quad b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2};\\
&a_n=R-ab_{n-1}, && \therefore\quad R=a_n+ab_{n-1}.
\end{aligned}$$

根据上述右边的一组式子，就可依次把商的系数 $b_0$、$b_1$、…、$b_{n-1}$ 及余数 $R$ 全部求得.

为了计算方便，可以排成竖式如下：将 $f(x)$ 按降幂排列的各项系数分别列出来（注意缺项要补以 0），从左端 $b_0=a_0$ 起，由前一个 $b_{i-1}$ 乘以 $a$ 再加上 $a_i$，即得 $b_i$：

$$\begin{array}{cccccc|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a\\
 & +ab_0 & +ab_1 & \cdots & +ab_{n-2} & +ab_{n-1} & \\
\hline
a_0 & a_1+ab_0 & a_2+ab_1 & \cdots & a_{n-1}+ab_{n-2} & a_n+ab_{n-1} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & R &
\end{array}$$

我们把这样的方法，叫作综合除法.

[例 5]　求 $x^5-2x^4-5x^2+5x+3$ 除以 $x-2$ 的商及余数.

**解**　将被除式按降幂排列，分离系数依次为 $\{1,\ -2,\ 0,\ -5,\ 5,\ 3\}$，列式进行综合除法：

$$\begin{array}{cccccc|l}
1 & -2 & 0 & -5 & 5 & 3 & 2\\
 & 2 & 0 & 0 & -10 & -10 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -5 & -5 & \boxed{-7} &
\end{array}$$

因此，商为 $x^4-5x-5$，余数为 $-7$.