数学奥林匹克

一讲一练

主编：熊 斌 冯志刚

高三年级

上海科学普及出版社

数学奥林匹克

一讲一练

三年级
四年级
五年级
六年级
初一年级
初二年级
初三年级
高一年级
高二年级
■ 高三年级

ISBN 7-5427-2238-7

9 787542 722386 >

ISBN 7-5427-2238-7/O·60

定价：18.00元

数学奥林匹克

一讲一练

·高三年级·

主编 熊 斌 冯志刚

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克一讲一练．高三年级／熊斌，冯志刚主编．—上海：上海科学普及出版社，2002.8
ISBN 7-5427-2238-7

Ⅰ．数...　Ⅱ．①熊...②冯...　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051486 号

责任编辑：文　道

书　　名　数学奥林匹克一讲一练·高三年级·
主　编　熊　斌　冯志刚
出　版：上海科学普及出版社（上海中山北路 832 号　邮政编码 200070）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：昆山市亭林印刷总厂
开　本：787×1092　1/16　　　印　张：13.5
字　数：332000
版　次：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　数：1-20000　　　定　价：18.00 元
书　号：ISBN7-5427-2238-7/O·60

序　　言

纵观世界,中小学数学教育质量以我国为最好。

早在1993年,我国著名数学教育家张奠宙先生[1]就曾指出,中国数学教育是“双料冠军”:

(1) 我国在中学生国际数学奥林匹克中连获总分第一名(1989,1990,1992,1993)。

(2) 1988年举行的国际教育进展评价(IAEP)的结果表明,在对21个国家和地区的13岁学生的测试中,中国大陆学生的数学得分率列第一位(80分)。我国台湾地区和韩国并列第二(73分),苏联(70分),西欧、北美诸国均在60分左右。

时间过去近十年,我国中小学数学教育依然处于领先地位,不可动摇。我国中小学数学教育成绩卓著的原因可以举出很多,例如:

(1) 家长重视。自古以来就有“养不教,父之过”的说法,每一个合格的中国家长无不关心子女的教育,他们倾注了大量的心血与精力。

(2) 教师认真。“教不严,师之惰”。每一位称职的教师都会对学生严格要求,布置适当的作业,采用测试、考试等手段督促学生学习,决不放任自流。

(3) 学生努力。外国(尤其是欧美)很多学生视数学为畏途,甚至在小说中也说:“喏,如果你不喜欢我的故事,那么到教室里去背诵你的算术乘法表,看看你是不是更加喜欢它。”[2]中国学生,没有不会背乘法表的,即使是文盲也能说出“不管三七二十一”。成绩好的学生爱好数学,成绩中下的学生也都知道数学是一门主课,升学考试必考,因而要花力气去学。

(4) 风气纯正。我国舆论历来认为学生应当把学习搞好。虽然也曾出现过“白专道路”,“知识越多越反动”,“高分低能”等等谬论,但社会上仍然正确地坚持读书光荣,“知识就是力量”,对于分数也给予适当的重视。

我国尤其重视英才的培养。对于爱好数学的学生应当给他们更多的机会、更多的培养,其中最重要的一件事就是应当提供给他们一套好的书。由熊斌、冯志刚先生主编,上海科学普及出版社出版的《数学奥林匹克一讲一练》、《数学奥林匹克试题精编ABC卷》就是这样的书。

《数学奥林匹克一讲一练》将奥林匹克数学的内容以一讲一练的形式系统地

组织起来,每一讲设三部分内容:

(1) 将竞赛中所需的知识加以简明扼要的归纳、总结;

(2) 围绕竞赛的热点,选择典型的例题精讲,着重介绍竞赛中的基本思想与基本方法;

(3) 有针对地选择一些名题、好题、新题供读者练习,以提高解题能力。

《数学奥林匹克试题精编ABC卷》是同步练习册,A卷是“一讲”内容的延伸与拓展,题目难度较小;B卷进一步加强竞赛的基本功,突出了解题的基本技巧与方法;C卷是为准备在竞赛中取得优异成绩的同学设计的,题目具有挑战性,是学生发挥自己的创造性,一显身手的用武之地。

如果你使用这两套书,经过一段时间,就会有显著的变化:视野开阔了,数学素养提高了,解题与应试的能力加强了,不仅在课内考试可以脱颖而出,在各种数学竞赛中也可望获得好的成绩。当然,书中的练习必须及时地、亲自地做一做。练是学好数学的第一个关键;练了以后还必须进行总结,将不必要的步骤尽量删去,使解题中的主要思想更加凸现,这是学好数学的第二个关键。

一道题目,想了很久,终于想了出来,这是一件非常愉快的事情,是任何其他东西所不能代替的。如果你曾经有过这样的体验,那么你就能学好数学。如果你还没有这样的体验,那么抓紧做练习吧,相信你很快就会享受到这种解题的快乐。

“学而时习之,不亦乐乎”。对孔夫子的这句话,使用本书的学生,一定会发出会心的微笑。

单 墫

[1] 张奠宙 . 中国数学教育的文化传统和未来走向 . 数学家谈数学教育 . 九章出版社,2000
[2] 查尔斯·金斯利 . 木偶译 . 水孩子 . 人民文学出版社,2000

前　　言

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克活动,可以更好地发现和培养优秀学生,并能提高教师的教学水平,促进教学改革。

本丛书从小学三年级至高中三年级共10册,将数学奥林匹克的内容以"一讲一练"的形式系统地组织起来,目的是希望能为学生提供一套强化知识、开阔视野、提高数学素质和能力的教材,让学生能借助这套教材的学习,具备或提高参加各种数学竞赛的知识和能力,使学生不仅能把自己的课内成绩提高,而且能在数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都由"讲"和"练"组成,每一讲分设三部分内容:

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点,选择典型的例题,通过对典型例题的分析、讲解,使学生能够掌握基本思想和基本方法,进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 能力训练习题。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。通过这样的练习,使得学生能更好地掌握所学的知识,提高解题能力,培养创新意识。

参加本套丛书编写的作者既有长期在数学竞赛辅导第一线的教师,又有曾获国际数学奥林匹克金牌的选手,还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家,由于他们的参与,保证了本套教材的质量。

本套丛书的编写,得到了单墫先生、顾鸿达先生、刘鸿坤先生的热情关怀和指导,借此对他们表示衷心的感谢。

熊　斌　冯志刚

目　　录

第一讲　复数的概念与运算……1
第二讲　复数及其运算的几何意义……5
第三讲　复数与方程、三角……9
第四讲　复数与几何……13
第五讲　概　率……17
第六讲　数列极限……21
第七讲　函数极限……25
第八讲　导数及其应用……29
第九讲　积分及其应用……33
第十讲　函数综合题……37
第十一讲　周期数列……41
第十二讲　排序不等式与琴生不等式……45
第十三讲　奇偶分析……49
第十四讲　同余理论(一)……53
第十五讲　同余理论(二)……57
第十六讲　不定方程的常用解法……61
第十七讲　高斯函数[x]……65
第十八讲　多项式恒等定理及其应用……69
第十九讲　多项式的整除……73
第二十讲　多项式的根……77
第二十一讲　多项式的插值公式……81
第二十二讲　单位根及其应用……85
第二十三讲　不可约多项式……89
第二十四讲　组合恒等式……93
第二十五讲　组　合(一)……97
第二十六讲　组　合(二)……101
第二十七讲　组合几何……105
第二十八讲　图论初步……109
第二十九讲　最小数原理……113
第三十讲　函数迭代和函数方程……117
能力训练习题解答……121

第一讲 复数的概念与运算

竞赛热点、考点、知识点

1. 复数的三种形式：代数形式、三角形式、指数形式．

2. 复数的运算法则：加减法法则、乘法法则、除法法则、乘方法则、开方法则．

3. 复数的模与共轭复数．

(1) 共轭复数的性质：

① $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$；

② $z+\bar{z}=2Re(z)$；$z-\bar{z}=2Im(z)$，其中 $Re(z)$ 表示复数 z 的实部，$Im(z)$ 表示复数 z 的虚部；

③ $\bar{\bar{z}}=z$；$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$；$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；$\bar{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$.

(2) 复数模的性质：

① $|z|\geqslant|Re(z)|$，$|z|\geqslant|Im(z)|$；

② $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$；

③ $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

典 型 例 题 精 讲

例 1 计算：$i^{2001}+(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^8+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{10}+\dfrac{2\sqrt{3}-i}{1+2\sqrt{3}i}+\dfrac{(2-4i)^2+(2i+4)^2}{1+\sqrt{3}i}$.

解 原式 $=i+(\sqrt{2})^8\cdot(1+i)^8+\left[\dfrac{2}{(1+i)^2}\right]^5+\dfrac{-i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\dfrac{(2-4i)^2+i^2(2-4i)^2}{1+\sqrt{3}i}$

$$=i+16(2i)^4+\left(\frac{2}{2i}\right)^5-i+0=256-i.$$

说明 对于第四项的技巧是应该重视的，提取 $-i$ 后可避免过多的计算．

例 2 设 $z=\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2$，$z_k=x_k+y_ki\,(x_k,y_k\in\mathbf{R},k=1,2,\cdots,n)$，$p$ 是 z 的平方根的实部．

求证：$|p|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$.

证明 设 $p+qi\,(p,q\in\mathbf{R})$ 是 z 的平方根，由

$$(p+qi)^2=\sum_{k=1}^{n}z_k^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)+2i\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,$$

得

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)=p^2-q^2,\ \sum_{k=1}^{n}x_ky_k=pq, \tag{①}$$

若 $|p|>\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$，则

$$p^2>\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2,\ q^2>\sum_{k=1}^{n}y_k^2. \tag{②}$$

由①,②得$(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k)^2>(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2)$与柯西不等式矛盾!

例 3 设 $z_k(k=0,1,\cdots,n-1)$是 $z^n-1=0$ 的 n 个根,定义

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0.$$

其中 m 为小于 n 的正整数,求证:$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_k)=a_0$.

解 令 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=z_1^k(k=0,1,\cdots,n-1)$,则由

$$l<n, z_1^l\neq 1, z_1^n=1,$$

知
$$\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{kl}=\frac{1-(z_1^l)^n}{1-z_1^l}=\frac{1-(z_1^n)^l}{1-z_1^l}=0.$$

所以
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)=a_0.$$

例 4 是否存在一个凸1990 边形,同时具有下面的性质:

(1) 所有的内角均相等;

(2) 1990 条边的长度是 1,2,…,1990 的一个排列.

解 设在复平面上有一折线 $A_1A_2\cdots A_{1990}A_{1991}$构成的折线的各条线段长为 $A_kA_{k+1}=a_k$ $(k=1,2,\cdots,1990)$,且点 A_1 对应坐标原点,A_2 在实轴上,从向量$\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$逆时针旋转角 $\theta=\frac{\pi}{995}$后与$\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$同向$(k=1,2,\cdots,1990)$.

令 $z=e^{i\theta}$,则 A_{1991}对应的复数 ω 由下式确定

$$\omega=a_1+a_2z+\cdots+a_{1990}z^{1989}, \qquad ①$$

当且仅当 $\omega=0$ 时,点 A_{1991}与 A_1 重合,因而得到凸 1990 边形,它的每个内角都等于 $\pi-\theta$.

于是原问题等价于存在 1,2,…,1990 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_{1990}$使得①式等于 0.

因为 1990 是偶数,故 $a_ke^{ik\theta}$与$a_{k+995}e^{i(k+995)\theta}$(约定 $a_{j+1990}=a_j,j=1,2,3,\cdots$)恰好是对应向量方向相反的两个复数.故考虑偶数

$$a_{2k}e^{2k\theta i}+a_{2k+995}e^{(2k+995)\theta i}=(a_{2k}-a_{2k+995})e^{2k\theta i}, k=1,2,\cdots,995.$$

令 $b_k=a_{2k}-a_{2k+995}$,则①式化为:

$$\sum_{k=1}^{995} b_ke^{2k\theta i}=0. \qquad ②$$

取$\{(a_{2k}-a_{2k+995})|k=1,2,\cdots,995\}=\{(k,k+995)|k=1,2,\cdots,995\}$,$b_k=-995,k=1,2,\cdots,995$,从而有

$$\sum_{k=1}^{995} b_ke^{2k\theta i}=-995\sum_{k=1}^{995} e^{2k\theta i}=0,$$

即②式成立.

这样就证明了满足条件(1)与(2)的凸 1990 边形存在.

说明 把 1990 换成任意一个 $4n+2$ 型的正整数,结论仍然成立.

能力训练习题

一、填空题

1. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$, $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$,则 $\log_3|(z_1 \cdot \bar{z}_2)^{2000} + (\bar{z}_1 \cdot z_2)^{2000}| =$(　　).

2. 设 $z = \cos 40° + i\sin 40°$,则 $|z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + 1998z^{1998}| =$(　　).

3. 设复数 $z_1, z_2, \cdots, z_{10}$ 为等比数列．已知 $z_1 \neq 1$, $z_2 = z_{10} = 1$,则 z_1 的模与辐角分别为(　　).

4. 已知实数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的各项均不为 0,且 $a_n = a_{n-1}\cos\theta - b_{n-1}\sin\theta$, $b_n = a_{n-1}\sin\theta + b_{n-1}\cos\theta$,且 $a_1 = 1$, $b_1 = \tan\theta$, θ 为已知数,则 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式为(　　).

5. 实系数方程 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的根都不是实数,其中两个根的积为 $13 + i$,另两个根的和为 $3 + 4i$,则 b 的值为(　　).

二、解答题

6. 已知 $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0$, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$,求证:$3\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma$.

7. 求证:存在非零复数集合 $S_n = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$,使得:对任意 $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$,均有 $a_i a_j \in S_n$.

8. 设 $P(x),Q(x),R(x),S(x)$ 都是多项式，且 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$，求证：$(x-1)$ 是 P、Q、R、S 的公因式．

9. 设非零复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 满足

$$\begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4}, & ① \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)=S. & ② \end{cases}$$

其中 S 为实数且 $|S|\leqslant 2$．求证：复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 在复平面上的对应点位于同一圆周上．

10. 已知 $f(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_{n-1}z+C_n$ 是一个 n 次复系数多项式，求证：一定存在一复数 z_0，使得 $|z_0|=1$，且 $|f(z_0)|\geqslant|C_0|+|C_n|$．

第二讲　复数及其运算的几何意义

竞赛热点、考点、知识点

1. 复平面上的距离：复平面上两点 Z_1、Z_2 所对应的复数为 z_1, z_2，则两点 z_1、z_2 之间距离为 $d=|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=|z_1-z_2|$.

2. 旋转：复平面上两点 Z_1、Z_2 所对应的复数为 z_1, z_2，向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$绕 z_1 旋转 θ 角，再伸缩 r 倍($r>0$)后，得向量$\overrightarrow{Z_1Z}$，则 Z 所对应复数 z 为：$z=z_1+(z_2-z_1)re^{i\theta}$，其中 θ 小于零按顺时针方向旋转，θ 大于零按逆时方向旋转．

3. 三点共线的充要条件：复平面上 z_1、z_2、z_3 三点共线的充要条件是：存在三个不全为零的实数 λ_1, λ_2、λ_3，同时满足

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0.\end{cases}$$

其中 z_1, z_2, z_3 分别是点 Z_1、Z_2、Z_3 所对应的复数．由此易得三点共线的另一充要条件是：$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\in\mathbf{R}$.

4. 平行与垂直：

(1) $\overrightarrow{z_1z_2}\perp\overrightarrow{z_3z_4}\Leftrightarrow z_1-z_2=\lambda(z_3-z_4)i(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq0)$；

(2) $\overrightarrow{z_1z_2}/\!/\overrightarrow{z_3z_4}\Leftrightarrow z_1-z_2=\lambda(z_3-z_4)$.

5. 共圆：设 A、B、C、D 四点分别对应复数 z_1, z_2, z_3, z_4，则此四点共圆的充要条件是：$\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}:\dfrac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\in\mathbf{R}$.

典型例题精讲

例 1　已知：$z_1, z_2, \cdots, z_n\in C$，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|=1$，求证：上述 n 个复数中，必存在若干个复数，它们的和的模不小于$\dfrac{1}{4}$.

证明　设 $z_k=x_k+iy_k(x_k, y_k\in\mathbf{R})$，$k=1,2,\cdots,n$，则有

$$|z_k|\leqslant|x_k|+|y_k|,$$

由题设有　$1=\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|=\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i-\sum\limits_{x_j<0}x_j+\sum\limits_{y_k\geqslant0}y_k-\sum\limits_{y_k<0}y_t$.

所以 $\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i$, $-\sum\limits_{x_j<0}x_j$, $\sum\limits_{y_i\geqslant0}y_k$, $-\sum\limits_{y_k<0}y_t$ 中必有一个不小于$\dfrac{1}{4}$，不妨设 $\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i\geqslant\dfrac{1}{4}$，于是

$$\left|\sum_{x_i\geqslant0}z_i\right|=\left|\sum_{x_i\geqslant0}x_i+i\sum_{x_i\geqslant0}y_i\right|\geqslant\left|\sum_{x_i\geqslant0}x_i\right|\geqslant\frac{1}{4}.$$

例 2　设正三角形 ABC 的 A 点固定，B 点在定直线 l 上，求第三顶点 C 的轨迹．

解 如图1所示，置 A 于原点，且使直线 l 与实轴垂直，交实轴于 $m(m>0)$．设 B,C 两点对应复数为 b,c．先考虑 $\triangle ABC$ 为正向绕行的情况，令 $\arg c=\theta$，则 $\arg b=\theta-\frac{\pi}{3}$．因为 b 在直线 l 上，故有

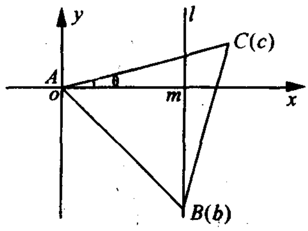

图1

$$Re(b)=m,\ |b|=\frac{m}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)},$$

从而 C 点可表示为

$$c=|b|e^{i\theta}=\frac{m}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}e^{i\theta}.$$

它是过两点 $2m$ 及 $me^{i\frac{\pi}{3}}$ 的直线方程．为证实这一点，只需要验证 $\frac{c-2m}{me^{i\frac{\pi}{3}}-2m}$ 是实数即可．事实上，

$$\frac{c-2m}{me^{i\frac{\pi}{3}}-2m}=\frac{\dfrac{me^{i\theta}}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}-2m}{me^{i\frac{\pi}{3}}-2m}=\frac{\cos\theta-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\theta}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\sin\theta(-\sqrt{3}+i)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)(-\sqrt{3}+i)}=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

若 $\triangle ABC$ 是负向绕行的情况，可得另一与上述直线关于实轴对称的直线．

例3 设 P 在正多边形 $A_1A_2\cdots A_{2m+1}$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{A_1A_{2m+1}}$ 上．证明：$\sum\limits_{k=0}^{m}|PA_{2k+1}|=\sum\limits_{k=1}^{m}|PA_{2k}|$．

解 以圆心 O 为原点，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别为 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1}$ 这里 ε 为 n 次单位根 $e^{\frac{2\pi i}{n}}$．又设 P 对应的复数为 $z=e^{i\theta}$，这里 $n=2m+1$．采用例1中的记号．将 $PA_3,PA_5,\cdots,PA_{2m+1}$ 旋转到 PA_1 的方向，将 $PA_4,PA_6,\cdots,PA_{2m}$ 旋转到 PA_2 方向．

$$\sum_{k=0}^{m}|PA_{2k+1}|=\sum_{k=0}^{m}|z-\varepsilon^{2k+1}|=\sum_{k=0}^{m}|z\varepsilon^{-k}-\varepsilon^{k+1}|=\left|\sum_{k=0}^{m}(z\varepsilon^{-k}-\varepsilon^{k+1})\right|.$$

$$\sum_{k=1}^{m}|PA_{2k}|=\sum_{k=0}^{m}|z-\varepsilon^{2k}|=\sum_{k=1}^{m}|z\varepsilon^{-(k-1)}-\varepsilon^{k+1}|$$

$$=\left|z\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{-(k-1)}-\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{k+1}\right|=\left|z\sum_{k=m+1}^{2m+1}\varepsilon^{-(k-1)}-\sum_{k=m+1}^{2m+1}\varepsilon^{k+1}\right|\quad(\text{利用了}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k=0)$$

$$=\left|z\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{-(k-m)}-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1+m+1}\right|=\left|z\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{-k}-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{k+1}\right|$$

所以

$$\sum_{k=0}^{m}|PA_{2k+1}|=\sum_{k=1}^{m}|PA_{2k}|.$$

能力训练习题

1. 若$\frac{z}{z-1}$是纯虚数，求复数的对应点 Z 的轨迹．

2. 求证：四个复数 z_1,z_2,z_3,z_4 在复平面内所表示的点 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 共圆的充要条件是$\frac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$为实数．

3. 在复平面上，O 为原点，两动点 Z_1 和 Z_2 满足：

(1) Z_1 和 Z_2 所对应复数的辐角分别为定值 θ 和 $-\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\triangle OZ_1Z_2$ 的面积为定值 S.

求：$\triangle OZ_1Z_2$ 的重心 Z 的轨迹．

4. 设复数 z 满足 $\arg\left(\frac{z+1}{z+2}\right)=\frac{\pi}{6}$，求 $\arg z$ 的取值范围．

5. 复平面上点 A,B 对应的复数分别为 $z_1=2,z_2=-3$,点 P 对应的复数为 z,$\frac{z-z_1}{z-z_2}$ 的辐角主值为 φ. 当点 P 在以原点为圆心,1 为半径的上半圆周(不包括两个端点)上运动时,求 φ 的最小值 .

6. 已知集合 $A=\{z \mid |z-c|+|z+c|=2a, z\in\mathbf{C}, a>c>0\}$. 若当 a,c 取遍所有正实数时,恒有 $2+i\in A$. 试在复平面内作出集合 A 表示的图形 .

7. 已知单位圆的内接正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 及圆周上一点 P,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}|PA_k|\leqslant\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

8. 设有 n 个 $(n>3)$ 复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 满足条件:

(1) $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$;

(2) $|z_j|<1\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

求证:其中至少有两个复数 $z_k,z_l(k\neq l)$,使得 $|z_k+z_l|<1$.