空间解析几何

何伯和 编著

吉林大学出版社

空间解析几何

何伯和 编著

吉林大学出版社

空间解析几何

何伯和 编著

*

吉林大学出版社出版 吉林省新华书店发行
长春市南关区全安南大印刷厂印刷

*

850×1168 大32开 10.0625印张 248,000字
1987年6月 第1版 1987年6月 第1次印刷

印数：1—1 200册

ISBN 7-5601-0021-X/O·4

统一书号：13323·23 定价：1.85元

出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

前　　言

“几何的黄金时代”，这是N·布尔巴基（Bourbaki）描述十九世纪数学的一句话，而对于二十世纪的数学，N·布尔巴基则认为：现在已经可以预言，如果把二十世纪叫做代数拓扑与微分拓扑的世纪，看起来大概不会有很大的偏差。（见J.Dieudonne'，A Panorama of Pure Mathematics，p7）

“解析几何”这门课程按照传统的理解，它的任务是阐述与发挥笛卡尔（Descart's，1596—1650）创立这门数学时的基本思想，即建立代数方程（主要是一次、二次方程）与几何图形之间的联系，所以它所体现的是一种方法。这种方法看起来虽然很普通，但是要掌握它却并非十分容易。因此，为了打好基础，在学习中做习题是很重要的。

然而几何学的发展到了今天，整体几何、拓扑与流形的观念成了主要的概念，而这方面内容，在我们现行的教学计划中，又很少得到充分的反映。因此，为了增加学生关于近代几何的观念，以便为今后的学习打一些基础，本教材还编入了“n维几何空间”、“曲面的定向”、“实流形与复流形初步”这样一些内容，并强调了坐标变换的重要性。这是一种尝试，疏漏与不妥之处在所难免，深望同人们不吝赐教。

最后附有一篇与射影几何的历史和应用有一点关系的资料，它的作用仅仅是供读者作参考。

本教材是应吉林大学数学系的教学需要而编写的。在1966年以前，孙以丰教授、张淑芝、董文泉、宋玉琦等同志，曾为吉林大学数学系的解析几何教学付出过辛勤的劳动，特别是张淑芝同志，她是那一时期解析几何教学的主要承担者。现在的这份

教材，与他们以及现在正在从事这方面教学工作的张树青、任化民、郭元春等同志，均有密切的关系，作者在此一并表示由衷的感谢。

何伯和

1985年7月于长春

目　　录

第一章 向量代数

§1 向量概念

在自然现象中，有些量在取定单位以后，可以用数值来表示，例如时间、长度、质量、温度等等便是这样，而数学中的实数，便是这些量的概念的抽象。

然而在自然现象中，还有一些量，例如位移、速度、力、（一点的）电场强度等等，不仅与大小有关，而且还与方向有关。例如位移，当我们说物体A位移距离S时，那么它沿东北方向位移，还是沿西北方向位移，效果是不一样的，也就是说在这一类量里，包含着大小与方向两个要素，而现在要讲的向量，便是这种有大小、有方向量的抽象。当然，我们所说的向量概念并不是仅能表示上述那些物理量。由于在向量概念中，包含有方向的要素，所以它在几何学中也是一个基本的工具。在本课程中，我们将用向量及其运算，处理空间中的直线与平面问题以及坐标变换问题等。

定义1 在空间中一个有大小、有方向的量称为**向量**。

向量在有的书中也称为矢量，向量通常用有向线段来表示；有向线段的长度表示向量的大小（也称为向量的长度），有向线段的方向表示向量的方向。

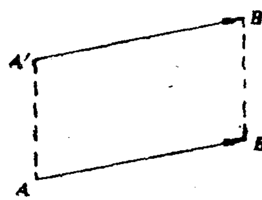

图1－1

设$\overrightarrow{AB}$是一个有向线段，它代表某一个向量，将$\overrightarrow{AB}$平行移动，得到有向线段$\overrightarrow{A'B'}$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$的长度相等，方向相同，因此由定义它们代表同一个向量（图1-1）。所以说：代

表向量的有向线段可以任意平移；平移以后仍代表同一个向量。容许任意平移的有向线段称为自由有向线段。为了表述方便，今后我们把自由有向线段与向量视为等同，而向量有时也称为**自由向量**。

在记法上，为有别于数量，我们用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$或$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}\cdots$来记向量。向量$\boldsymbol{a}$的长度记作$|\boldsymbol{a}|$。长度也称为**绝对值**或**模**。

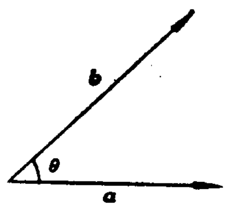

图1－2

设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为二个向量，将它们的起点放在一起，便有夹角θ（见图1-2）。对于所有空间向量而言，它们的夹角无正负之分，一律规定为不超过π的非负值，即规定$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。

一组空间向量，若它们平行于同一直线，则称为**共线向量**，或者简称**共线**。显然，共线向量经平移可以位于同一直线上。同理，一组空间向量，若它们平行于同一平面，则称为**共面向量**，或者简称**共面**。显然，共面向量经平移可以位于同一平面上。

在向量中，除了根据定义1，有一切我们可以想象的向量以外，为了计算与运用的方便，还引进一个**零向量 0**。零向量的长度为零，方向任意，因此它可以平行于任意一个向量，也可以垂直于任意一个向量。零向量在图上表示为一个点。

此外，因为向量是由长度与方向两个要素决定的，所以不能比较大小。例如图1-3所画的两个向量，就不能说谁大谁小，当然更不能说它们相等，因为它们的方向不同。

图1－3

§2 向量的加法与数乘向量

在§1中，我们引进了向量的概念，但是要真正发挥它在数学中的作用，还需要定义向量的运算．向量的运算基本有四种：向量的加法、数乘向量、向量的内积以及向量的外积．本节讨论向量的加法与数乘向量，下两节讨论向量的内积与外积．

一、向量的加法

定义2 设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是两个向量，把$\boldsymbol{b}$的起点放在$\boldsymbol{a}$的终点，然后联结$\boldsymbol{a}$的起点与$\boldsymbol{b}$的终点．则得向量$\boldsymbol{c}$(图1-4)，称它为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之和，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

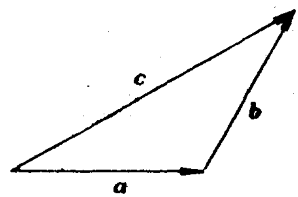

图1-4

对于这个定义，要说明的是向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$的相加与有向线段的具体选择无关，这利用立体几何的知识即可证明，读者可自行验证之．对于下面要讲的向量的其它各种运算，也与有向线段的选取无关，以后不再另行说明．

其次，由定义2，作为特殊情形，显然有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$$

即零向量在向量的加法中是一个零元素．

关于向量的加法，有下列两条基本性质：

1° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

2° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

证明 先证1°．由图1-5可见$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．

下面证明2°．由图1-6可见$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$,$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d}$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

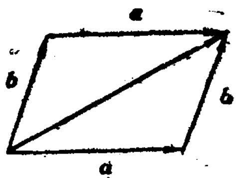

图1－5

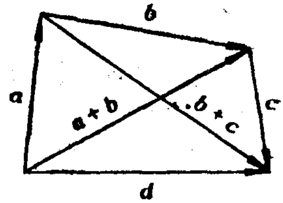

图1－6

由向量加法的性质2°容易推证多个向量的相加也可以任意结合，所以以后对于多个向量的相加不必再打上一些括弧（指出结合方式），可以直接写成$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$．$n$个向量的相加在图上看起来，就是把（不见得在同一个平面上的）n个向量首尾依次相联，然后联结第一个向量的起点与最后一个向量的终点．图1-7便是4个向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$相加的图示．

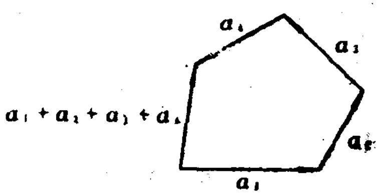

图1－7

有了向量的相加，便可定义向量的相减．设$\boldsymbol{a}$是一个向量，若向量$\boldsymbol{a}'$与$\boldsymbol{a}$长度相等方向相反，则称$\boldsymbol{a}'$为$\boldsymbol{a}$的**逆向量**，记作$\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}$（见图1-8），当然，逆向量是相互的，也就是说，若$\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}'$．

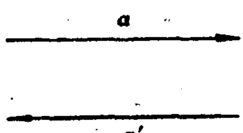

图1－8

定义3 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个向量，规定$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之**差**为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

如图1-9所示．

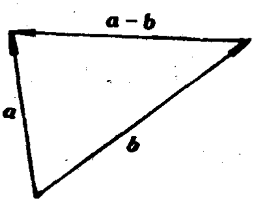

图1－9

由减法的定义，显然有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

例 1 由于规定了向量的模为有向线段的长度，因此根据向量相加的定义与平面几何中三角形两边之和大于第三边这一事实，而有三角不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

据此可以推出，对于任意n个向量有

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|$$

二、数乘向量

定义 4 实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的乘积$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量，它的长度

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

它的方向：当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$相同；当$\lambda<0$时，与$\boldsymbol{a}$相反；当$\lambda=0$时，由上述长度的规定，有$|0\boldsymbol{a}|=0|\boldsymbol{a}|=0$，即$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，所以不必规定方向。

由数乘向量的定义，显然有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

一个向量若其长度为1，则称为**单位向量**，有时记作$\boldsymbol{e}$. 与$\boldsymbol{a}$方向相同的单位向量，也叫作$\boldsymbol{a}$的单位向量. 于是$\boldsymbol{a}$与其单位向量有关系

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e};\ \boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}，当\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$$

其中，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$表示$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

关于数乘向量有下列三条基本性质：

1° $\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$

2° $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

3° $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

证明 先证1°. 当λ，μ中有一个为0时，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，$(\mu\lambda)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，所以$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$. 而当$\lambda\mu\neq0$时，若$\lambda$，$\mu$同

号，则$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$皆与$\boldsymbol{a}$同向；若$\lambda$，$\mu$反号，则$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$皆与$\boldsymbol{a}$反向. 又按定义 4，

$$|\mu(\lambda\boldsymbol{a})| = |\mu||\lambda\boldsymbol{a}| = |\mu||\lambda||\boldsymbol{a}| = |\mu\lambda|\boldsymbol{a} = |(\mu\lambda)\boldsymbol{a}|$$

所以$\mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\mu\lambda)\boldsymbol{a}$.

再证2°. 当λ，μ有一个为0时，显然成立，当$\lambda\mu>0$时，通过对于长度与方向的判定，也有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}.$$

最后当$\lambda\mu<0$，这时若$\lambda+\mu=0$，则显然. 若$\lambda+\mu\neq0$，则在$\lambda+\mu$，$-\lambda$，$-\mu$三个数中，必有两个同号，不妨设$\lambda+\mu$与$-\mu$同号，于是由上述已证的等式有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} + (-\mu)\boldsymbol{a} = (\lambda+\mu-\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$$

因此

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} - (-\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + (-1)((-\mu)\boldsymbol{a})$$
$$= \lambda\boldsymbol{a} + ((-1)(-\mu))\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$$

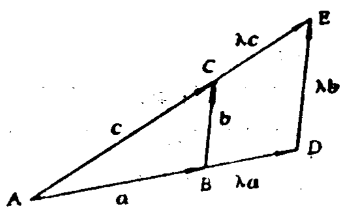

图1—10

最后证3°. 当$\lambda=0$，显然成立. 当$\lambda>0$，作一个图，使得$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$AD=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DE}=\lambda\boldsymbol{b}$，$BC\parallel DE$(图1-10). 于是由相似三角形的性质，有

$$\lambda = \overline{AD}:\overline{AB}: = \overline{DE}:\overline{BC}$$
$$= \overline{AE}:\overline{AC}$$

所以

$$\lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} = \lambda\boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

当$\lambda<0$，利用已证的等式有

$$(-\lambda)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (-\lambda)\boldsymbol{a} + (-\lambda)\boldsymbol{b}$$

经移项得$\lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

三、向量的线性表示

在引入向量的加法与数乘向量以后，全体空间向量便形成

一个运算系统——**向量空间**．为了便于掌握，可考虑用几个向量表示全体空间向量的问题．为此分为共线向量、共面向量与一般空间向量三种情形．

定理 1 若向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 共线，则其中之一可以表示为另一个向量的倍数．

证明 设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$共线，若$\boldsymbol{a}_1=0$，则$\boldsymbol{a}_1=0\boldsymbol{a}_2$．若$\boldsymbol{a}_1\neq 0$，则当$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$同向时，$\boldsymbol{a}_2=\dfrac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1$；当 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 反向时，

$\boldsymbol{a}_2=-\dfrac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1$，所以结论成立．

由定理 1 的证明可知，在直线上取定一个非零向向量以后，此直线上的任意一个向量都可以唯一地用这个向量来表示．

定理 2 若向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$共面，则其中之一可表为另两个向量的数乘之和

证明 设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$共面，若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$共线，其中之一可以用另一个来表示，比如说$\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$，于是$\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1+0\,\boldsymbol{a}_3$，所以结论成立．若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$不共线．则由图1-11可知，总可以作一个以$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$所在的直线为边的平行四边形，使得$\boldsymbol{a}_3$为这个平行四边形的对角线，于是

$$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$$

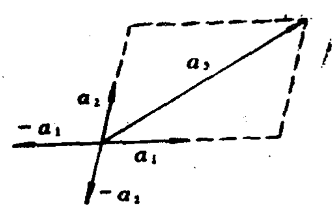

图1－11

由定理 2 的证明可见，在平面上取定两个不共线的向量以后，此平面上的任意一个向量可唯一的表示为这两个向量的数乘之和，这样的表示称为**线性组合**．

定理 3 对于任意4个空间向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$，必有一个是其余三个的线性组合．

证明 若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$共面，由定理2，其中之一可用其余2个来表示，如$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$。于是$\boldsymbol{a}_3=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+0\boldsymbol{a}_4$，故结论成立．若$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$不共面，则如图1-12所示，总可以作一个以$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$所在的直线为棱的平行六面体，使$\boldsymbol{a}_4$为该平行六面体的对角线，于是

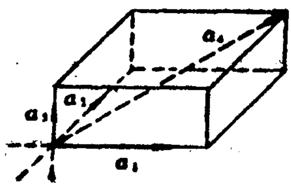

图1-12

$$\boldsymbol{a}_4=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$$

由定理3的证明可见，在空间取定三个不共面的向量以后，任一空间向量都可唯一地表为这三个向量的线性组合，

例2 证明三个向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面的充要条件是有不全为0的实数λ，μ，ν，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0$$

证明 若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面，由定理2，其中之一，比如说$\boldsymbol{a}$可用另二个来表示：$\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$，于是

$$(-1)\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0,\text{ 而}-1\neq 0$$

反之，若$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=0$而$\lambda,\mu$，$\nu$不全为0，不妨设$\lambda\neq 0$，则$\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\boldsymbol{b}+\left(-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$共面．

例3 设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$是二个不共线的向量，

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$

求点C在直线AB上与线段$\overline{AB}$上的条件．

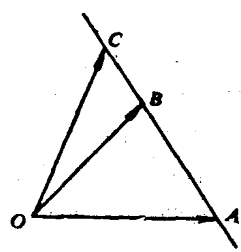

图1-13

解 若C在直线AB上，则由图1-13，

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}-\mu\overrightarrow{OA}=(1-\mu)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$$

所以C在AB上的条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\quad \lambda+\mu=1$$

其次，若C在线段$\overline{AB}$上，则在上面的推导中有$0\leqslant\mu\leqslant1$，从而C在线段$\overline{AB}$上的条件是

$$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\quad \lambda+\mu=1,\ \lambda,\mu\geqslant0$$

例 4 设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$是三个不共面的向量，

$$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$$

求点D在平面ABC上的条件与D在三角形ABC上的条件（见图1-14）。

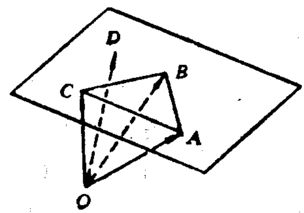

图1－14

解 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，而$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CB}$，因此

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{OC}+\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CB}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{CB}+(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OC}$$
$$=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$$

而$\lambda+\mu+\nu=1$。同理可以证明D在三角形ABC内的条件是$\lambda+\mu+\nu=1$，λ，μ，$\nu\geqslant0$

习　　题

1．求向量满足什么条件时，下列等式才能成立？

1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

3) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$　　4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　6) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

7) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　8) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$