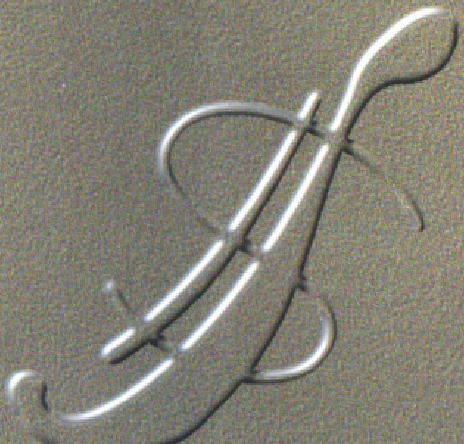
金融保险数学模型及最优决策方法

陈世平　张晓琪　著



中 南 大 学 出 版 社

封面设计：李星星

ISBN 7-81061-520-3

9 787810 615204 >

ISBN 7-81061-520-3/O·024
定价:18.00元

金融保险数学模型及最优决策方法

陈世平　张晓琪　著

中 南 大 学 出 版 社

金融保险数学模型及最优决策方法

陈世平　张晓琪　著

□责任编辑　谢贵良

□出版发行　中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路　邮编:410083

发行科电话:0731-8876770　传真:0731-8710482

电子邮件:csucbs@public.cs.hn.cn

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　湘潭大学印刷厂

□开　　本　850×1168 1/32　□印张 11.75　□字数 287 千字

□版　　次　2002 年 7 月第 1 版　□2002 年 7 月第 1 次印刷

□书　　号　ISBN 7-81061-520-3/O・024

□定　　价　18.00 元

前　　言

金融数学(亦称数理金融学)是金融经济学的数学化。金融经济学研究在不确定环境下经济资源的有效配置和流动,它的主要研究对象是在金融市场(特别是证券市场)上的投资、交易和风险管理。金融数学则是通过数学建模、理论分析、数值计算等定量分析,研究风险资产(包括衍生金融产品和金融工具)的定价、避险和最优投资消费策略的抉择。同时,数理金融学也可以理解为现代数学与计算技术在金融领域中的应用。这种金融技术已成为西方金融投资家手中的“超级武器”。1997 年以东南亚金融危机为的全球金融大风暴就显示了这个“超级武器”的威力,也引起了各国政府和金融界的高度重视和警惕。

数理金融学是一门新兴的交叉学科,发展较快,是目前十分活跃的前沿学科之一。但是,由于我国研究起步较晚,跟西方发达国家有不少差距。我们在本书介绍了金融保险数学模型及最优决策方法的一些最新成果,使有兴趣的读者尽快地到达该领域前沿并开展研究工作。

本书共八章。第一章介绍了随机分析的基本内容,这些内容对于从事金融数学的研究是非常必要的。第二章叙述了动态规划和 Hamilton - Jocobi - Bellmen 方程。本章是为以后各章作准备的。后几章内容基本上是独立的,读者可以根据需要选择部分内容去研习。

由于金融数学内容浩瀚,发展迅速,工具繁多,而本书篇幅有限,加以作者知识有限,所以在这一领域的很多内容在本书中

并未涉及，只能在此表示歉意。

在写作过程中，我们得到了北京大学金融数学系胡德焜教授的鼓励和帮助；湘潭大学陈振韬教授仔细阅读了本书的初稿，并提出了许多宝贵的修改意见。在此对他们以及被引用的文献的作者一并表示衷心的感谢。

成书过程仓促，不妥之处在所难免，希望阅读本书的读者们能够多多提出宝贵意见，作者不胜感激。

作者

目　　录

第1章
随机分析基础

随机分析在全书中将作为基本工具来使用.本章打算成为关于随机分析的一个便利的"用户指南",特别地,我们收集了那些分散在与随机控制相关文献中的随机分析的定义和结果.我们也统一了术语和记号(可能不同于个别的论文与书籍).在这章提出的结果的证明,要么就给出(当我们认为该证明在理解后文的材料时非常重要或当没有直接的文献可供利用的情况时),要么就参考有关书籍.有这方面知识的读者可跳过这一章或者将它作为参考文献.

1.1 概率

假设读者具有实分析的基本知识.

1.1.1 概率空间

定义 1.1.1 设集 Ω 非空,并且令 $\mathscr{F}\subseteq 2^{\Omega}$($2^{\Omega}$ 是Ω 的所有子集的集合),叫做类,它是非空的.我们称 $\mathscr{F}$ 为:

(i) π 系,如果 $A,B\in\mathscr{F}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{F}$.

(ii) λ 系,如果

$$\begin{cases}\Omega\in\mathscr{F},\\ A,B\in\mathscr{F},A\subseteq B\Rightarrow B\setminus A\in\mathscr{F},\\ A_i\in\mathscr{F},A_i\uparrow A,\ i=1,2,\cdots\Rightarrow A\in\mathscr{F}.\end{cases}$$

(iii) σ 域,如果

$$\begin{cases}\Omega \in \mathscr{F}, \\ A,B \in \mathscr{F}, B \setminus A \in \mathscr{F}, \\ A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathscr{F}.\end{cases}$$

如果 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是 Ω 上的两个 σ 域并且 $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$，则 $\mathscr{G}$ 称为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，显见 $\mathscr{F}$ 是 σ 域当且仅当它是 π 系也是 λ 系. 在以后，对任一类 $\mathscr{A} \subseteq 2^{\Omega}$，我们令 $\sigma(A)$ 是含 $\mathscr{A}$ 的最小的 σ 域，称之为由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 域.

下述结果称为单调类定理

引理 1.1.2. 设 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F} \subseteq 2^{\Omega}$. 假设 $\mathscr{A}$ 是 π 系并且 $\mathscr{F}$ 是 λ 系. 则 $\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{F}$.

证明 令

$$\hat{\mathscr{G}} \triangleq \bigcap \{\mathscr{G} \supseteq \mathscr{A} \mid \mathscr{G} \text{ 是 } \lambda \text{ 系}\} \subseteq \mathscr{F}.$$

则 $\hat{\mathscr{G}}$ 是含 $\mathscr{A}$ 的最小 λ 系. 置

$$\hat{\mathscr{F}} \triangleq \{B \in \hat{\mathscr{G}} \mid \forall A \in \mathscr{A}, A \cap B \in \hat{\mathscr{G}}\} \subseteq \hat{\mathscr{G}}.$$

显然，$\hat{\mathscr{F}}$ 也是 λ 系，并且由于 $\mathscr{A}$ 是 π 系，故 $\mathscr{A} \subseteq \hat{\mathscr{F}}$. 因此我们有 $\hat{\mathscr{G}} = \hat{\mathscr{F}}$. 现在让我们定义

$$\tilde{\mathscr{F}} \triangleq \{B \in \hat{\mathscr{G}} \mid \forall A \in \hat{\mathscr{G}}, A \cap B \in \hat{\mathscr{G}}\} \subseteq \hat{\mathscr{G}}.$$

$\tilde{\mathscr{F}}$ 还是 λ 系，并且由于 $\hat{\mathscr{G}} = \hat{\mathscr{F}}$，我们有 $\mathscr{A} \subseteq \tilde{\mathscr{F}}$. 从而 $\hat{\mathscr{G}} = \tilde{\mathscr{F}}$. 因此，对任意 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \hat{\mathscr{G}}$，关于 $\mathscr{B} \in \tilde{\mathscr{F}}$，我们有 $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \in \hat{\mathscr{G}}$. 这意味着 $\hat{\mathscr{G}}$ 也是 π 系，因此，$\hat{\mathscr{G}}$ 是一个 σ 域(它含 $\mathscr{A}$). 故 $\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \hat{\mathscr{G}} \subseteq \mathscr{F}$. $\square$

设 $\{\mathscr{F}_\alpha\}$ 是 Ω 上的一族 σ 域. 定义

$$\bigvee_{\alpha} \mathscr{F}_\alpha \triangleq \sigma\Big(\bigcup_{\alpha} \mathscr{F}_\alpha\Big) \tag{1.1.1}$$

和

$$\bigvee_{\alpha} \mathscr{F}_\alpha \triangleq \bigcap_{\alpha} \mathscr{F}_\alpha \tag{1.1.2}$$

容易证明，$\bigvee_{\alpha} \mathscr{F}_\alpha$ 和 $\bigwedge_{\alpha} \mathscr{F}_\alpha$ 都是 σ 域并且它们分别是包含所有 $\mathscr{F}_\alpha$ 的最小 σ 域和含于 $\mathscr{F}_\alpha$ 的最大 σ 域.

设 Ω 是非空集并且 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ 域. $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为测度空间. 点 $\omega \in \Omega$ 称为标本. 映射 $P: \mathscr{F} \to [0,1]$ 称为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率

测度,如果

$$\begin{cases} P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1; \\ A_i\in\mathscr{F}, A_i\cap A_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots,i\neq j, \\ \qquad \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \end{cases} \tag{1.1.3}$$

三元组合$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间.任一$A\in\mathscr{F}$称事件,并且$P(A)$表示事件A的概率.二个事件A和B称为独立的,如果$P(A\cap B)=P(A)P(B)$.事件A称为与σ域$\mathscr{F}$独立的,如果A与任意$B\in\mathscr{F}$独立.二个σ域$\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$称为独立,如果任意事件$A\in\mathscr{F}$与$\mathscr{G}$独立的.

如果事件A使得$P(A)=1$,则我们也可以将此事表示为

$$A \quad P.as\ 成立 \tag{1.1.4}$$

集/事件$A\in\mathscr{F}$叫做P零集/事件.如果$P(A)=0$,概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$叫做完备的,当$B\subset A$如果对任一P零集$A\in\mathscr{F}$,有$B\in\mathscr{F}$(因此,B也是P零集).

下面我们给出一个简单的例子.

例 1.1.3 设$\Omega=[0,1]$,$\mathscr{F}$是$[0,1]$中的所有 Lebesque 可测集的集合,并且P是$[0,1]$上的 Lebesgue 测度,则可以证明$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备的.设$x(\cdot):\Omega\to R$是连续函数并且定义事件$A=\{\omega\in\Omega\mid x(\omega)\geqslant0\}$.该事件的概率是

$$P(A)=\int_{\{\omega\in\Omega\mid x(\omega)\geqslant0\}}\mathrm{d}P(\omega).$$

对任给的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$,我们定义

$$\mathscr{N}=\{B\subset\Omega\mid\exists A\in\mathscr{F},P(A)=0,B\subseteq A\} \tag{1.1.5}$$

和$\hat{\mathscr{F}}\triangleq\mathscr{F}\vee N$.则对任意$\hat{\mathscr{A}}\in\hat{\mathscr{F}}$,存在$A,B\in\mathscr{F}$,使得$P(B)=0$,并且$\hat{A}\setminus A\subseteq B$,在这种情况下,我们定义$P(\hat{A})=P(A)$.这就将$P$推广到$\hat{\mathscr{F}}$.显然,$(\Omega,\hat{\mathscr{F}},P)$是完备的概率空间.任一概率空间可用上述扩张过程做成完备的概率空间.以后我们将假设任一

概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备的.

设$(\Omega,\mathscr{F})$和$(\Omega',\mathscr{F}')$是二可测空间且$F:\Omega\to\Omega'$是一个映射.映射f称为$\mathscr{F}/\mathscr{F}'$可测或简单可测,如果$f^{-1}(\mathscr{F}')\subseteq\mathscr{F}$.特别地,如果$(\Omega',\mathscr{F}')=(R^m,\mathscr{B}(R^m))$,则$f$称为$\mathscr{F}$可测(参考下面$\mathscr{B}(R^m)$的定义).

定义 1.1.4 我们有如下定义:

(i) 可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$叫做 Borel 同构于另一测空间$(\Omega',\mathscr{F})$,如果存在双射$f:\Omega\to\Omega'$,使得f和f^{-1}二者都是可测的.

(ii) 如果Ω是拓扑空间,则包含Ω的所有开集的最小σ域叫做Ω的 Borel σ 域,记作$\mathscr{B}(\Omega)$.

(iii) 可分的完备度量空间称为 Polish 空间.

(iv)可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$叫做标准的,如果它 Borel 同构于下者之一:$(\langle 1,n\rangle,\mathscr{B}(\langle 1,n\rangle))$,$(N,\mathscr{B}(N)$和$(M,\mathscr{B}(M))$,其中$\langle 1,n\rangle\triangleq\{1,2,\cdots,n\}$,$N\triangleq\{1,2,\cdots\}$,$M\triangleq\{0,1\}^N\equiv\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)\mid\omega_j=0,1\}$,分别在$\langle 1,n\rangle$和$N$上有离散拓扑,并且在$M$上有乘积拓扑.

(v)概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$叫做标准的,如果它是完备的并且$(\Omega,\mathscr{F})$是标准的可测空间.

(vi)可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$叫做可数确定的(或简单地称$\mathscr{F}$是可数确定的),如果存在可数集$\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}$,使得任意两个在$\mathscr{F}_0$相同的概率测度必(在$\mathscr{F}$上)相同.

命题 1.1.5 设Ω是 Polish 空间并且$\mathscr{F}=\mathscr{B}(\Omega)$,则

(i) $(\Omega,\mathscr{F})$是标准的并且它是可数确定的.

(ii) 对任意的$\Omega'\in\mathscr{F}$,设$\mathscr{F}'=\Omega'\cap\mathscr{F}\triangleq\{\Omega'\cap A\mid A\in\mathscr{F}\}$,则$(\Omega',\mathscr{F}')$是标准的.

(iii) $(\Omega,\mathscr{F})$Berel 同构于$(R,\mathscr{B}(R))$,如果Ω是不可数的.

1.1.2 随机变量

设$(\Omega,\mathscr{F})$和$(\Omega',\mathscr{F}')$是二个可测空间并且 $X:\Omega\to\Omega'$是$\mathscr{F}/\mathscr{F}'$可测映射.我们称 X 是一个 $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$ 随机变量,或者简单地称它是一个随机变量,如果将不会产生混淆的话.它被称为$\mathscr{F}$随机变量,当$(\Omega',\mathscr{F}')=(R^m,\mathscr{B}(R^m))$时.注意,定义随机变量的概念没有用到概率测度.对于随机变量 $X:\Omega\to\Omega'$,$X^{-1}(\mathscr{F}')$是$\mathscr{F}$的子 σ 域,它称为由 X 生成的σ 域,记作 $\sigma(X)$.在 X 可测的情况下,它是 Ω 中最小的σ 域.还有,如果$\{X_\theta,\theta\in\Theta\}$是从 Ω 到Ω'的随机变量族,则我们用

$$\sigma(X_\theta,\theta\in\Theta \triangleq \bigvee_{\theta\in\Theta}X_\theta^{-1}(\mathscr{F}')$$

来表示$\mathscr{F}$的最小子 σ 域,在此情况下,所有的 $X_\theta-(\theta\in\Theta)$都是可测的.

设 $X,Y:\Omega\to\Omega'$是二个随机变量,并且$\mathscr{G}$是 Ω 上的σ 域,则称 X 独立于$\mathscr{G}$,如果 $\sigma(X)$独立于$\mathscr{G}$,并且称 X 独立于 Y,如果$\sigma(X)$与 $\sigma(Y)$是相互独立的.

现在我们来检查随机变量的某些可测性性质,下面的结果与引理 1.1.2 紧密相关.

引理 1.1.6　设$\mathscr{A}$是 Ω 上的π 系,设$\mathscr{H}$是从 Ω 到R 的函数的线性空间,使得

$$\begin{cases}1\in\mathscr{H};I_A\in\mathscr{H},\forall A\in\mathscr{A};\\ \varphi_i\in\mathscr{H},0\leqslant\varphi_i\uparrow\varphi,\varphi\text{ 是有限的}\Rightarrow\varphi\in\mathscr{H}.\end{cases}\tag{1.1.6}$$

则$\mathscr{H}$包含所有从 Ω 到R 的$\sigma(A)$可测函数.

证明　令

$$\mathscr{F}=\{A\subseteq\Omega\mid I_A\in\mathscr{H}\},$$

则$\mathscr{F}$是含 $\mathscr{A}$的 λ 系.因此,根据引理 1.2,$\sigma(A)\subseteq\mathscr{F}$.

现在对任一 $\sigma(\mathscr{A})$可测函数 $\varphi:\Omega\to R$,我们令

$$\varphi_i = \sum_{j\geqslant 0} j2^{-i} I\{j2^{-i} \leqslant \varphi(\omega)^+ < (j+1)2^{-i}\}$$
$$\varphi_i = \sum_{j\geqslant 0} j2^{-i} I\{{}_j^{2-i} \leqslant \varphi(\omega)^+ < (j+1)^{2-i}\}$$
显然，$\varphi_i \in \mathscr{H}$并且$0 \leqslant \varphi_i \uparrow \varphi^+$. 从而根据假设，$\varphi^+ \in \mathscr{H}$. 同样地，$\varphi^- \in \mathscr{H}$. 因此 $\varphi \in \mathscr{H}$,这就证明了我们的结论. $\square$

在某些可测性条件之下，下面的结果用别的术语给出了一个随机变量的表示.

定理 1.1.7　设$(\Omega, \mathscr{F})$和$(\Omega', \mathscr{F}')$是二个测空间，并且设(U, d)是 Polish 空间. 设 $\xi: \Omega \to \Omega'$和$\varphi: \Omega \to U$ 是二随机变量，则 φ 是$\sigma(\xi)$可测的，即

$$\varphi^{-1}(\mathscr{B}(U))\xi^{-1}(\mathscr{F}') \tag{1.1.7}$$

当且仅当存在可测映射 $\eta: \Omega' \to U$,使得

$$\varphi(\omega) = \eta(\xi(\omega)), \forall\, \omega \in \Omega. \tag{1.1.8}$$

证明　我们只需证明必要性. 首先，我们假设 $U = R$，对这种情况，令

$$\mathscr{H} \triangleq \{\eta(\xi(\cdot)) \mid \eta: \Omega' \to U, \text{可测}\}.$$

则$\mathscr{H}$是线性空间，并且$1 \in \mathscr{H}$. 还有，如果 $A \in \sigma(\xi) \equiv \xi^{-1}(\mathscr{F}')$，则对某 $B \in \mathscr{F}$，$I_A(\cdot) = I_B(\xi(\cdot)) \in \mathscr{H}$. 现在假设 $\eta_i: \Omega' \to U$ 是可测的并且 $\eta_i(\xi(\cdot)) \in \mathscr{H}$,使得 $0 \leqslant \eta_i(\xi(\cdot)) \uparrow \zeta(\cdot)$，$\zeta(\cdot)$是有限的. 令

$$A = \{\omega' \in \Omega' \mid \sup_i \eta_i(\omega') < \infty\}.$$

则 $A \in \mathscr{F}$并且$\xi(\Omega) \subseteq A$. 定义

$$\eta(\omega') = \begin{cases} \sup\limits_i \eta_i(\omega') & \omega' \in A, \\ 0, & \omega' \in \Omega' \setminus A. \end{cases}$$

显然，$\eta: \Omega' \to U$ 是可测的并且$\zeta(\cdot) = \eta(\xi(\cdot))$，因此 $\zeta(\cdot) \in \mathscr{H}$. 根据引理 1.6,$\mathscr{H}$包含所有的 $\sigma(\xi)$可测随机变量，特别有 $\varphi \in \mathscr{H}$,

这就导致(1.1.8)式.这样对于 $U=R$ 的情况我们证明了结论.

现在设(U,d)是不可数 Polish 空间.根据命题 1.1.5-(ⅲ)和定义(1.1.4),存在双射 $f:U\to R$,使得 $f(\mathscr{B}(U))=\mathscr{B}(R)$.考虑映射 $\tilde{\varphi}=fo\varphi:\Omega\to R$,它满足

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\mathscr{B}(\mathscr{R}))=\varphi^{-1}of^{-1}(\mathscr{B}(\mathscr{R}))=\varphi^{-1}(B(U))\subseteq\xi^{-1}(\mathscr{F}')$$

因此存在 $\tilde{\eta}:\Omega'\to\mathscr{R}$,使得

$$\tilde{\varphi}(\omega)=\tilde{\eta}(\xi(\omega)),\ \forall\,\omega\in\Omega.$$

取 $\eta=f^{-1}o\tilde{\eta}$,我们得到所希望的结果.

最后,如果(U,d)是可数的或者有限的,我们用 N 或$\langle 1,n\rangle$来代替上面的 $\mathscr{R}$ 可以证明结果. □

其次,设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$(\Omega',\mathscr{F}')$是可测空间,并且 $X:\Omega\to\Omega'$是随机变量,则 X 诱导出一个在$(\Omega',\mathscr{F}')$上的概率测度 P_X 如下:

$$\begin{aligned}P_X(A')&\triangleq PoX^{-1}(A')\equiv P(X^{-1}(A'))\\&=P\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in A'\}\triangleq P\{X\in A'\},\\&\forall A'\in\mathscr{F}'.\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

我们称 P_X 为随机变量 X 的分布.在$(\Omega',\mathscr{F}')=(\mathscr{R}^m,\mathscr{B}(\mathscr{R}^m))$的情况下,$P_X$ 可由下面的函数惟一的确定:

$$F(x)\equiv F(x_1,\cdots,x_m)\triangleq P\{\omega\in\Omega\mid X_i(\omega)\leqslant x_i,1\leqslant i\leqslant m\}.\tag{1.1.10}$$

我们称 $F(x)$为 X 的分布函数.由于 $X=(X_1,\cdots,X_m)$,我们也称 $F(x)$为数值随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布函数.显然,$F(x)$是每个变量 $x_i\in R$ 的非负、非减函数,并且

$$\lim_{\substack{x_i\to 0\\ \exists i}}F(x)=0,\ \lim_{\substack{x_i\to\infty\\ \forall i}}F(x)=1,\tag{1.1.11}$$

而且,如果 P_x 是关于 lebesgue 测度绝对连续的,即对于任一 $N\in\mathscr{B}(\mathscr{R}^m)$,$|N|=0$($|N|$是 Lebesgue 测度),有 $P_X(N)=0$,则由 Radon-Nikodŷm 定理,存在(非负)函数 $f(\cdot)\in L'(\mathscr{R}^m)$,使

得

$$P_x(A)=\int_A f(x)dx, \forall A \in B(\mathscr{R}^m) \qquad (1.1.2)$$

特别地,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_m} f(\xi_1,\cdots,\xi_m)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_m. \quad (1.1.13)$$

函数 $f(x)$称为随机变量 X 的密度.作为特殊情况,如果 $f(x)$有下列形式:

$$f(x)=[(2\pi)^m \det C]^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^T C^{-1}(x-\lambda)}, x\in\mathscr{R}^m, \qquad (1.1.14)$$

其中 $\lambda\in\mathscr{R}^m$, $C\in\mathscr{R}^{m\times m}$并且 $C^T=C>0$.则我们说 X 有参数为(λ,C)的标准分布(记作 $N(\lambda,C)$),(以后我们会看出,λ 是标准分布的平均值而 C 是它的协方差矩阵).我们也称 $N(\lambda,C)$为 Gauss 分布并且 X 称为 Gauss 随机变量.

我们指出,有一个特别类型的随机变量,基础的概率空间$(\Omega,\mathscr{F})$具有某些特别的性质.例如,如果 Ω 是有限的或者可数的集合,则$(\Omega,\mathscr{F})$对接纳一个标准分布而言还不够丰富.

随机变量列$\{X_i\}$称作 $i.i.d.$,如果它们是相互独立的并且同分布的(即它们的分布函数相同).

现在设 $X:(\Omega,\mathscr{F},P)\rightarrow\mathscr{R}^m$ 是分布函数为 $F(x)$的随机变量.假设下述积分存在:

$$\int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}P(\omega)=\int_{R^m} x\mathrm{d}F(x)\triangleq EX. \qquad (1.1.15)$$

因此我们说 X 有平均值EX.我们也称 EX 为X 的(数学)期望.一个已知的随机变量不一定有平均值.我们也在集 $A\in\mathscr{F}$上定义平均值:

$$E(X:A)\triangleq\int_A X(\omega)\mathrm{d}P(\omega)=\int_{X(A)} x\mathrm{d}F(x)\equiv E[XI_A]. \qquad (1.1.16)$$