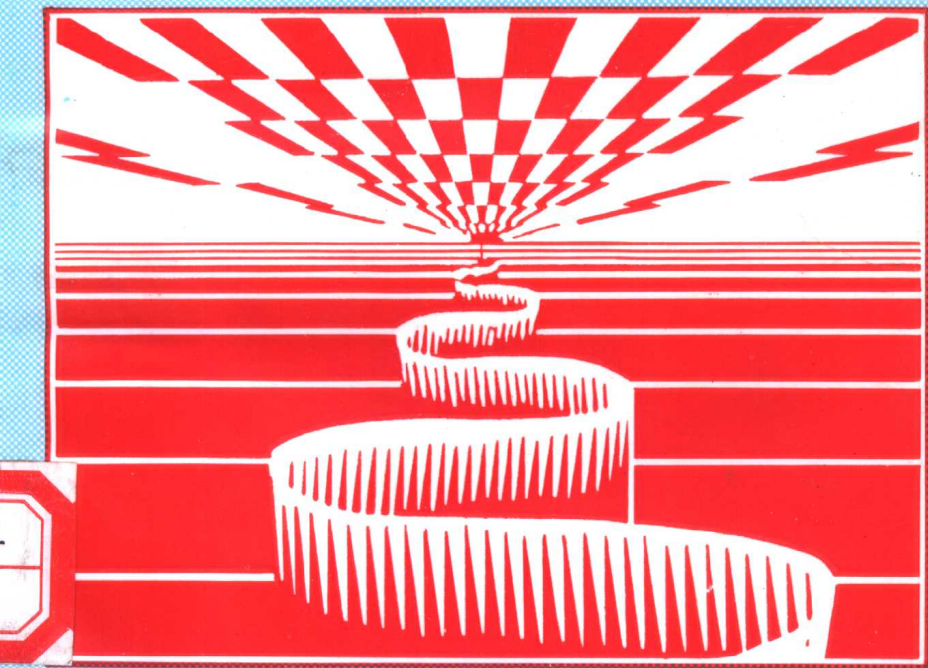


高等教育自学考试辅导丛书
黄 凤 山 主 编

高等数学 考试题型训练与解答



辽宁师范大学出版社

高等教育自学考试辅导丛书

黄 凤 山 主 编

高 等 数 学

考试题型训练与解答

分册主编 沈 青

编 者 刘丽杰 许敬业
白宏军 张 阳
曲 梅 安 波

辽宁师范大学出版社

(辽)新登字 18 号

高等教育自学考试辅导丛书

高等数学考试题型训练与解答

主 编:黄凤山
责任编辑:邢富钧
责任校对:云 梦
出版发行:辽宁师范大学出版社
社 址:大连市黄河路 850 号 电话:4211181—8549
印 刷:沈阳蓝盾印刷厂
经 销:新华书店
开 本:787×1092 1/32
字 数:200 千
印 张:9
印 数:0001—2000 册
版 次:1996 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 7-81042-080-1/G·31
定 价:全五册 75.00 元(本册 15.00 元)

(版权所有,翻印必究)

丛 书 前 言

为了帮助和指导参加高等教育自学考试₁的学员学好《大学语文》、《政治经济学》、《哲学》、《高等数学》和《普通逻辑》等五门公共课,提高运用所学知识的技能和技巧,增强考试取胜的能力和信心,我们根据国家教委最新发布的《高等教育自学考试命题工作规定》,并参照近年来上述五门学科考试要求和题型特点,设计、编写出版了《高等教育自学考试辅导丛书》,包括《大学语文考试题型训练与解答》、《政治经济学考试题型训练与解答》、《哲学考试题型训练与解答》、《高等数学考试题型训练与解答》和《普通逻辑考试题型训练与解答》。

丛书特点:一、与高教自考题同型,各书均按高教自考题型设计,解题明径,做到临场不慌;二、与自学同步,根据大纲和教材序列采取边自学边答卷,助学与练习紧密结合;三、与课后的练习相辅相成;四、作者均系主考院校的命题教师,各书模拟题题型设计目的明确,针对性、实用性强。

由于水平有限,各书中难免出现不妥,敬请广大学员、教师及有关专家指正,以便再版改正。

编 者

目 录

第一部分 基础训练

一、函 数	(1)
模拟试题一	(1)
答案及试题分析	(7)
二、极限与连续	(17)
模拟试题二	(17)
答案及试题分析	(24)
三、导数与微分	(36)
模拟试题三	(36)
答案及试题分析	(43)
四、中值定理及导数应用	(56)
模拟试题四	(56)
答案及试题分析	(63)
五、不定积分	(80)
模拟试题五	(80)
答案及试题分析	(89)
六、定积分	(102)
模拟试题六	(102)
答案及试题分析	(110)
七、无穷级数	(125)
模拟试题七	(125)

答案及试题分析.....	(133)
八、多元函数	(147)
模拟试题八.....	(147)
答案及试题分析.....	(157)
九、微分方程初步	(178)
模拟试题九.....	(178)
答案及试题分析.....	(181)

第二部分 综合训练

一、综合模拟试题一	(193)
答案及试题分析.....	(201)
二、综合模拟试题二	(219)
答案及试题分析.....	(224)
三、综合模拟试题三	(234)
答案及试题分析.....	(241)

一、函 数

考试大纲的基本要求

理解集合、函数的定义,了解函数的单调性、有界性、奇偶性与周期性;熟悉函数、反函数及复合函数及其定义域的求法;并要求掌握基本初等函数及经济学上常见的一些函数的导出、分析及其图形。

模拟试题一

一、单项选择题(在每小题的四个备选答案中选出一个正确的,并将其序号填在题干后的括号内。每小题1分,共20分)

1、设有集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 则有 ()

- (1) $A \supset B$ (2) $A \subset B$
(3) $A \cap B \supset B$ (4) $A \cap B \subset B$

2、若 $f(\frac{1}{x}) = (\frac{x+1}{x})^2$, 则 $f(x) =$ ()

- (1) $(\frac{x}{1+x})^2$ (2) $(\frac{1+x}{x})^2$
(3) $(1+x)^2$ (4) $(1-x)^2$

3、函数 $y = \sqrt{1-x^2} \ln(|x|+x)$ 的定义域是 ()

- (1) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (2) $(0, 1]$

(3) $[-1, 1]$

(4) $[-1, 0)$

4. 若 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, 则 $f[f(x)]$ 是

()

(1) $x + |x|$

(2) 0

(3) $\begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

5. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是 ()

(1) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

(4) $f(x) = 1, g(x) = x^0$

6. $f(x) = \log_a(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ 是 ()

(1) 偶函数 (2) 奇函数

(3) 既是奇函数又是偶函数

(4) 既不是奇函数也不是偶函数

7. 下列函数中是偶函数的有 ()

(1) $\frac{|x|}{x}$ (2) $x^2 \cdot \cos x$

(3) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ (4) $\log_a(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

8. 函数 $y = 2 - \lg(x + 1)$ 是 ()

(1) 单调增函数 ($x > -1$) (2) 单调减函数 ($x > -1$)

(3) 不是单调函数 ($x > -1$) (4) 是单调函数 ($x > -1$)

9. 设集合 $A = \{a_1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, b_3\}$, 则当 a_1, b_3 的值取 () 时, 有 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

(1) $a_1 = 1, b_3 = 2$ (2) $a_1 = 5, b_3 = 2$

$$(3)a_1 = 1, b_3 = 5 \quad (4)a_1 = 5, b_3 = 5$$

10、对任意一个非空集合 A , 恒有 ()

$$(1) A \cup \emptyset = \emptyset \quad (2) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(3) A \cup A = \emptyset \quad (4) A \cap A = \emptyset$$

11、点 x_0 的 δ 领域 ($\delta > 0$) 是区间 ()

$$(1) [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad (2) [x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$(3) (x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad (4) (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\text{若函数 } f(x) = |1+x| + \frac{(7-x)(x-1)}{|2x-5|},$$

则 $f(-2) =$ ()

$$(1) 4 \quad (2) 8$$

$$(3) -2 \quad (4) -4$$

13、设 $E = \{x|x \geq 0\}$, $F = \{x|x < 2\}$ 则 $E \cap F$ 是 ()

$$(1) \{x|x \geq 0 \text{ 或 } x < 2\} \quad (2) \{x|0 < x < 2\}$$

$$(3) \{x|0 \leq x \leq 2\} \quad (4) \{x|0 \leq x < 2\}$$

14、下列函数中, 非奇非偶的函数是 $f(x) =$ ()

$$(1) 1 + x^2 \quad (2) x + x^3$$

$$(3) |x| \quad (4) |x+1|$$

15、如果 $y = u^2$, $u = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 则将 y 表成 x 的函数是 ()

$$(1) \log_a x^2 \quad (2) \log_a^2 x$$

$$(3) 2\log_a x \quad (4) \log_a 2x$$

16、若 $f(x-1) = x(x-1)$, 则 $f(x) =$ ()

$$(1) x(x+1) \quad (2) (x-1)(x-2)$$

$$(3) x(x-1) \quad (4) \text{不存在}$$

17、设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

则 $g(x) = f(2x) + f(x-2)$ 是 ()

- (1) 无意义 (2) 在 $[0, 2]$ 上有意义
(3) 在 $[0, 4]$ 上有意义 (4) 在 $[2, 4]$ 上有意义

18、函数 $y = |\sin x|$ 的周期是 ()

- (1) 4π (2) 2π (3) π (4) $\frac{\pi}{2}$

19、函数 $y = \lg(x-1)$ 在区间 () 内有界

- (1) $(1, +\infty)$ (2) $(2, +\infty)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 3)$

20、函数 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 是 ()

- (1) 偶函数 (2) 奇函数
(3) 单调函数 (4) 有界函数

二、填空题(每小题1分,共10分)

1、设函数 $y = 1 + \ln x$ 的反函数是 _____

2、函数 $y = \frac{1}{|1-x|}$ 的定义域是 _____。

3、设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leq 0 \\ x-2 & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(1) =$ _____。

4、函数的 $f = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \lg(5-x)$ 的定义域是 _____。

5、函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域是 _____。

6、求出函数 $y = \sin x \cdot \cos x$ 的最小周期是 _____。

7、函数 $y = 3x - 2$ 的反函数是 _____, 它的图象关于 _____ 对称。

8、复合函数 $y = \lg(x - 1)$ 是由 _____ 复合而成的, 它的定义域是 _____。

9、设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{e} < x < 1 \\ x & 1 \leq x < e, \end{cases} \quad \varphi(x) = e^x,$

则 $f[\varphi(x)] =$ _____

10、设 $y = f(x) = 1 + \log_a(x + 3) \quad (a > 0)$

则 $y = f^{-1}(x) =$ _____

三、计算题(一)(每小题 4 分, 共 20 分)

1、求函数 $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-2)$ 、 $f(3)$ 、

2、求函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数。

3、判断函数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性

4、讨论函数 $y = \log_a x$ 的单调增减性

5、 $f(x) = \sin^2 x$ 是否为周期函数?

四、计算题二(每小题 5 分, 共 25 分)

1、讨论 $y = f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ 的单调性。

2、设 $f_n(x) = f\{f[\cdots f(x)]\}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

求: $f_n(x)$ 。

3、设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$

求: $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域。

4、已知 $f(\sin \frac{x}{2}) = \cos x + 1$, 求 $f(\cos \frac{x}{2})$

5、某商品供给量 Q 对价格 P 的函数关系为 $Q = Q(p) = a + bp$, 今知当 $p = 2$ 时, $Q = 30$; $p = 3$ 时, $Q = 50$; $p = 4$ 时, $Q = 90$, 求供给量 Q 对价格的函数关系。

五、应用题(每小题 8 分, 共 16 分)

1、某厂某产品产量为 q 件, 每销售 1 件收入为 50 元, 当月产量在 3000 以内时可以全部销售完, 当月产量超过 3000 件时, 经电视广告宣传后还可售出 1000 件, 每件平均广告费为 10 元, 生产再多就售不出去, 试将本月销售收入 R 表示为月产量 q 的函数。

2、某服装厂批发 2 万套某新款式西装给商业大厦, 目前该型号西装市场每套售价为 480 元。若该厂每次多批发 2 千套, 则市场上该型号西装, 每套将降低 15 元。现在该厂最多能批发给商业大厦 3 万套, 最少销售为 2 万套, 试写出这种服装的价格函数。

六、证明题(9 分)

设 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增函数,

证明: 若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$

则: $\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$

答案及试题分析

一、单项选择题

1、(4) 2、(3) $\because f(\frac{1}{x}) = (\frac{x+1}{x})^2$

$$f(x) = (\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x}})^2 = (\frac{1+x}{1})^2 = (1+x)^2$$

3、(2) 由 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ |x| + x > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$\therefore x \in (0, 1]$ 为函数的定义域。

$$\begin{aligned} 4、f[f(x)] &= \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x + |x|) + \\ &+ \frac{1}{2}(x + |x|)] = \frac{1}{4}[x + |x| + |x + |x||] \end{aligned}$$

$$\text{即 } f[f(x)] = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{故选(3)}$$

5、(1) $f(x) = x$ 的 $D_f = (-\infty + \infty)$ 而 $g(x) = (\sqrt{x})^2$ 的 $D_g = [0, +\infty)$ 故二者是不同的函数, (1) 排除。

(2) 虽然 D_f 与 D_g 都是 $(-\infty + \infty)$, 但二函数的对应规律不同; 如取 $x = -1$, $f(x) = -1$; $g(x) = \sqrt{(-1)^2} = |-1| = -(-1) = 1 \therefore (2)$ 也排除。

(3) $D_f = (-\infty, +\infty)$, $D_g = (-\infty, +\infty)$, 对应规律也相同, $\therefore$ 二者表示同一函数。故选(3)。

(4) $\because f(x) = 1$ $D_f = (-\infty + \infty)$, 而 $g(x) = x^0$ 它的定义域 $D_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 定义域不同, 应排除。

故本题选(3)。

$$\begin{aligned} & 6、\text{由于 } f(-x) = \log_a \sqrt{(-x)^2 + 1} - x \\ &= \log_a \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \log_a \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \log_a (\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x) \text{ 奇函数, 故选(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7、(1) \text{ 由于 } y = f(x) = \frac{|x|}{x}, f(-x) = \frac{|-x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} \\ &= -f(x) \text{ 奇函数;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2) \quad y = f(x) = x^2 \cos x, \quad f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) \\ &= x^2 \cos x = f(x) \quad \text{偶函数} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3) \quad y = f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \\ &= -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x) \quad \text{是奇函数。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (4) \quad y = f(x) = \log_a (\sqrt{x^2 + 1} + x) \quad f(-x) \\ &= \log_a x (\sqrt{(-x)^2 + 1} - x) \\ &= \log_a x \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \log_a x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= -\log_a x (\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x) \text{ 奇函数} \quad \text{故选(2)} \end{aligned}$$

$$8、y = 2 - \lg(x+1) = f(x), \quad Df = (-1, +\infty)$$

设 $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ 令 $-1 < x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} & f(x_1) - f(x_2) = 2 - \lg(x_1 + 1) - [2 - \lg(x_2 + 1)] \\ &= \lg\left(\frac{x_2 + 1}{x_1 + 1}\right) > 0 \quad (\because \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1} > 1) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

$\therefore y = 2 - \lg(x+1)$ 在 $(-1, +\infty)$ 是单调减函数, 故选(2)

$$9、(1)\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,2\} = \{1,2,3,4\}$$

$$(2)\{5,2,3,4\} \cup \{1,3,2\} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$(3)\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5\}$$

$$(4)\{5,2,3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{选(1)}$$

10、由定义知选(2)

11、 (4)

$$12、f(-2) = |1-2| + \frac{(7+2)(-2-1)}{|-4-5|}$$

$$= 1 + \frac{9(-3)}{9} = -2 \quad \text{选(3)}$$

13、 (4)

$$14、1 + (-x)^2 = 1 + x^2 \quad \text{偶函数；}$$

$$-x + (-x)^3 = -(x + x^3) \quad \text{奇函数；}$$

$$|-x| = |x| \quad \text{偶函数}$$

只有 $|-x+1| \neq |x+1|$ 也 $\neq -|x+1|$ 是非奇非偶 选(4)

15、 (2)

$$16、由 f(x-1) = x(x-1), \quad \text{设 } x-1 = u$$

$$\text{即 } f(u) = (u+1)u$$

$$\text{即 } f(x) = x(x+1) \quad \text{故 } f(x) = (1)$$

$$17、\therefore f(2x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{而 } f(x-2) = \begin{cases} 1 & 2 \leq x \leq 3 \\ 2 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

即 $g(x) = f(2x) + f(x-2)$ 在 $[0, 2]$ 上无意义。选

(1)

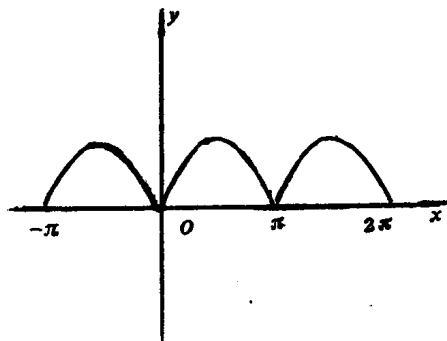
$$18. \quad y = f(x) = \begin{cases} \sin x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ -\sin x & (2n-1)\pi < x < 2n\pi \end{cases}$$

$\sin x$ 的 $T_1 = 2\pi; \dots (-4\pi, -3\pi), (-2\pi, -\pi), (0, \pi), (2\pi, 3\pi) \dots$
 $-\sin x$ 的 $T_2 = 2\pi; \dots (-3\pi, -2\pi), (-\pi, 0), (\pi, 2\pi) \dots$ 二值相等。

故 $y = |\sin x|$ 的周期

是 (3) $T = \pi$

19. $y = \lg(x-1)$ $Df = (1, +\infty)$ 其在 Df 内有限区间内有界, 故在 (4) 内有界。



$$20. \because (x-1)^2 \geq 0 \quad \text{即 } x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\text{故 } |f(x)| = \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 = M \quad \text{是有界函数。}$$

二、填空题

1. $y = e^{x-1}$ ($y = 1 + \ln x$, $\ln x = y - 1$ $x = e^{y-1}$)
 故反函数 $y = e^{x-1}$

2. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ($\because |1-x| \neq 0$ 即 $x \neq 1$)

3. -1 ($\because 1 > 0$ 故 $F(1) = x - 2|_{x=1} = -1$)

$$4. [2, 3) \cup (3, 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x-2 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 5-x > 0 \end{array} \right. \quad \text{即} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \neq 3 \\ x < 5 \end{array} \right.$$

定义域: $[2, 5)$ 且 $x \neq 3$ 即 $Df = [2, 3) \cup (3, 5)$

$$5. [-3, -2] \cup [3, 4] \quad \left(\left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 \end{array} \right. \right.$$

$$\text{即} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -2 \\ -3 \leq x \leq 4 \end{array} \right. \quad Df = [-3, -2] \cup [3, 4]$$

$$6. \pi \quad (y = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x)$$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$7. y = \frac{x+2}{3} y = x; \quad (1, +\infty)$$

$$8. y = \lg u, \quad u = x-1; \quad (1, +\infty)$$

$$9. \quad \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ e^x & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (\because f(x) =$$

$$\begin{cases} 1 & \frac{1}{e} < x < 1 \\ x & 1 \leq x < e \end{cases}$$

$$\therefore f[\varphi(x)] = \begin{cases} 1 & \frac{1}{e} < \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & 1 \leq \varphi(x) < e \end{cases} \quad \text{又由于 } \varphi(x) = e^x$$

$$\text{所以 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} 1 & \frac{1}{e} < e^x < 1 \\ e^x & 1 \leq e^x < e \end{cases}$$