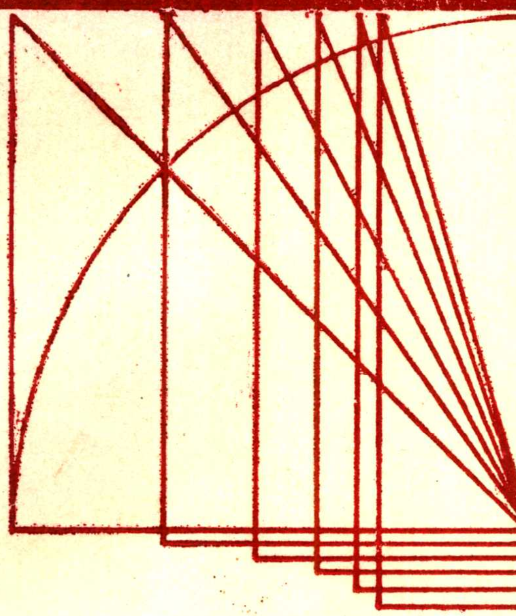
下

高等数学导论

GAODENG SHUXUE DAOLUN

中国科学技术大学
高等数学教研室 编



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是由中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，在三十年的使用过程中，经过不断的修订、充实而成的。与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际，深入浅出。为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题。

本书分三册出版。上册讲述单变量函数微积分，中册讲述空间解析几何、多变量函数微积分，下册讲述级数与常微分方程。本书另配习题集一册。

下册内容包括无穷级数，含参变量的积分，富里叶分析，线性微分方程共四章。

本书可作理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学。

高 等 数 学 导 论

下 册

中国科学技术大学高等数学教研室 编

责任编辑：刘卫东 封面设计：盛琴琴

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32 印张：7 字数：180千

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数：1-5000册

ISBN7-312-00083-5/O·36 定价：1.45元

目　　录

第九章　无 穷 级 数

客观世界是千变万化的，仅用初等函数难以完全描述它的各种复杂的数量关系。由于初等函数的有限次运算仍是初等函数，因此为了产生新的非初等函数，必须考虑无限次运算。而最简单的运算是加法，这就导致无穷级数的出现。本章先叙述数项级数及其收敛性判别；进而研究函数项级数，并引出它的特殊形式幂级数；最后讨论如何把函数展开成泰勒级数。

第一节　数项级数

9.1.1　无穷级数的基本概念

设

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

是给定的一个数列。将它的各项依次相加所得的和式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为无穷级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，其中第 n 项 a_n 称为级数的通项。

作级数的部份和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

可得另一个数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots.$$

如果当 n 无限增大时，S_n 趋向于一个有限的极限 S，即

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

则称无穷级数收敛而有和S，并写成

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots;$$

如果当n无限增大时，S_n不趋向于一个极限，就称无穷级数发散。

由此可见，无穷级数的收敛问题归结为其前n项的和组成的数列$\{S_n\}$的极限存在问题；反之，研究数列$\{a_n\}$的极限存在问题也可以化成级数

$$a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+\cdots$$

的收敛问题。数列与级数之间存在的这种密切关系，使得我们能够应用已经知道的有关数列的知识去建立无穷级数的相应理论。

例 1 最简单的无穷级数是等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots.$$

如果公比$|q|\neq1$，则级数的部份和为

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

当$|q|<1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}aq^n=0$，推知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$，因此这时等比级数收敛，其和为$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|>1$时，由于$\lim\limits_{n\to\infty}aq^n=\infty$，推知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，因此等比级数发散。

如果$|q|=1$，则当$q=1$时，等比级数成为

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots,$$

于是$S_n=na$趋于无穷，级数发散；当$q=-1$时，等比级数成为

$$a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots,$$

当n是偶数时，级数的部份和为零，而n是奇数时，部份和为a，就是S_n不趋向于一个极限，所以级数发散。

例 2 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots.$$

因为这个级数的部份和为

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1),$$

显然当 n 趋向无穷时，S_n 也趋向无穷，所以它是发散级数。

从定义可知，**在级数前面加上有限项或去掉有限项，不会影响级数的敛散性**。为确定起见，考虑下面两个级数

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots,$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_n + \cdots,$$

其中第二个级数是由第一个去掉前两项得到的。若用 S_n 记第一个级数的前 n 项和，用 T_n 记第二个级数的前 n 项和，则有

$$T_{n-2} = S_n - (a_1 + a_2),\ S_n = T_{n-2} + (a_1 + a_2).$$

由此看出，T_{n-2} 与 S_n 或同时具有极限，或同时没有极限。在有极限时，这两个级数的和 T 与 S 是不同的，其间关系为 $T = S - (a_1 + a_2)$。

收敛的无穷级数具有一些有限和的性质。

设级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

都收敛，且和为 S 与 T。而 c 是任意常数，则级数

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots,$$

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

也收敛，且和分别为 cS 与 $S \pm T$。

这是因为后面两个级数的部份和是

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = cS_n$$

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n \pm T_n,$$

当 n 趋于无穷时，它们分别以 cS 与 $S \pm T$ 为极限。

依序把收敛级数的任意几项作为一组先行相加后所成的级数仍收敛，且和不变。就是加法的结合律对收敛的级数也成立。

事实上，设级数

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots$$

收敛而和为S，按某一规律依序结合后所成的级数为

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots.$$

如果用S_n和T_n分别表示这两个级数的部份和，则容易看出，数列

$$T_1,T_2,\cdots,T_n,\cdots$$

就是数列$\{S_n\}$的子列

$$S_3,S_5,\cdots,S_m,\cdots,$$

因而它们有同一的极限S。这里m为T_n中所含a_k的最大下标。

由此又得到，若依序结合后所成的级数发散，则原来的级数也发散。因若收敛，则依序结合后的级数就应收敛了。

最后指出级数收敛的一个必要条件。

任何收敛级数的通项a_n当n无限增大时必趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

事实上，若记收敛级数的部份和S_n的极限为S，则由于

$$a_n=S_n-S_{n-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

由此可见，如果级数的通项a_n不趋于零，则它一定是发散的。但是通项趋于零并不是级数收敛的充分条件，有的级数即使通项趋于零，仍可能是发散的。如例2，它的通项$\ln\dfrac{n+1}{n}$趋于零而级数却是发散的。

9.1.2 正项级数

怎样判别一个级数是否收敛呢？先讨论最简单的所谓正项级

数，即它的每一项都是非负的。这时级数的部份和 S_n 就构成一个单调增加的数列

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots,$$

因此当 n 无限增大时，S_n 或者无限增大，或者有上界 M。在前一情形，级数发散于正无穷；在后一情形，级数收敛于和 S（$\leqslant M$）。从而就得到了正项级数敛散性的基本判别法则。

定理 1　正项级数收敛的充分必要条件是它的部份和有界。

例 1　证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛。

证　因为级数的部份和是有界的

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &\leqslant 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\ &= 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 2+1-\frac{1}{n}<3, \end{aligned}$$

所以所给级数是收敛的。稍后就会知道，它的和就是自然对数的底 e。

例 2　证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

证　根据上面的定理，只要证明这个正项级数的部份和无界。为此，依序把它的部份和 S_{2^k} 的一项，两项，四项，…，2^{k-1} 项结合在一起，则有

$$\begin{aligned} S_{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) \\ +\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right). \end{aligned}$$

显然，结合后的各项大于和数

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$$

的对应项。而后者的和为 $1+\frac{k}{2}$。由此可知，当 k 无限增大时，S_{2^k} 也无限增大，就是调和级数的部份和 S_n 是无界的，所以它是发散级数。

例 3 进而考虑一般的 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

其中 p 是一个任意常数。现在要证明当 $p\leqslant 1$ 时级数发散；当 $p>1$ 时级数收敛。

事实上，若 $p\leqslant 1$，这时级数的每一项不小于调和级数的对应项$\left(\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\right)$，所以它的部份和是无界的，因此当 $p\leqslant 1$ 时级数发散，

若 $p>1$，与调和级数发散的证明类似。依序把 p 级数的部份和 S_{2^k-1} 的一项，两项，四项，…，2^{k-1} 项结合在一起，则有

$$S_{2^k-1}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^p}\right).$$

由于结合后的各项小于和数

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^p}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots+\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}$$

的相应项，但后者的和显然不超过公比为$\frac{1}{2^{p-1}}$的等比级数的和

$$M=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}},$$

因此 S_{2^k-1} 有上界M。于是就不难推知 p 级数的任意部份和也以M为上界，所以当 $p>1$ 时级数收敛。

应用定理 1 直接证明某些正项级数的部份和有界通常是不容易的，这时可用一个已知其敛散性的级数同它进行比较便能方便地得出结论。

定理 2（比较判别法）设给定两个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \qquad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots, \qquad (B)$$

如果从某项开始成立 $a_n\leqslant b_n$，则当级数(B)收敛时，级数(A)也收敛；反之，当级数(A)发散时，级数(B)也发散。

证 因为去掉级数前有限项并不改变级数的敛散性质，故不失一般性可设不等式 $a_n\leqslant b_n$ 对一切 n 成立。用 S_n 与 T_n 分别表示级数(A)与(B)的部份和，就有

$$S_n\leqslant T_n.$$

若级数(B)收敛，则其部份和 T_n 有上界M，即 $T_n\leqslant M$，从而更有 $S_n\leqslant M$。所以级数(A)收敛。

反之，若结论不成立，即级数(B)收敛，则可推知级数(A)

亦必收敛，这与级数(A)发散的假设矛盾，因此级数(B)发散。

例 4 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}$收敛。

证 由于对任意的自然数 n 成立

$$\frac{(n!)^2}{2n!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}\leqslant\frac{1}{2^n},$$

而等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，所以原级数收敛。

例 5 证明级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$是发散的。

这是因为当 $n\geqslant 2$ 时有不等式 $\ln n<n$，所以从第一项就成立

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}.$$

但调和级数是发散的，故原级数发散。

作为比较判别法的推论，再来导出更为适用的比值判别法。

定理 3 如果两个正项级数(A)与(B)的通项之比当 n 无限增大时的极限存在且是不为零的有限数，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0,$$

则级数(A)与(B)同收敛，同发散。

证 由假设可知，对正数 $\varepsilon=\frac{k}{2}$，必存在这样的自然数N，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\frac{k}{2},$$

或写成

$$\frac{1}{2}kb_n<a_n<\frac{3}{2}kb_n.$$

若级数(B)收敛，则以常数$\frac{3}{2}k$乘级数(B)的各项后所得的级数也收敛。从而由比较判别法得级数(A)收敛；若级数(B)发散，则以常数$\frac{1}{2}k$乘级数(B)的各项后所得的级数也发散，所以级数(A)发散。同样从级数(A)的敛散性可导出级数(B)的敛散性。

例 6 研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$的敛散性。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1,$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$是收敛的，故所给级数收敛。

例 7 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$是发散的。这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$$

故由调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散推知原级数也发散。

如果把已给的级数与等比级数进行比较，立即得到在应用上极为方便的柯西判别法与达朗贝尔（D′Alembert）判别法。

定理 4 设给定正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$

若存在小于1的正数 q，使从某项起有 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant q$，则级数收敛；反之，若从某项起有 $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，则级数发散。

证 由 $\sqrt[n]{a_n}\leqslant q$ 得 $a_n\leqslant q^n$。但 $0<q<1$，所以等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛。故依比较判别法知级数收敛。又若 $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$ 得 $a_n\geqslant 1$，因此当 n 无限增大时，通项 a_n 不趋向于零，故级数发散。

可是，在实际判别级数的敛散时，常用的是这个法则的极限形式。

柯西判别法 **设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项 a_n 的 n 次根存在极限 q，即**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则当 $q<1$ 时级数收敛；当 $q>1$ 时级数发散。

事实上，若 $q<1$，则可选定一个这样小的正数 ε，使得 $q+\varepsilon<1$。因为当 n 充分大时，$\sqrt[n]{a_n}$ 与 q 之差小于 ε，就是从 n 的某个足够大的值起有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon<1,$$

故由定理4推知级数收敛。若 $q>1$，则可选定这样小的正数 ε，使得 $q-\varepsilon>1$。因为当 n 充分大时，$\sqrt[n]{a_n}$ 与 q 之差大于 $-\varepsilon$，就是从 n 的某个足够大的值起成立

$$\sqrt[n]{a_n}>q-\varepsilon>1,$$

即 $a_n>1$，故由定理4推知级数发散。

必须注意，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，则对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性不能下任何断语。例如取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，这时 $\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 当 n 趋向无穷时

的极限是1，所对应的调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的；但若取$a_n=\frac{1}{n^2}$，这时$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$的极限也是1，而所对应的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$却是收敛的。

例 8 级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$是收敛的。

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1.$$

例 9 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$是发散的。

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1.$$

定理 5 设有正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$

若存在小于1的正数q，使从某项起有$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q$，则级数收敛；反之，若从某项起有$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$，则级数发散。

证 不失一般性，设不等式$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q$对一切$n$值成立，于是就有

$$a_n\leqslant qa_{n-1},\quad a_{n-1}\leqslant qa_{n-2},\cdots,a_2\leqslant qa_1.$$

由此，逐步代入可得

$$a_n\leqslant a_1q^{n-1},$$

就是这级数的项不大于公比小于1的等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}$的对应项，故由比较判别法推知级数收敛。又若$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$，并设它对一切$n$值都成立，这时就有

$$a_n\geqslant a_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant a_2\geqslant a_1,$$

显然通项a_n不趋向于零，于是级数发散。

同样，这个判别级数敛散性的法则也有它的极限形式。

达朗倍尔判别法　若正项级数的后项与前项之比的极限存在且为q，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则当$q<1$时级数收敛，$q>1$时级数发散。

证明方法与柯西判别法完全类似，就不在此叙述了。但应注意，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，则对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性也不能下任何断语。仍以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$为例，前者是发散的，后者是收敛的，但它们的后项与前项之比的极限都为1。

例 10　证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$收敛。

这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{2}{n}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1.$$