ZhXShX

中学数学丛书

秦裕瑗

一元代数方程纵横谈

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

中学数学丛书

一元代数方程纵横谈

秦裕瑗

湖北教育出版社

中学数学丛书
一元代数方程纵横谈
秦裕瑗
•
湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
潜江县印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本　4.75印张　1插页　107,000字
1984年8月第1版　1984年8月第1次印刷
印数：1—21,000
统一书号：7306·81　定价：0.50元

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》。本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》．根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深．编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得．

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系．同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示．丛书对教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　　录

第一章 一般代数方程求根问题

由 n 次多项式与零组成的等式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad ①$$

叫做 n 次（代数）方程，其中 a_0、a_1、$\cdots a_n$ 都是常数，而且 $a_0\neq0$.

如果方程①中所有常数 a_0、a_1、$\cdots a_n$ 都是实数，就叫做实系数方程．只要有一个常数是虚数，就叫做复系数方程．

以文字为系数的方程叫做一般方程，当系数都是具体的数时，叫做数值方程．

有一个数 α，代入到方程①中，能够使等式成立，也即 α 能使左端多项式等于零，就说 α 是方程①的一个根（或解）．

求出给定方程的根的手续叫做解方程．

本章里，我们将讨论求解一般的一、二、三、四、五次方程问题．在最后一节里，还介绍代数基本定理．

在论证过程中，我们常以实系数情形为主，然后，再讨论相应的复系数方程所发生的问题．

§1. 求解四则应用题的两种方法

求解四则应用题，有两种方法．一种是算术方法，另一种是代数方法，主要是利用解代数方程的方法．

这两种方法之间是怎样的关系呢？我们用一个具体的例来说明：

大树一棵值150元，小树一棵值70元．某学校进行绿化，买树100棵，恰好花了13,000元．问买大、小树各几棵？

这是一个鸡兔同笼的变型．不妨叫做买树问题．

用算术方法来求解是这样做的：

(i) 假设全部都买大树，应花150元×100，即15,000元；

(ii) 实际只花了13,000元，所以比(i)的假设，多花了15,000元－13,000元，即2,000元；

(iii) 之所以多花2,000元是因为实际上这100棵树中不都是大树，其中有一部份是小树；

(iv) 用一棵大树换一棵小树，可少花150元－70元，即80元；

(v) 要少花2,000元，只要以大树换小树若干棵，每换一棵少花80元，所以要换2,000÷80＝25(棵)．

所以，在这100棵树中，有25棵小树，其余75棵当然就是大树．

问题解出来了．

下面用代数方法来求解：

设一共买小树x棵，从而买大树$100-x$棵．买小树共花$70x$元，买大树共花$150(100-x)$元，总共花了13,000元，所以有

$$150(100-x)+70x=13,000. \qquad ①$$

现在用等式的各种恒等变换来解方程①．把左端括号乘开，得

$$150\times 100-150x+70x=13,000, \qquad ②$$

移项，得

$$15,000-13,000=150x-70x. \qquad ③$$

即

$$2,000=80x, \tag{④}$$

得

$$x=25 \tag{⑤}$$

所以有25棵小树，75棵大树. ■*

比较这两种方法，就看到，式②的左端的第一项就是(i)，式③、④的左端就是(ii)，而式④的右端x的系数80就是(iv)，由式④到式⑤就是(v).

用算术方法求解时，每前进一步，人们都要利用相应的实际意义. 而用代数方法求解时，则不同，人们根据实际意义建立方程之后，直到求出答案，整个作恒等变换的过程中是不必考虑实际意义的.

我们还能把上面的买树问题用代数方法写下一般的形式：

大树每棵值a元，小树每棵值b元($a>b$)，买了大、小树共c棵，一共恰好花d元. 问大、小树各买几棵？

设小树有x棵，大树有$c-x$棵，于是有方程

$$a(c-x)+bx=d. \tag{⑥}$$

移项得

$$ac-d=(a-b)x,$$

所以

$$\text{小树棵数}=x=\frac{ac-d}{a-b}, \tag{⑦}$$

于是

$$\text{大树棵数}=c-x=\frac{d-bc}{a-b}. \tag{⑧}$$

我们可以根据这两个公式，用所给的具体数字代入相应的

* 这是一个符号，表示解完、证毕、告一段落等.

a、b、c、d，求出相应的解答．

不仅如此，我们还可以利用这两个公式来为用算术方法求解问题时提供基本的思路．我们可以用式⑦求小树的棵数：分式$\frac{ac-d}{a-b}$中，

ac 表示买 c 棵大树的费用——这就是(i)；

$ac-d$ 表示超过实际化去的费用——这就是(ii)；

$a-b$ 表示用大树换小树少花的费用——这就是(iv)；

$\frac{ac-d}{a-b}$ 确实就是小树的棵数——这就是(v)．

通过对上面的买树问题以及各种四则应用题的讨论，表明代数方法运算简洁、能够建立求解公式、还能为算术方法提供基本思路，它比算术方法优越得多．还有许多应用题，远不是算术方法所能解决的．因此，我们在中学所学习的代数学，主要就是研究解代数方程的理论和方法，是非常值得我们学习的课程．研究各种应用问题时，这是人们必备的基本知识之一．

§2. 一般一次方程的根的存在问题

买树问题的一般形式已如上述．我们可以利用上节的方程⑥及公式⑦、⑧来求解各个具体的买树问题．下面讲四个例：

假若，$a=150$，$b=70$，$c=100$，$d=13,000$．

代入上节方程⑥求解(或代入公式⑦、⑧)，即得小树 25 棵，大树 75 棵．这是上节一开始所讲的例．

若有　$a=150$，$b=70$，$c=100$，$d=15,000$．

即可解得小树零棵，大树 100 棵．这个答案当然是有意义的．

已知　$a=150$，$b=70$，$c=100$，$d=13,100$．

解得小树$23\frac{3}{4}$棵，大树$76\frac{1}{4}$棵．这样的答案理应不能算作是合理的，因为树的棵数是整数．

已知　$a=150$，$b=70$，$c=100$，$d=15,400$．

解得小树 -5 棵，大树 105 棵．作为一个实际问题来说，也是没有意义的．

上面解题的顺序是常规的，它是先解出方程(或取一个数代入方程)，得到方程的根之后，再把根拿到问题中检验，看它有无实际意义．

其实，更为合理的做法应该是：根据题意，把它的所有数量关系以及对数量上的要求一次全部抽取出来．我们应该在求解方程(上节的方程⑥)的同时，就明确指出，未知数是非负整数，写作

$$\begin{cases} a(c-x)+bx=d, \\ x\text{是非负整数}. \end{cases}$$

或者说：

"在非负整数范围内，解 $a(c-x)+bx=d$"．

我们再举一个例．

例　今年，父亲 56 岁，母亲 51 岁，他们的儿子 29 岁．问几年后，(i) 母亲的岁数与儿子的岁数之比是 5∶3？(ii) 父亲的岁数是儿子的两倍？

解：这是年龄问题．

(i) 设 x 是所求的年数．它当然应该是正整数．根据题意，有

在正整数范围内，解方程

$$(51+x):(29+x)=5:3, \qquad ①$$

得

$$5(29+x)=3(51+x),$$

展开，得

$$145+5x=153+3x,$$

移项

$$2x=8,$$

即

$$x=4.$$

答案是：4年后．那时，母亲55岁，儿子33岁．两者之比果真是5：3．

(ii) 设y是所求的年数．根据题意，有

在正整数范围内，解方程

$$56+y=2(29+y). \qquad ②$$

对于方程②，展开右端

$$56+y=58+2y,$$

所以

$$y=-2.$$

可是，-2不是正整数．应该说，本问题没有解．就是说，从今年起，随着年岁的增大，不可能在某一年，会发生父亲的年龄恰好是儿子的两倍这件事．

当然，有读者会说，这个答案是可以理解的，-2是指两年前．但是，这并不是题意所要求的．

求解一般一次方程

$$ax+b=0, \quad (a\neq 0) \qquad ③$$

这是读者都会做的事．方程的根，可以通过系数a与常数b作四则运算而得到，它是$-\frac{b}{a}$.

但是，在今后，由于求解实际问题的需要，以及理论上的

兴趣，我们更关心的首先是一般一次方程③在指定范围内有没有根的问题，也就是在指定范围内根的存在问题；然后，如果有根，才是问它等于多少.

当 a、b 都是整数时，方程在整数范围内是不一定有根的．例如

$$3x-1=0,$$

它就没有整数根(解).

不过，当 a、b 都是有理数时，方程在有理数范围内，总是有根的，因为由有理数 a、b 通过四则运算（加减乘除），所得结果仍是有理数．同样，当 a、b 是实数时，在实数范围内，方程③总是有根的.

§3. 一般二次方程的代数解

与一次方程相比较，求解一般二次方程要复杂得多．为了解决这个问题，人们需要先学习因式分解和根式，需要学习求解一些方程组．还要学习复数概念、函数概念以及解析几何等等．这些分别在初中、高中数学课本中已经讲了，我们就不一一重复叙述了.

我们当然能够记得下面的一些概念：

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a}$ 是一个正数，它的平方恰好等于 a．当然，负数 $-\sqrt{a}$ 的平方也等于 a．所以，对于一个正数 a，有两个符号相反的实数，它们的平方都等于 a．我们把这两个实数都叫做 a 的平方根，而 $\sqrt{a}$ 叫做正数 a 的算术平方根，简称为算术根.

当 $a=0$ 时，有 $\sqrt{a}=0$．这时，0只有一个平方根．有时，为了讲起来方便，说0也有两个相等的平方根0.

当$a>0$时，$\sqrt[n]{a}$是一个正数，它的n次方恰好等于a，我们把$\sqrt[n]{a}$叫做a的n次算术根．

当$a=0$时，有$\sqrt[n]{a}=0$．

当$a<0$、n是奇数时，规定$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$．

我们还能够记得，$\sqrt{-1}$，即i，是虚数单位．如果a，b是实数，$a+bi$叫做是一个复数，常写作z，即

$$z=a+bi,$$

a、b分别叫做复数z的实部与虚部．

如果$b=0$，z是实数．

如果$b\neq0$，z叫做虚数．

如果$a=0$，z叫做纯虚数．

对于复数$z=a+bi$，我们把$a-bi$记作$\bar{z}$，叫做z的共轭数．显然有

$$z+\bar{z}=2a,\quad z\cdot\bar{z}=a^2+b^2.$$

我们规定，若a是负数，$\sqrt{a}=\sqrt{-a}\,i$．

我们要用到数的开平方根．

对于一个正数a，我们在初中二年级就已经学会了开平方根的笔算方法．

现在，我们来讨论一般二次方程

$$ax^2+bx+c=0, \tag{①}$$

其中a、b、c都是已知的实数或复数．为了要求它的解，我们可以把①的左端的二次三项式．在复数范围内，用配方法进行分解因式：

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\cdot\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right],$$

这里，b^2-4ac 是一个数，记作 Δ_2：$\Delta_2=b^2-4ac$．如果 Δ_2 是一个实数且 $\geqslant 0$，则 $\sqrt{\Delta_2}$ 是非负实数，否则 $\sqrt{\Delta_2}$ 是虚数．于是，方程①变为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0. \qquad ②$$

显然，用 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 替代②中的 x，也即代入①中的 x，能使等式成立．所以，它是一般二次方程①的一个根(解)，记作 x_1：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad ③$$

同样，$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 也是方程①的一个根(解)，记作 x_2：

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad ④$$

我们还可以把这两个根统一用一个式子写作

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad ⑤$$

有时，为了方便起见，还简记作

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

若 a、b、c 都是实数，

如果　$\Delta_2>0$，则方程①有两个不相等的实根；