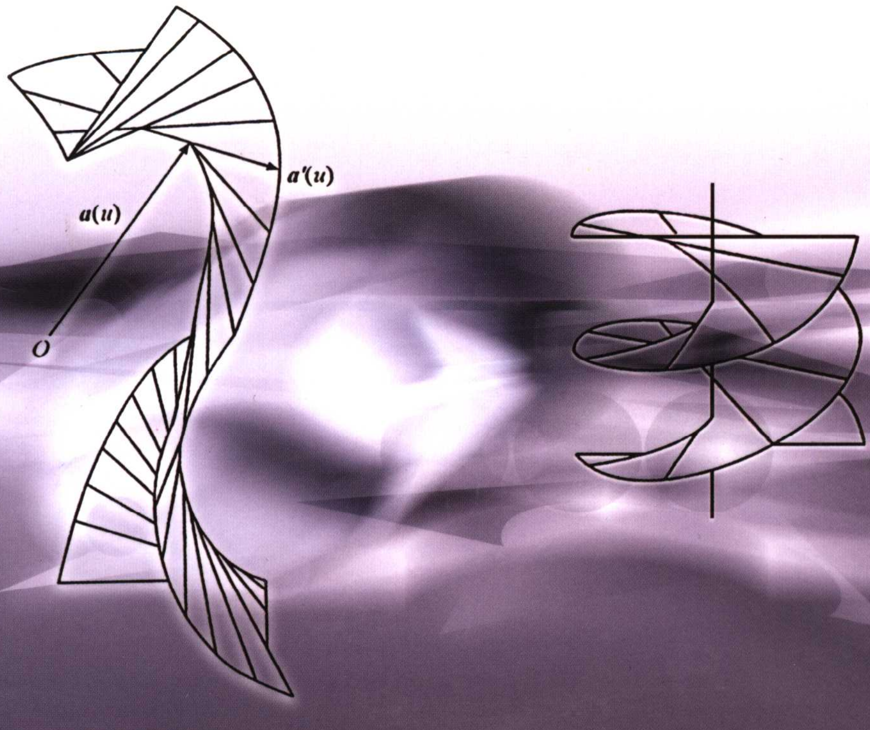
21世纪高等院校教材

计算机辅助几何造型技术

莫蓉 吴英 常智勇 编著



科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

计算机辅助几何造型技术

莫　蓉　吴　英　常智勇　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

计算机辅助几何造型技术是复杂曲面设计的基本技术，它所依赖的数学基础是微分几何。本书较全面介绍了计算机辅助几何造型技术的基础知识，包括：曲线曲面论的基本知识、样条曲线与曲面、贝齐尔曲线与曲面、B样条曲线与曲面、非均匀有理B样条(NURBS)曲线与曲面、曲线曲面求交算法、曲线曲面光顺等。

本书是面向高等学校非数学类专业的本科生教材，如机械工程及自动化、航空宇航设计与制造等，也可供高等学校师生及有关工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助几何造型技术/莫蓉，吴英，常智勇编著. —北京：科学出版社，2004.2

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-011926-6

Ⅰ.计… Ⅱ.①莫… ②吴… ③常… Ⅲ.计算机辅助设计 Ⅳ.TP391.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第072140号

责任编辑：钟 谊 段博原／文案编辑：邱 璐 贾瑞娜
责任校对：朱光光／责任印制：安春生／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年2月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年2月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1—2 500 字数：200 000

定价：18.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

《计算机辅助几何造型技术》是计算机辅助设计与计算机辅助制造的基础课程,在机械、航空、航天、船舶、汽车、家电制造等行业均有广泛的用途。计算机辅助几何造型技术是用数学理论描述自由曲线和曲面的一种有效方法,它是计算机设计复杂曲面的算法基础,也是三维数字化技术的基础之一。目前国内、国际流行的著名大型 CAD /CAM 集成软件都使用了先进的几何造型曲面方法。

本书主要内容分为 7 章。第一章介绍曲线曲面论的基本知识,读者可以从中了解矢量代数基础,曲线曲面的基础,直纹面和可展曲面。第二章重点讲述样条曲线与 Coons 曲面,包括三次样条函数、参数样条曲线、Ferguson 曲线和孔斯曲面,并且给出应用例子。第三章讲述最常用的贝齐尔曲线与曲面,主要包括:贝齐尔曲线的定义与性质、贝齐尔曲线的几何作图法、贝齐尔曲线的合成、贝齐尔曲线的升阶和降阶、贝齐尔曲面、贝齐尔曲面的合成、贝齐尔曲线曲面的应用。第四章讲述 B 样条曲线和曲面基础,包括 B 样条曲线的定义与性质、三次均匀 B 样条曲线、三次均匀 B 样条曲线的插值、双三次 B 样条曲面、B 样条曲面的应用。第五章讲述非均匀有理 B 样条曲线与曲面,介绍非均匀 B 样条曲线与曲面的定义、性质和配套技术。第六章介绍曲面求交的常用算法,包括曲面求交的分类与基本方法,分割算法、迭代法、追踪法。第七章介绍曲线曲面光顺,包括曲线曲面光顺的基本概念、曲线光顺方法和曲面光顺方法,主要是各种算法的原理和步骤。每一章均附有习题,可供读者练习时使用。

作为非数学类本科生教材,本书省略了大量的数学推导和证明,考虑到目前曲线和曲面技术的广泛应用,以讲解基本理论和基本概念为主,希望学生在使用本教材后,能够对计算机辅助几何造型技术有一个较为深入地了解,对当前流行的 CAD 软件中曲线曲面造型的功能不仅知其然而且知其所以然。《计算机辅助几何造型技术》课程学时约为50～60 学时,其中有“*”的章节可作为选修内容。

本书由莫蓉主编,其中第一章、第二章、第四章由吴英编写,第三章由莫蓉编写,第五章、第六章、第七章由常智勇编写。

本书承蒙孙文焕教授主审,孙教授在审阅过程中为本书提出了许多宝贵意见;另外本教材能得以较快正式出版与科学出版社及西北工业大学教务处、教材科的大力支持是分不开的,在此一并向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中的错误不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正，作者将不胜感激。

编　者

2004年1月

目　　录

第一章　曲线曲面的基本知识

在计算机辅助设计与制造中，微分几何中的许多知识是基础，常用到如曲线曲面用矢函数表示，曲线曲面上的切矢、法矢、二阶导矢和曲率，需要构造切平面、法平面和等距面等等。如在加工中用球头刀加工曲面时，刀心轨迹和被加工表面都是等距面问题。而欲构造等距面，就必须计算切矢、法矢。又如在两段或更多段曲线(曲面)要达到光滑拼接时，常要求两者达到位置、切矢、曲率连续；为防止数控加工中发生过切，要求在切触点处工件的曲率半径大于刀具的曲率半径；在数据处理中，应使曲率连续变化，等等；这些都需要计算曲率。因此学好本章的内容可为后面掌握曲线、曲面造型技术奠定良好的基础。

本章主要叙述矢量代数基础、曲线论基本公式、曲面论预备知识、直纹面与可展曲面。

1.1　矢量代数基础

1.1.1　矢量

1. 矢量表示

矢量：既有大小又有方向的量，又称为向量，如速度、加速度等。

位置矢量：如图 1-1 从原点 O 到 A 点连线 $\overrightarrow{OA}$ 表示一个矢量，用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{OA}$ 表示。$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示三个坐标轴的基本矢量，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \quad \text{(矢量 } \boldsymbol{a} \text{ 的坐标表示)}\\ &= [a_1, a_2, a_3] \quad \text{(矢量 } \boldsymbol{a} \text{ 的数组表示)}\end{aligned} \tag{1-1}$$

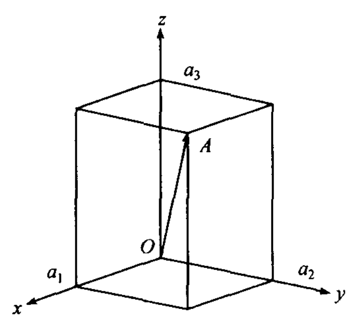


图 1-1　位置矢量

常矢量：大小和方向不变的矢量。

变矢量：大小和方向变化的矢量。

矢量的模：矢量的长度(或大小)称为它的模。例如：矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$。

单位矢量：长度等于 1 的矢量称为单位矢量，用 $\boldsymbol{E}$ 表示，$\boldsymbol{E} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

2. 两矢量的数积

两个矢量的数积(或称内积、点积)为一个标量。已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 两个矢量, $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]$, $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]$,则这两个矢量的内积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{1-2}$$

其中 θ 为两个矢量的夹角,当 $\theta=90°$时, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$。

性质:

1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。

2) 设 λ 为一个常数,则满足 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$。

3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$。

3. 两矢量的矢积

两个矢量的矢积(或称外积、叉积)还是一个矢量,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。其特点是:

1) $\boldsymbol{c}$ 的方向同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,且按右手法则。

2) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ (矢积值为以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积)。

3) 若 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,a_3]$, $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,b_3]$

则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{1-3}$$

性质:

1) 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都为非零矢量,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$。

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$。

4. 三个矢量的混合积

三个矢量的混合积,即二个矢量的矢积与一个矢量作数积,记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{1-4}$$

其混合积的绝对值为平行六面体的体积,并且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$。

5. 三个矢量的二重矢积

已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 三个矢量,则这三个矢量的二重积还是一个矢量

$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{1-5}$$

1.1.2 直线的矢量方程

如图 1-2 所示，已知直线 l 上一点 P_0 径矢为 $\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{v}$ 为平行于直线 l 的任意固定不为零的矢量，若 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ 为直线上任意一点 P 的径矢，λ 为常数，则直线 l 的方程可写成

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}_0 \quad -\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty \tag{1-6}$$

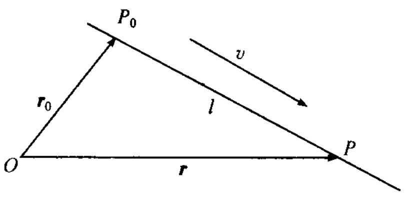


图 1-2 直线

1.1.3 平面的矢量方程

设已给平面 π 上任意一个定点 P_0 的径矢为 $\boldsymbol{r}_0$ 和与平面 π 垂直的任意不为零固定的矢量 $\boldsymbol{n}$。若 $\boldsymbol{r}$ 为平面 π 上任意一点 P 的径矢，则 $\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，如图 1-3 所示，则有 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$，这就是平面 π 的方程。

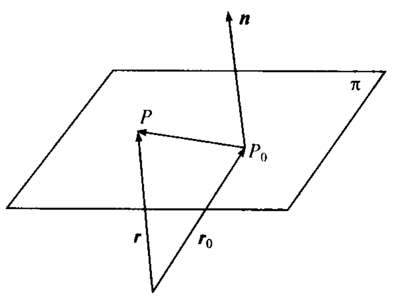


图 1-3 平面

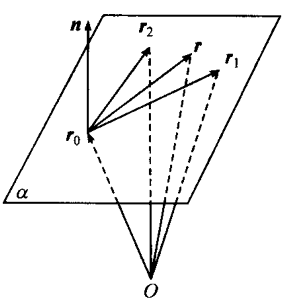


图 1-4 求平面方程例题

例 1-1 已知一平面内不在同一直线上的三个点 P_0,P_1,P_2，它们的径矢为 $\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$，求此平面的方程。

解 如图 1-4 所示，设 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$ 在平面 α 上且不在同一直线上，矢量 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0$ 也在平面 α 上，则此平面的法矢为 $\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)$。

设点 P 为平面 α 上任意一点径矢为 $\boldsymbol{r}$，则此平面的方程为 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)]=0$，化简后得所求的平面方程为

$$\boldsymbol{r}\cdot[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0)]=\boldsymbol{r}_0\cdot(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)$$

1.2 曲 线 论

对于飞机、汽车及其他一些具有复杂外形的产品，计算机辅助设计与制造的一

个关键性环节，就是用数学方法来描述它们的几何形状，并在此基础上建立它们的几何模型。为了解决应用中的实际问题，我们需要了解一些微分几何知识，如曲线，曲面的矢函数表示等。

1.2.1 曲线的矢量方程和参数方程

图 1-5 中设空间一点 P 的位置矢量有三个坐标分量，若对应 $t\in[t_0,t_1]$里的每一个 t，点 P 随变量 t 变化，点 P 的运动轨迹是一条空间曲线，也就是空间矢量端点运动形成的矢端曲线。其矢量方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t)\\ &=[x(t),y(t),z(t)]\end{aligned}$$

此式又称为单参数 t 的矢函数。

它的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t) \qquad t\in[t_0,t_1]\\ z=z(t)\end{cases} \tag{1-7}$$

一般地，给定一个具体的单参数的矢函数，即给定一个具体的参数曲线方程，它既决定了所表示曲线的形状，也决定了该曲线上的点与参数域（参数的取值范围）内的点（即参数值）之间的一种对应关系，如图 1-6 所示。

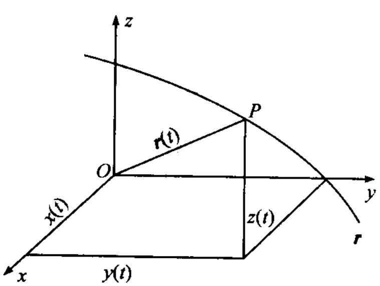


图 1-5 曲线上一点 P 表示参数 t 的矢函数

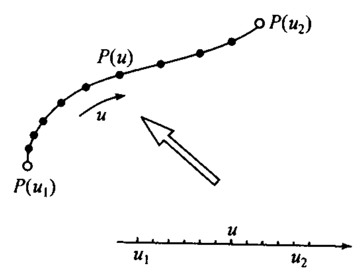


图 1-6 曲线上的点与参数域内的点的对应

在参数方程中的参数可以不具有几何意义，并且参数的选取是不惟一的。

例 1-2 如图 1-7 所示，已知圆柱螺旋线的半径为 a，圆柱高度为 L，动点 P 作圆周运动的转动角速度为 ω，沿 z 轴作直线运动的线速度为 v，运动的时间为 t，求圆柱螺旋线矢量方程和参数方程。

解 首先选取起始平面的圆心 O 为坐标原点，过动点的起始位置 P_0 作 x 轴，建立右手坐标系 $Oxyz$。然后，连接原点 O 到动点的任一位置 P，得矢量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}$的端点轨迹是螺旋线，则它的矢端曲线方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HN}$$
$$= a\cos\omega t\boldsymbol{i} + a\sin\omega t\boldsymbol{j}$$
$$\overrightarrow{NP} = vt\boldsymbol{k}$$

所以螺旋线矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos\omega t\boldsymbol{i} + a\sin\omega t\boldsymbol{j} + vt\boldsymbol{k}$$
$$= [a\cos\omega t, a\sin\omega t, vt]$$

它的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \qquad t \in \left[O, \dfrac{L}{v}\right] \\ z = vt \end{cases}$$

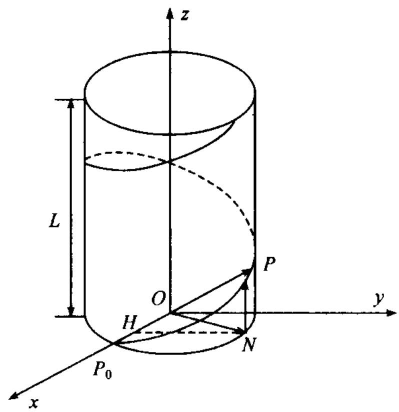


图 1-7 螺旋线

1.2.2 矢函数的导矢及其应用

1. 矢函数的求导

曲线上的点是参数 t 的矢函数,对曲线求导也就是对矢函数的求导,即对曲线参数 t 求导,它等于对各个分量分别对参数 t 的求导。在形式上和标量函数相同,设矢函数

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \tag{1-8}$$

$\boldsymbol{r}(t)$在区间$[t_1, t_2]$上连续,有 t_0 和 $t_0 + \Delta t(\Delta t \neq 0)$都在这个区间里,若极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} \tag{1-9}$$

存在,则 $\boldsymbol{r}(t)$称为在 t_0 是可微的,这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 的导矢,用 $\boldsymbol{r}'(t_0)$或 $\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0}$ 表示

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)_{t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t} \tag{1-10}$$

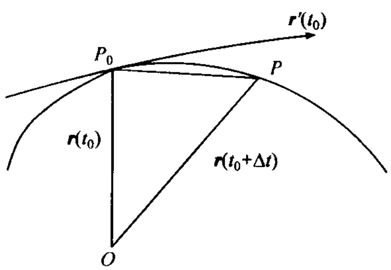


图 1-8 矢函数的导矢

导矢具有极其重要的几何意义。如图 1-8 所示。设 P_0 是曲线上固定点,P 为沿曲线趋于 P_0 时,曲线弦 P_0P 有极限位置,即为曲线在 P_0 的切线。$\boldsymbol{r}'(t_0)$则称为曲线在 P_0 点的切矢。

若 $\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$,在区间$[t_1, t_2]$上是可微的,则称它为在这个区间里是可微的。矢函数 $\boldsymbol{r}'(t)$称为 $\boldsymbol{r}(t)$的导矢。有

$$\boldsymbol{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)] \tag{1-11}$$

曲线采用参数表示后，就有了方向。曲线的方向对应于曲线上参数增加的方向。曲线在一点的方向即曲线在该点的切线方向，也就是曲线在该点的切矢的方向。

对矢函数求导就等于对矢函数各个坐标分量求导，矢函数的导矢还是矢函数。因此，矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导矢 $\boldsymbol{r}'(t)$ 有大小和方向，$\boldsymbol{r}'(t)$ 方向是切线的方向，切矢和各阶导矢都是相对矢量，可以在空间任意平移。$\boldsymbol{r}'(t)$ 大小为 $|\boldsymbol{r}'(t)|$，即

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2} \tag{1-12}$$

2. 矢函数的求导公式

矢函数的求导公式有：

$$C'=0 \quad (C\text{ 为常矢量}) \tag{1-13}$$

$$[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}'_1(t)+\boldsymbol{r}'_2(t) \tag{1-14}$$

$$[K\boldsymbol{r}(t)]'=K\boldsymbol{r}'(t)(K\text{ 为常数}) \tag{1-15}$$

$$[f(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)]'=f'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)+f(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) \tag{1-16}$$

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}'_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}'_2(t) \tag{1-17}$$

$$[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'=[\boldsymbol{r}'_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]+[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}'_2(t)] \tag{1-18}$$

高阶导矢

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}''(t)=[x''(t),y''(t),z''(t)]\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{r}^{(n)}(t)=[x^{(n)}(t),y^{(n)}(t),z^{(n)}(t)]\end{gathered} \tag{1-19}$$

对于复合函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \qquad t=\varphi(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\boldsymbol{r}'(t)\varphi'(u) \tag{1-20}$$

3. 导矢在几何上的应用

(1) 曲线上任一点的切线方程和法平面方程

设已知曲线方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，如图 1-9 所示，求曲线上任一点 P_0 处 $\boldsymbol{r}(t_0)=[x_0,y_0,z_0]$ 的切线方程和法平面方程。

① 求过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程

因为曲线方程为 $\boldsymbol{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$，故曲线 P_0 点的切矢为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=[x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)]$$

则曲线在 P_0 的切线方程为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(t_0) \tag{1-21}$$

其中 $\boldsymbol{R}=[x_1,y_1,z_1]$ 为切线上任一点 M 的径矢，λ 为切线上的参数。

过 P_0 点切线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda x'(t_0) \\ y_1 = y_0 + \lambda y'(t_0) \\ z_1 = z_0 + \lambda z'(t_0) \end{cases} \tag{1-22}$$

消去 λ，故过 P_0 点切线方程又可写为

$$\frac{x_1 - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y_1 - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z_1 - z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{1-23}$$

② 求过 P_0 点的法平面方程

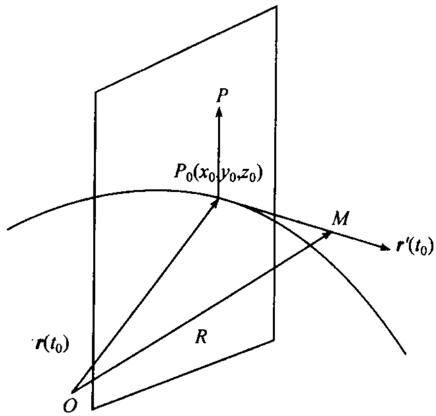


图 1-9　曲线上任一点的曲线和法平面

经过 P_0 点而垂直于切线的每一条直线，称为曲线在 P_0 的法线。所有这些法线位于经过 P_0 点而垂直于切线的平面上，这个平面称为曲线在 P_0 点的法平面。

设 P 为法平面上一点，如图 1-9 所示，所以过 P_0 点法平面的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}'(t_0) \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0$$

即

$$\boldsymbol{r}'(t_0) \cdot [\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t_0)] = 0 \tag{1-24}$$

或

$$x'(t_0)[x_1 - x(t_0)] + y'(t_0)[y_1 - y(t_0)] + z'(t_0)[z_1 - z(t_0)] = 0 \tag{1-25}$$

(2) 平面曲线的等距线

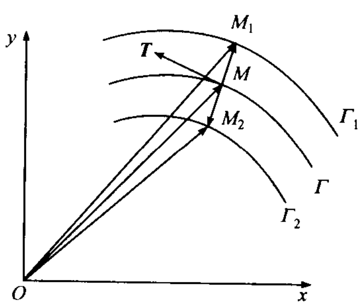


图 1-10　等距线

先给出等距线的定义：已知一条曲线 Γ，沿曲线每一点的法线方向移动一段距离 a，得到一组新点的轨迹 Γ_1 和 Γ_2，称为曲线 Γ 的等距线，如图 1-10 所示。

等距线在 CAD/CAM 中的应用比较广泛，例如在数控铣床加工零件时，铣刀中心轨迹和零件外形相差一个铣刀半径的距离。理论外形曲线，相应地也有结构内形曲线，它们只相差一个蒙皮厚度或零件的壁厚。这些都是等距线在生产实际中的应用。

设已知曲线 Γ 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t),\ y(t)]$$

求法向距离为 a 的等距线方程。

建立坐标系 Oxy，从图 1-10 中可知