流体力学题解

下册

J.F. 道格拉斯 著

陈康民 郑荣根 应启戛
谷传纲 吉永明 黄为民 译

上海机械学院动力系

一九八五年

目　录

第 一 章　量纲分析……………………………………………………………………………(1)

第 二 章　动力相似……………………………………………………………………………(10)

第 三 章　旋转运动及径向流动………………………………………………………………(23)

第 四 章　流线与流函数………………………………………………………………………(31)

第 五 章　静止气体……………………………………………………………………………(43)

第 六 章　运动气体……………………………………………………………………………(54)

第 七 章　层　　流……………………………………………………………………………(68)

第 八 章　湍　　流……………………………………………………………………………(80)

第 九 章　水锤现象……………………………………………………………………………(96)

第 十 章　明渠非均匀流………………………………………………………………………(121)

第十一章　蓄水池问题…………………………………………………………………………(136)

第十二章　冲击式水轮机和反击式水轮机……………………………………………………(142)

第十三章　液压机械……………………………………………………………………………(162)

第十四章　往复式泵……………………………………………………………………………(168)

第十五章　离心式风机与泵……………………………………………………………………(176)

第一章　量纲分析

1.1 校核方程——1.2 压力波的速度——1.3 ——1.4 管流——1.5 部分浸没物体的阻力——1.6螺旋浆的推力——1.7布金汉（Buckingham）定理——Π定理

量纲分析是解决流体力学问题的一种极有价值的教学方法。如上册所述，所有的方程都可以用某些基本量表示。这些基本量在力学中即为长度（L），质量（M）和时间（T）。例如

力＝质量×加速度

＝质量×长度/时间

因此，力的量纲为MLT^{-2}

在任何一个描述实际物理现象的方程中，方程的每一项含有的基本量（L、M和T)的阶次必须相同。换言之，同类的项必定能与同类的项相比较，否则，即使数值上平衡的方程，仍然是无意义的。

量纲相同的原则可以用来（1）校核方程建立得是否正确，（2）确定与某些变量有关的方程的形式，（3）帮助分析实验结果。

1.1 用量纲分析方法证明密度为ρ的流体，沿流线的无摩擦流动的方程

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gz=H$$

是压力p、速度v及基准点以上高度z之间的一个可能关系式，並确定常数H的量纲。

解　如该方程表述了一个物理上可能的关系，则每一项必须具有相同的量纲，即所含基本量L、M、和T的幂次相同。

采取的步骤是首先确定用L、M、和T表示的每一个变量的量纲，然后考察方程中每一项的量纲

变量的量纲为：

$$压强p=\frac{力}{面积}=\frac{质量\times加速度}{面\quad积}=ML^{-1}T^{-2}$$

$$质量密度\rho=\frac{质量}{体积}=ML^{-3}$$

$$速度v=\frac{长度}{时间}=LT^{-1}$$

离基准点高度$z=L$

重力加速度$g=LT^{-2}$

左边每一项的量纲为

$p=ML^{-1}T^{-2}$

$\frac{1}{2}\rho v^2=ML^{-3}\times L^2T^{-2}=ML^{-1}T^{-2}$

$\rho gz=ML^{-3}\times LT^{-2}\times L=ML^{-1}T^{-2}$

各项具有相同的量纲。如果常数H也具有量纲$ML^{-1}T^{-2}$,则该方程在物理上是可以成立的。

1.2可以认为流体中压力的传递速度由流体弹性（以体积模数K表示）和它的质量密度ρ决定。试用量纲分析确定这些量之间的可能关系式。

解 假设一个简单的指数方程

$$v=CK^a\rho^b \qquad (1)$$

其中C是常数，a和b为未知因次。

变量的量纲为：速度$v=LT^{-1}$，体积模量$K=ML^{-1}T^{-2}$，质量密度$\rho=ML^{-3}$。如方程（1）是正确的，则a和b必须能使方程两边包含M、L和T的相同因次，常数c是纯数。用各变量的量纲代替各变量本身，即可将方程（1）改写为

$$LT^{-1}=M^aL^{-a}T^{-2a}\times M^bL^{-3b}$$

两边的L、T、M的因次分别相等，得到

$$0=a+b$$

$$1=-a-3b$$

$$-1=-2a$$

由此可以得到 $a=\frac{1}{2}$和$b=-\frac{1}{2}$

因此一个可能的方程是$v=C\sqrt{K/\rho}$，该结果可以与9.4结果比较之。

量纲分析给出了方程的一个可能形式，但常数c的值必须由实验确定。

1.3证明当流体流经几何相似的管道时，压力损失的理论公式为

$$p=\frac{\rho l v^2}{d}\phi\left(\frac{vb\rho}{\eta}\right)$$

其中d是管道直径，l是管道长度，ρ是质量密度，η是流体的动力粘性系数，v是流体通过管道的平均速度，φ表示某个函数关系。

解 假设$p=C\rho^a l^b v^c d^e \eta^f$，其中c是常数，a、b、c、e，f是未知因次

方程中各变量的量纲为：$p=ML^{-1}T^{-2}$，$\rho=ML^{-3}$，$l=L$，$v=LT^{-1}$，$d=L$和$\eta=ML^{-1}T^{-1}$。

对方程进行量纲代换得到

$ML^{-1}T^{-2}=M^aL^{-3a}\times L^b\times L^cT^{-c}\times L^e\times M^fL^{-f}T^{-f}$令M、L和T的因次相等，可以得到：

$$1=a+f$$

$$-1=-3a+b+c+e-f \qquad (2)$$

$$-2=-c-f \qquad (3)$$

这里有五个未知量，三个方程，因此只能解出三个未知量，这三个未知量的解中包含了其余二个未知量。实际上可以根据经验决定哪三个未知量先解出来。在考察某些问题时，方程的最终形式（指用哪三个量作为自变量）往往会给出一些启发，从而使人们挑选正确的形式。在本题中，显然求出ρ、v、d的幂次a、c、e是较为合适的。

从方程（1）得 $a=1-f$

从方程（3）得 $c=2-f$

从方程（2）得 $e=-1+3a-c-b+f$
$=-f-b$

将这些值代入原始方程后得到

$$p=C\rho^{1-f}l^{b}v^{2-f}d^{-f-b}\eta^{f}$$
$$=C\rho v^{2}\left(\frac{l}{d}\right)^{b}\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)^{-f}$$
$$=\frac{\rho v^{2}l}{d}C\left(\frac{l}{d}\right)^{b-1}\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)^{-f}$$

对几何相似的管道而言，$\frac{l}{d}$是常数。$\left(\frac{l}{d}\right)^{b-1}$可以合并在c中，令$K=C\left(\frac{l}{d}\right)^{b-1}$

$$p=\frac{\rho l v^{2}}{d}K\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)^{-f}$$

因为K和f是已知的，所以可简单地写成

$$p=\frac{\rho l v^{2}}{d}\phi\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right) \qquad (4)$$

将此结果与达西（Darcy）公式比较是很有趣的。

$$h_f=4f\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}$$

由方程（4）得到$h_f=\frac{P}{\rho g}=\frac{l v^2}{dg}\phi\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)$

这表明达西系数f一定是管道雷诺数$\rho vd/\eta$的函数，这已经为更传统的方法所证明（见第一部分）

1.4 流体流经几何相似管道时压力损失的理论公式是

$$=\frac{\rho l v^{2}}{d}\phi\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)$$

水在直径50mm管道中以0.6m/s流动时损失水头为（每一百米长度）800mm水柱高。试计算空气以“相应速度”流经直径为200mm，长为400m的管道时的损失水头。（以mm水柱表示）。假定管道几何相似且空气及水的密度分别为1.23及1000kg/m³。绝对粘度分别1.8 $\times10^4$及1.2×10^{-2}（泊）

解 例1.3中用量纲分析得到的公式$p=\frac{\rho l v^{2}}{d}\phi\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)$是没有用处的，因为函数$\phi\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)$是未知的。但是，可以用它来比较几何相似且具有相同雷诺数$\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)$的管道的压降。因为此时

$$\phi\left(\frac{\rho_1 v_1 d_1}{\eta_1}\right)=\phi\left(\frac{\rho_2 v_2 d_2}{\eta_2}\right)$$

则压降比简化为

$$P_1/P_2=(\rho_1/\rho_2)(l_1/l_2)(v_1^2/v_2^2)(d_2/d_1)$$

将在第二根管道中的速度（该速度使第二根管内的雷诺数与第一根管内的雷诺数相等）视作"相应速度"。并用下标w表示水管，用下标a表示空气管道。因为两管的雷诺数相等，有

$$\frac{\rho_w v_w d_w}{\eta_w}=\frac{\rho_a v_a d_a}{\eta_a}$$

空气的相应速度 $v_a=v_w\frac{\rho_w}{\rho_a}\ \frac{d_w}{d_a}\ \frac{\eta_a}{\eta_w}$

$$=0.6\frac{1000}{1.23}\times\frac{50}{200}\times\frac{1.8\times10^{-4}}{1.2\times10^{-2}}=1.83\text{m/s}$$

压降比 $\frac{p_a}{p_w}=\frac{\rho_a}{\rho_w}\ \frac{l_a}{l_w}\ \frac{d_w}{d_a}\ \frac{v_a^2}{v_w^2}$

$$=\frac{1.23}{1000}\times\frac{400}{100}\times\frac{50}{200}\times\frac{1.83^2}{0.6^2}=0.01144$$

如果管径为800mm的水管道中，每百米损失水头为50mm水柱，则在直径为200mm的空气管道中每四百米损失的压头为0.01144×800＝9.15mm水柱。

1.5几何相似的部分浸沉的运动物体以均匀速度V通过粘性，可压缩流体，该流体质量密度为ρ，动力粘系数为η。试用量纲分析方法求出运动阻力R的理论公式。

解 阻力是由表面摩擦，波阻和流体的可压缩性产生的。与物体的尺寸（以特征长度L表示）、速度V、密度ρ、粘度系数η、流体体积模数K以及重力加速度g（就波阻而言）有关，因此阻力R是l、V、ρ、η、K及g的函数。这个函数的形式可以简单地象例1.4中那样表示，也可以表示为一个级数，级数的各项为各变量的适当次幂的乘积：

$$R=Al^xV^y\rho^z\eta^pK^qg^r+A_1l^{x_1}V^{y_1}\rho^{z_1}\eta^{p_1}K^{q_1}g^{r_1}+\cdots\cdots \quad (1)$$

其中A，A_1……都是常数，x，x_1，y，y_1……为未知密次指数。因此

$$R/Al^xV^y\rho^z\eta^pK^qg^r=1+\frac{A_1}{A}l^{x_1-x}V^{y_1-y}\rho^{z_1-z}\eta^{p_1-p}K^{q_1-q}g^{r_1-r}$$

因为方程右边第一项为纯数，所以仅当

$$R=Al^xV^y\rho^z\eta^pK^qg^r$$

方程才能成立。

各变量的量纲为：$R=MLT^{-2}$，$l=L$，$V=LT^{-1}$，$\rho=ML^{-3}$，$\eta=ML^{-1}T^{-1}$，$K=ML^{-1}T^{-2}$，$g=LT^{-2}$。代入方程（1）得到：

$MLT^{-2}=L^x\times L^yT^{-y}\times M^zL^{-3z}\times M^pL^{-p}T^{-p}\times M^qL^{-q}T^{-2q}\times LT^{-2r}$令M、L、T的因次相等，得到

$$1=z+p+q \quad (2)$$

$$1=x+y-3z-p-q+r \quad (3)$$

$$-2=-y-p-2q-2r \quad (4)$$

方程（2），（3）和（4）仅有三个解，解出x，y和z可以得到一个有用的结果

$$Z=1-p-q,\ y=2-p-2q-2r,\ x=2-p+r。$$

方程（1）右边的其它项都与第一项类同，因此由量纲相同得到

$$x_1=2-p_1+r_1 \qquad y_1=2-p_1-2q_1-2r_1$$

$$Z_1=1-p_1-q_1$$

代入方程（1）得到

$$R=\rho v^2 l^2\left\{A\left(\frac{\rho Vl}{\eta}\right)^{-p}\left(\frac{V}{\sqrt{K/\rho}}\right)^{-2q}\left(\frac{V}{\sqrt{(lg)}}\right)^{-2r}\right.$$
$$\left.+A_1\left(\frac{\rho Vl}{\eta}\right)^{-p_1}\left(\frac{V}{\sqrt{K/\rho}}\right)^{-2q_1}\left(\frac{V}{\sqrt{(lg)}}\right)^{-2r_1}+\cdots\cdots\right\}$$

括号中级数是$\frac{\rho Vl}{\eta}$，$\frac{V}{\sqrt{K/\rho}}$，$\frac{V}{\sqrt{lg}}$的未知函数。可以写成

$$R=\rho V^2 l^2\,\phi\left\{\frac{\rho Vl}{\eta},\ \frac{V}{\sqrt{K/\rho}},\ \frac{V}{\sqrt{lg}}\right\} \qquad (5)$$

函数中各项都是无量纲组合

$\frac{\rho vl}{\eta}$为雷诺数

$\frac{V}{\sqrt{K/\rho}}$为马赫数

$\frac{V}{\sqrt{lg}}$为费罗德数

方程（5）同样可写成

$$\frac{R}{\rho V^2 l^2}=\phi\left\{\frac{\rho Vl}{\eta}\cdot\frac{V}{\sqrt{(K/\rho}}\cdot\frac{V}{\sqrt{(lg)}}\right\}$$

此时，$(R/\rho)V^2l^2$也是无量纲量。

1.6 假定螺旋浆推力与螺旋浆直径、平均速度v、流体密度ρ有关。螺旋浆每秒转数为n，流体粘性系数为η，试证推力可用方程

$$F=\rho d^2v^2\ \phi\left\{\frac{\eta}{\rho dv},\ \frac{dn}{v}\right\}$$

表示

解 F是d，v，ρ，n及η的某个函数。如例1.5般展开该函数，考虑所有的项都相似，我们可以写成：

$$F=\Sigma A d^m v^p \rho^q n^r \eta^s \qquad (1)$$

其中A是常数，m、p、q、r及s是未知因次。

各变量的量纲为：$F=MLT^{-2}$，$d=L$，$V=LT^{-1}$，$\rho=ML^{-3}$，$n=T^{-1}$，

$\eta=ML^{-1}T^{-1}$

将这些变量的量纲代入，仅当下式满足时，方程（1）成立。

$$MLT^{-2}=L^m\times L^pT^{-p}\times M^qL^{-3q}\times T^{-r}\times M^sL^{-s}T^{-s}$$

令M、L和T的因次相等可以得到：

$$1=q+s$$

$$1=m+p-3q-s$$

$$-2=-p-r-s$$

本问题所给出的方程表明应以r，s为自变量解出m、p、q

$$q=1-s,\quad p=2-r+s$$

$$m=1-p+3q+s=2+r-s$$

代入方程（1）得到

$$F=\Sigma Ad^{2+r-s}v^{2-r-s}\rho^{1-s}n^r\eta^s$$

将各变量因次重新组合得：

$$F=\Sigma A\rho d^2v^2\left(\frac{\eta}{\rho dv}\right)^s\left(\frac{dn}{v}\right)^r$$

又可写成

$$F=\rho d^2v^2\,\phi\left\{\frac{\eta}{\rho dv},\ \frac{dn}{v}\right\}$$

其中ϕ表示某个函数关系。

1.7 试述布金汉的Π定理，并将它应用于例1.6中。

解 布金汉的Π定理叙述如下：如果某个问题中有n个变量，而这些变量包含m个基本纲（例如M、L和T）。则与变量有关的方程将包含n－m个无量纲组合。並记这些无量纲组合分别为Π_1、Π_2、……等等。最终得到的方程为：

$$\Pi_1=\phi(\Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4,\ \cdots\cdots\Pi_{n-m})\text{。}$$

因此在例1.5中有7个变量，它们具有3个基本量纲，最终方程由四个无量纲组合构成。

$$R/V\rho^2l=\phi\left\{\frac{\rho Vl}{\eta},\ \frac{V}{\sqrt{K/\rho}},\ \frac{V}{\sqrt{lg}}\right\}$$

在例1.6中有6个变量F、ρ、d、v、η和n。三个基本量纲。因此与变量有关的方程将由6－3＝3个无量纲组合构成。为

$$\Pi_1=\phi(\Pi_2,\ \Pi_3)$$

无量纲组合如下述方法构成

（1）选择与基本量纲相等的数目的变量，並且要包括所有的量纲在内，在本题情形中F、ρ和v即为所选择的变量。

（2）将选出的变量轮流与其它变量结合，组成无量纲组合。

将F、ρ和v跟d结合组成一无量纲组合

$$\Pi_1=\frac{F}{\rho v^2d^2}$$

将F、ρ和v跟n结合组成

$$\Pi_2=\frac{Fn^2}{\rho v^4}$$

将F、ρ和v跟η结合组成

$$\Pi_3=\frac{F\rho}{\eta^2}$$

因此 $\Pi_1=\phi\ (\Pi_2、\Pi_3)$

$$\frac{F}{\rho v^2 d^2}=\phi\ (\frac{Fn^2}{\rho v^4},\ \frac{F\rho}{\eta^2})$$

这些无量纲组合可以用交叉相乘的方法进行整理，从而得到相宜的形式。

将方程（1）改写为

$$\frac{F}{\rho v^2 d^2}=(\frac{Fn^2}{\rho v^4})^a(\frac{F\rho}{\eta^2})^b\times 常数$$

方程两边同乘以$\left(\frac{F}{\rho v^2 d^2}\right)^{-a-b}$给出

$$\left(\frac{F}{\rho v^2 d^2}\right)^{1-a-b}=\left(\frac{Fn^2}{\rho v^4}\cdot\frac{\rho v^2 d^2}{F}\right)^a\left(\frac{F\rho}{\eta^2}\cdot\frac{\rho v^2 d^2}{F}\right)^b\times 常数$$

$$\left(\frac{F}{\rho v^2 d^2}\right)^{1-a-b}=\left(\frac{dn}{v}\right)^{2a}\left(\frac{\eta}{\rho v d}\right)^{-2b}\times 常数$$

$$\frac{F}{\rho v^2 d^2}=\phi\left\{\frac{dn}{v},\ \frac{\eta}{\rho v d}\right\}$$

习题 1

1．一个直径为d的盘子在粘性系数为η、密度为ρ的流体中以角速度ω旋转，试证明其摩擦力矩L为下式给出

$$\frac{L}{d^3\omega^2\rho}=\phi\left\{\frac{\rho d^2\omega}{\eta}\right\}$$

2．将一气体通过一个锐缘孔的流量与孔的直径、密度ρ和气体运动粘性系数ν有关，试用量纲分析方法证明

$$Q=d^2\left(\sqrt{\frac{p}{\rho}}\right)\phi\left\{\frac{\nu}{d}\sqrt{\frac{\rho}{p}}\right\}$$

3．证明水轮机发出的功率P可由下式结出

$$P=\rho N^3 D^5\phi\left\{\frac{N^2D^2}{gH}\right\}$$

其中，ρ是流体的质量密度，N是转动速度，D是转子直径，H是有效水头。

4．叙述粘性的定义及其测量单位，应用量纲相等原则证明：通过粘性流体的球的运动阻力用下式给出R＝Kηdv，其中η是粘性系数，d为球的直径，v为球的速度，K为系数。

5.假定某粗糙管内流动为湍流，那么，固体边界上单位面积的阻力 τ是与流体的粘模运数η、密度ρ、速度v、管道直径D、粗糙度K有关。证明

$$\tau/\rho V^2=\phi\left\{\frac{VD\rho}{\eta}\ \frac{K}{D}\right\}$$

6.一直径为D的园盘，以速度N在粘性系数为η、密度为ρ的作湍流运动的流体里旋转，试用量纲分析方法证明摩擦力矩M的计算公式为

$$M=D^5N^2\rho\phi\left(\frac{\eta}{D^2N\rho}\right)$$

7.试推导以弗罗德数及雷诺数表示的部分浸没物体运动阻力的一般表达式，如何用船模来比拟真实船体的阻力？阐明通常所作的假设及能满足该假设的实验。

详述（a）船模的制作；（b）当船模在静水中摇曳时运动的阻力测定，

8.藉助于示意图，说明轴颈轴承的薄油膜的运转情况，指明严格几何相似的必要条件，并用量纲分析法证明，忽略温度效应时，几何相似的轴颈轴承的摩擦阻力矩可用下式表示，

$$M=\eta ND^3\phi\left(\frac{\eta N}{P}\right)$$

式中η是润滑剂的粘性系数，N是轴承旋转速度，P是单位投影面积上的负荷，D是轴颈轴承的直径。

证明对所有几何相似的轴承在以相应的速度旋转时摩擦阻力力矩正比于PD^3

9.证明当直径为d的球以匀速v通过密度为ρ、粘性系数为η的流体时，所受的运动阻力可以下式表示

$$F=\frac{\eta^2}{\rho}\phi\left(\frac{\rho vd}{\eta}\right)$$

证明斯托克关于低速运动的结果：$F=3\pi\eta v^2d$是与该一般公式符合的。

金刚砂粉在盛于玻璃杯中的水内摇动后沉淀，即为一个例子，可以发现当水为18cm深时，杯中的水在一分四十秒内澄清，试计算金刚砂粒子的最小直径，假定它们都为球形，比重（金刚砂）取4，水的粘性系数为0.012泊、　　　　(0.00364cm)

10.证明一个直径为d、长度为l的管道对流体的阻力用下式给出

$$R=ldv^2\rho\phi\left(\frac{\eta}{\rho vd}\right)$$

式中：ρ是流体密度，v是它的平均速度，试用上式证明长为l的管道里的损失水头可以表示为KlV^n/d^{3-n}。並证明当$n=1$及$K=32\eta/\rho g$时，该式适用于粘性流体。

11.通过小孔的流量是与加在此孔上的压头H、重力加速度g、小孔直径D、流体粘性系数η，密度ρ、表面张力σ及粗糙度K有关，找出决定小孔流量系数的各无量纲组合。

$$\left(\frac{\rho D\sqrt{gH}}{\eta}\ \frac{D}{H}\ \frac{\sigma}{\rho gH^2}\ \frac{K}{H}\right).$$

12.应用量纲分析法证明，当几何相似且部分浸没的物体以均匀速度V在密度为ρ、粘性

系数为η的流体中运动时，阻力的理论公式是$R=\rho L^2V^2\phi(N、F)$，其中N表示雷诺数，F表示弗罗德数。

说明与上述各量有关的一些特殊形式的阻力，并解释为什么将上述公式应用于模型试验来预测真实船只的阻力时，并不能得到完全的动力相似。说明如何克服这个困难？

13.没有径向负荷的园柱形轴承，如同垂直放置的轴承一样具有均匀的径向间隙。证明其摩擦力矩为

$$T=K\frac{\eta D^3NL}{C}\quad N-m$$

其中η为油的动力粘性系数（kg/m—秒），D为轴承直径，L为轴承长度（m），N为速度（转数/分），c为间隙（m）试求系数K的值。

14.试用量纲分析证明流经V型槽的流量的理论计算公式由下式给出：

$$Q=g^{1/2}h^{5/2}\phi\left(\frac{g^{1/2}h^{3/2}}{\gamma},\ \frac{gh^2\rho}{\tau},\ \theta\right)$$

其中Q是流量，h是v型顶点处流体的高度，ρ是流体密度，γ是流体动力粘性系数，τ是流体的表面张力，θ是V型槽的角度，g是重力加速度。

用水在90°V型槽内作实验得到的实验公式为

$$Q=1.35h^{2.48}$$

其中Q及h皆用标准国际单位制表示。

当忽略表面张力时，用该公式来测定动力粘性系数十倍于水的某种油的流动，试计算所产生的百分比误差。

15.应用量纲分析方法证明当密度为ρ、动力粘性系数为η的流体流经几何相似的园管时，由于摩擦引起的压降可以下式表示

$$P=\frac{f'\rho Lv^2}{d}$$

其中d为管径，L是管长，V是流动平均速度，f′是由雷诺数决定的摩擦系数。说明如何用标准国际单位制表示这些量。

运用图线定性地说明在下列二种情况下，当雷诺数从1000左右到100000时摩擦系数f的变化，分析二种情况下曲线形状不同的原因。雷诺数要采用对数座标。

(a) 管子内表面光滑

(b) 管子内表面非常粗糙

第二章　动力相似

2.1总则——2.2管内流动——2.3球的阻力——2.4可压缩流中的阻力——2.5波阻——2.6船的阻力——2.7V型槽——2.8潮汐模型——2.9调压塔

任何流体运动问题均涉及许多因素，以致往往很难确定作用于某个具体的流体质点或整体运动的力。当作出一定的简化假设后，可得到理论解。但往往需要引入实验确定的系数来修正理论解的结果，从而应用于实际问题。（如同孔板流动的情况）。量纲分析可用来找出解的可能形式，但要建立精确的关系式还必须依靠实验。

在无法进行真实尺寸的实物实验时，只要建立模型试验结果与实物之间的换算关系，便可通过模型试验获得资料。仅当模型试验与真实流动保持几何相似及动力相似时，此关系才是简单的。

2.1(a)下列名词(1)几何相似的意义是什么？

(b)当考虑下述因素的情况下，两个流体运动动力相似的必要条件是什么？(1)粘性阻力(2)波阻(3)可压缩性(4)表面张力。

解　(a)当两个系统中对应的长度比为一常数时，两个系统为几相似何。因此在两系统几何相似时，其中之一为另一个的模型。

当两个系统中，作用于相应的流体元上的数个力彼此保持同一比例时，该两个系统动力相似，此时两系统相应元的轨迹保持几何相似。当一个质点运动时，它的性质取决于其惯性、（惯性总是力图使质点保持匀速直线运动）和阻力。如果两个运动的惯性对阻力的比相同，则该两运动为动力相似。

(b)在各个情形中动力相似的必要条件是两系统中的惯性力与阻力之比相等。

令l为系统的特征长度，例如管道直径或机翼弦长，t是特征时间，于是流体微元的质量正比于ρl^3，它的加速度正比于l/t^2，因此

$$\text{惯性力} \propto \text{质量} \times \text{加速度}$$

$$\propto \rho l^3 \times \rho/t^2$$

$$\propto \rho l^2 \times (l/t)^2$$

或者，因为速度$v \propto l/t$，所以

$$\text{惯性力} \propto \rho l^2 v^2$$

（1）如果运动受控于粘性阻力，则惯性力/粘性力相同时，两个系统的流动为动力相似。

$$\text{粘性力} \propto \text{粘性切应力} \times \text{面积}$$

$$\propto \eta \times \text{速度梯度} \times l^2$$

因为速度梯度$\propto v/l$，因此

$$\text{粘性力} \propto \eta v l$$

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} \propto \frac{\rho v^2 l^2}{\eta v l} \propto \frac{\rho v l}{\eta}$$

这个比即为雷诺数。

于是对阻力而言，两系统动力相似条件是雷诺数相等

（2）对于波阻而言，阻力是由于重力引起的。

$$重力=质量\times重力加速度$$

$$\propto\rho l^3\times g$$

因此 $$\frac{惯性力}{重力}\propto\frac{\rho l^2v^2}{\rho l^3 g}\propto\frac{v}{\sqrt{lg}}$$

这个比即为佛罗德数，于是对波阻问题而言，两个系统动力相似的必要条件是佛罗德数相等。

（3）对于流体的弹性压缩而言，弹性力与流体体积弹性模量K有关。

$$弹性力\propto Kl^2$$

因此 $$\frac{惯性力}{弹性力}\propto\frac{\rho v^2l^2}{Kl^2}\propto\frac{v}{\sqrt{K/\rho}}$$

这就是马赫数。因此对可压缩流体而言，马赫数相同时，两个系统动力相以。

（4）对于表面张力作用，如果单位长度的表面张力是T

$$表面张力\propto Tl$$

$$\frac{惯性力}{表面张力}\propto\frac{\rho v^2l^2}{Tl}$$

这种情形时，动力相以取决于$\frac{\rho v^2l^2}{Tl}$，即韦伯数。

2.2 利用量纲分析可以证明流体运动遵循的规律的一个可能形式为

$$F/\rho v^2=\phi\left(\frac{\rho v d}{\eta}\right)$$

其中F为单位浸润面积摩擦力，ρ为质量密度，v为速度d为管径，η为流体粘性系数。

用$\frac{1}{4}$比例尺的透明模型中的水流模拟均匀管道中的气流。原管道中的气流速度要求为m/s。试求：（a）相应的模型中水速。（b）如果模型的单位长度的压降是13.8kN/m²。原管道中单位长度的压降为多少？

假定在原管道中每一公斤气体占据体积0.686M³取水的粘性系数η为气体的粘性系数η的62倍。

解 由于阻力是由粘性引起，故动力相似的必要条件是模型及原物雷诺数$\rho vd/\eta$相等。用下标g标志气体的物理量，用下标W标志水的物理量。则

$$\frac{\rho_g v_g d_g}{\eta_g}=\frac{\rho_w v_w d_w}{\eta_w}$$

（a）为使两个系统中雷诺数相同，相应的水速

$$v_w=v_g\frac{\rho_g}{\rho_w}\quad\frac{d_g}{d_w}\quad\frac{\eta_w}{\eta_g}$$

给出$v_g=24m/s$，$\rho_g=1/0.686\ \ kg/m^3$，$\rho_w=1000kg/m^3$

$\eta_w/\eta_g=64$ 且对于比例为$\frac{1}{4}$的模型$d_g/d_w=4$

$$v_w=24\times\frac{1}{0.686\times1000}\times4\times62=8.68m/s$$

(b) 因为两个系统中，雷诺数是相同的，所以

$$F_g/\rho_g v_g^2=\phi\ (\text{雷诺数})=F_w/\rho_w v_w^2$$

$$F_g=F_w\frac{\rho_g}{\rho_w}\left(\frac{v_g}{v_w}\right)^2$$

如果p为直径d、管长是L的管道中压降，又速度v是常数，于是可知

因压降所产生的作用力＝摩擦阻力

$$p\times\frac{1}{4}\pi d^2=F\times\pi dL$$

$$p=4FL/d$$

当考察仅限于两个系统的单位管长时

$$\frac{P_g}{P_w}=\frac{F_g}{F_w}\times\frac{d_w}{d_g}=\frac{\rho_g}{\rho_w}\left(\frac{v_g}{v_w}\right)^2\frac{d_w}{d_g}$$

源管道中单位长度压降为

$$P_g=P_w\frac{\rho_g}{\rho_w}\cdot\left(\frac{v_g}{v_w}\right)\cdot\frac{d_w}{d_g}$$

$$=1.38\times\frac{1}{0.686\times1000}\times\left(\frac{24}{8.68}\right)^2\times\frac{1}{4}\text{kN/m}^2$$

$$=0.0386\times\text{kN/m}^2。$$

2.3 某个定直径的球放置于以1.5m/s速度运动的水中，它所承受的阻力为4.5N。另一个两倍直径的球放置于风洞中，试求动力相似时空气速度。设空气动力粘性 为水的13倍。空气密度为1.28kg/m³，在此速度下阻力将为多少？

解 由量纲分析知

球的阻力$F=\rho v^2d^2\phi\dfrac{vd}{\gamma}$

其中ρ为质量密度，v为流体速度，d为直径，γ＝流体动力粘性系数。

为使两个球的运动动力相似，则两个系统的雷诺数要相等。以下算a标志空气，用W表示水，则

$$\frac{v_a d_a}{\gamma_a}=\frac{v_w d_w}{\gamma_w}$$

空气速度$v_a=v_w\dfrac{d_w}{d_a}\quad\dfrac{\gamma_a}{\gamma_w}=1.5\times\dfrac{1}{2}\times13=9.75\text{m/s}$。

在此速度时，$\dfrac{v_a d_a}{\gamma_a}=\dfrac{v_w d_w}{\gamma_w}$

因此$\dfrac{F_a}{F_w}=\dfrac{\rho_a v_a^2 d_a^2}{\rho_w v_w^2 d_w^2}$

$$F_a=4.5\times\frac{12.8}{1000}\times\left(\frac{9.75}{1.5}\right)^2\times\left(\frac{2}{1}\right)^2\text{N}$$

$$=0.976\text{N}$$

2.4 物体在质量密度为ρ、动力粘性系数为η和体积弹性模量为K的流体中运动时，运动的阻力F由下式给出

$$F=\rho v^2l^2\phi\left\{\frac{\rho vl}{\eta},\ \frac{v}{\sqrt{K/\rho}}\right\}$$

其中v是物体速度，l为物体特征长度。

由该关系式出发，试指出当高速飞机模型在风洞中试验时获得动力相似的困难及如何克服该困难。

解　为获得动力相似，模型及原物的雷诺数$\rho vl/\eta$和马赫数$v/\sqrt{K/\rho}$皆需分别相等，用下标m标志模型的物理量，因为雷诺数相等，则

$$\frac{\rho_m v_m l_m}{\eta_m}=\frac{\rho vl}{\eta}$$

如模型是用空气做试验的，则$\rho_m=\rho$，$\eta_m=\eta$，相应的模速度为

$$v_m=v\times\frac{l}{l_m}$$

其中$\lambda=v\times\frac{l}{l_m}=v\lambda$

又因为马赫数相等，则——

$$\frac{v}{\sqrt{K\ \ /\rho_w}}=\frac{v}{\sqrt{K/\rho}}$$

又由于模型与原物采用同种流体，所以$K_m=K$，$\rho_m=\rho$，可知$v_m=v$。

雷诺数相等要求模型速度大于原物速度，但是马赫数相等却要求模型与原物速的度相等，处于大气压力下空气作为风洞流体时，这些要求是无法相容的。

如果使用可压缩空气的风洞，就可克服这个困难。这样可使ρ_m大于ρ，而又能使η保持大体不变，因此如线性比例$\lambda=10$，则风洞应增压到10个大气压，于是

$$\rho_m=10\rho$$

由雷诺数相等得到：

$$\rho_m=v\frac{\rho}{\rho_m}\cdot\frac{l}{l_m}=v\frac{\rho}{10\rho}\cdot 10=v$$

同样因为$K=\gamma p/\rho$和ρ随p变化而变化，K的值不随压力的增加而变。在$v_m=v$时，马赫数可保持不变。

2.5模型试验时，相应速度是指什么？如果水上飞机在水面飞行时，掀起波浪从而产生阻力，並可认为该阻力为飞机阻力的主要原因。若飞机模型比例为1/25，当它以6 m/s运动时，阻力为1.8N，则在以相应速度飞行时，真实的水上飞机的阻力是多少？

解　相应速度是指在此速度下，原型与模型保持动力相似。

若阻力主要来自波浪，则弗罗德数相等将是动力相似的条件。即

$$\left(\frac{v}{\sqrt{lg}}\right)_{模型}=\left(\frac{v}{\sqrt{Lg}}\right)_{原型}$$

原型船的相应速度是

$$v\sqrt{\frac{L}{l}}=6\sqrt{\frac{25}{1}}=30\ \mathrm{m/s}$$

由量纲分析得到

$$波阻=\rho\rho L^2V^2\phi\ （弗罗德数）$$

由动力相似条件可得：

$$\frac{原型阻力}{模型阻力}=\left(\frac{L}{l}\right)^2\left(\frac{V}{v}\right)^2$$

$$原形阻力=1.8\times\left(\frac{25}{1}\right)^2\left(\frac{30}{6}\right)^2=28.15\,N$$

2.6　一船长度为132m，浸湿面积为2325m²，该船的试验模型长度为4.2m，并以1.5米/秒的速度在清水中被拖曳行进。测得船模总阻力为17.75N。原船在海水中以3m/秒速度行驶时，假定总表面阻力为43N/m²。它的速度指数是1.85，而以3m/s速度在水中运动的模型，其相应的阻力为16N/m²，速度指数为1.9。

试计算(a)原船的相应速度，並证明所有使用的公式和解释所作的假设。(b)原船在密度为1025kg/m³的海水中以该速度行驶时所需的动率。假定推进器效率为70%

解　船的总阻力为表面阻力与波阻之和，对船模及原船的表面阻力计算已有足够资料。因此试验目的在于确定船只的波阻。自然试验必须在波阻动力相似条件下进行。

由量纲分析可知

$$波阻R=\rho l^2 v^2\phi(F)$$

其中ρ为流体质量密度，l为长度，v是速度，F是弗罗德数$=v/\sqrt{lg}$。

若船模速度为v_m，船模长度为l_m，原船速为v，原船长为L，则(a)由动力相似可知

$$\frac{v_m}{\sqrt{l_m g}}=\frac{V}{\sqrt{Lg}},\qquad \frac{V}{v_m}=\sqrt{\frac{L}{l_m}}$$

$$相应船速V=v_m\sqrt{\frac{L}{l_m}}=1.5\sqrt{\frac{132}{4.2}}=8.4m/s.$$

(b)总阻力=表面阻力+波阻

船模单位面积的表面摩擦阻力$p_m=K_m v_m^{1.9}$，当$v=3m/s$时，$p_m=16N/m^2$，因此

$$K_m=\frac{16}{31.9}=\frac{16}{8.06}=1.99$$

船模的线性尺度比$l_m/L=4.2/132$

$$模型的浸润面积A_m=A\left(\frac{l_m}{L}\right)^2=2325\times\left(\frac{4.2}{132}\right)^2=2.345m^2$$

当速度为1.5m/s时模型的表面阻力$=q_m A_m=K_m v_m^{1.9}A_m$

$$=1.99\times1.5^{1.9}\times2.345=10.1N$$

当速度为1.5m/s时模型总阻力=17.75N

模型波阻=17.75−10.1=7.65N

若R为船的波阻，R_m为动力相似条件下的模型波阻则

$$\frac{R}{R_m}=\frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{L}{l_m}\right)^2\left(\frac{V}{v_m}\right)^2=\frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{L}{l_m}\right)^3\quad 因为$$

$$\frac{V}{v_m}=\sqrt{\frac{L}{l_m}}$$

$$则船的波阻=R_m\frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{L}{l_m}\right)^3$$

$$=7.65\times\frac{1025}{1000}\times\left(\frac{132}{4.2}\right)^3=244500\,N$$

单位船面积的表面摩擦阻力$=q=KV^{1.85}A$

当$V=3m/s$时，$q=43N/m^2$，

因此 $$K=\frac{43}{3^{1.85}}=\frac{43}{7.46}=5.76$$

船以8,4m/s速度行驶时表面阻力$=qA=KV^{1.85}A$

$$=5,76\times8,4^{1.85}\times2325=686000N$$

船的总阻力＝波阻＋表面阻力

$$=244500+686000=930500N$$

每秒克服阻力所做的功$=930500\times8.4=7830000W$

$$\text{轴功率}=\frac{100}{70}\times7830=11200kW$$

2.7通过V型槽的流量一般用下式给出

$$Q=H^2\sqrt{gH}\ \phi\left\{\frac{H\sqrt{gH}}{\gamma},\ \theta\right\}\ m^3/s$$

其中H表示压头，γ是流体运动粘性系数，θ是V型槽的角度。水通过90°V型槽的实验给出经验公式$Q=1.37H^{2.47}m^3/s$，其中H的单位m。

应用动力相似条件的通用表达式，证明：对运动粘性系数为水的12倍的流体，用该实验公式计算所得流量低于真实流量。

解 通用表达式可改写为

$$Q=A\left(\frac{H\sqrt{gH}}{\gamma}\right)^n H^{2.5}$$

其中A及u是未知数。实验公式为

$$Q=KH^{2.47}$$

对水而言，该两式应该一致，因此

$$A\left(\frac{\sqrt{g}\,H^{3/2}}{\gamma_w}\right)^n H^{2.5}=KH^{2.47}$$

比较H的指数，令两边的数值相等。则

$3/2n+2.5=2.47$

$n=-0.02$

对水而言 $K_w=A\ (\sqrt{g})^{-0.02}\gamma_w{}^{0.02}$

对其它流体而言，则$K_L=A(\sqrt{g})^{-0.02}\gamma_L{}^{0.02}$

对于某个给定的压头，应用经验公式