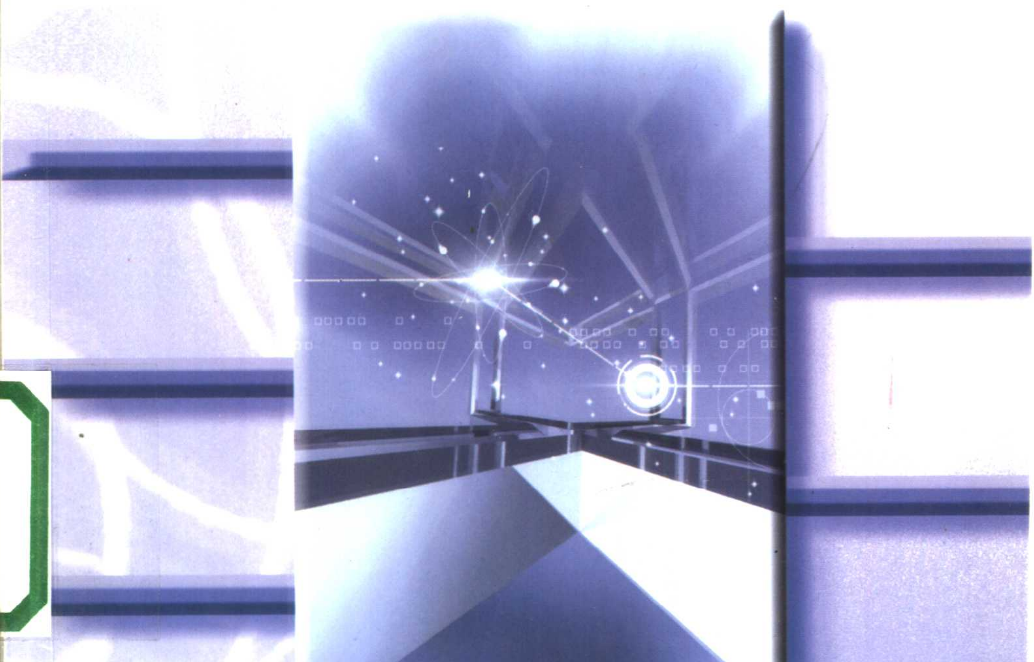
经典教材辅导用书

经济数学——概率论与数理统计题解

人大社·《概率论与数理统计·修订本》(袁荫棠编)

叶　鹰　　李开丁　编



华中科技大学出版社

经典教材辅导用书

经济数学——

概率论与数理统计题解

人大社·《概率论与数理统计·修订本》(袁荫棠编)

叶　鹰　李开丁　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——概率论与数理统计题解/叶鹰 李开丁 编
武汉:华中科技大学出版社,2004年1月
ISBN 7-5609-3009-3

Ⅰ.经…
Ⅱ.①叶… ②李…
Ⅲ.概率论-解题;数量统计-解题
Ⅳ.021-44

经济数学——概率论与数理统计题解 叶鹰 李开丁 编

策划编辑:周芬娜 封面设计:潘 群
责任编辑:吴锐涛
责任校对:朱 霞 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

录 排:华大图文设计室
印 刷:湖北恒吉印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:8 字数:191 000
版次:2004年1月第1版 印次:2004年1月第1次印刷
ISBN 7-5609-3009-3/O·299 定价:9.80元

内容提要

本书是人大版袁荫棠编写的《概率论与数理统计》(修订本)的自学辅导书。全书分为十一章,每章由四部分构成:第一部分是知识要点,第二部分是习题详解,第三部分是自测题,第四部分是自测题解答。

知识要点部分浓缩了原教材的所有概念、重要定理和公式,并对课程中的重点和难点作了指导性提示。所涉内容包括:随机事件的概率及计算,随机变量的概率分布,数字特征,极限定理,马尔可夫链,抽样分布,参数估计,假设检验,方差分析和回归分析等。

习题详解部分给出了教材中全部习题的详细解答。

自测题部分以考试试题的形式设置,题型包括填空题、选择题、计算题和证明题。题目的难度和深度较原教材的习题略有加强,其中包括2000年以来全国硕士研究生入学考试数学三、四的所有概率论与数理统计试题。自测题也附有详细解答。

本书适合于在校经济管理类大学生,备考经济管理类硕士研究生数学入学考试的学生,以及学习MBA和经济数学的人士使用。

前　　言

概率统计作为数学的一个重要分支在许多领域中有着广泛的应用，特别是在经济和管理领域。随着我国经济与世界经济接轨，学习和研究西方经济、市场经济理论的人士越来越多，现代经济学理论的一个显著特点就是对经济发展的规律进行量化分析。而无论是宏观经济的进程还是微观经济的波动都受着随机因素的影响，因此“概率论与数理统计”成为经济学和管理学的一门重要基础课程。人大版的经济应用数学基础教材在许多高校的经济管理类专业广泛使用，本书便是与这套教材中的《概率论与数理统计》（修订本）一书配合使用的自学辅导用书。

本书紧扣教材，内容结构与教材一致，共分十一章，每章包括四个部分：

一、知识要点；

二、习题详解；

三、自测题；

四、自测题解答。

在知识要点部分，本书力求做到基本内容叙述简练、准确，思想方法重点突出。便于读者系统地掌握基本知识点，清晰把握各章知识的脉络，可作为复习备考的手册使用。同时对学生在学习该课程中普遍感到难以掌握的理论和方法以及容易疏忽的重要概念作了指导性的论述。以期达到帮助读者正确理解概念，灵活运用方法的目的。

在习题详解部分，本书对原教材上的全部习题做了详细解答，对部分习题给出了多种解法。在一些具有典型应用的习题解答之后，给出了必要的注释。以指导学生学习通过解典型习题，掌握解

决一类实际问题的一般方法。通过这种注释的方式，本书还对原教材未涉及的一些原理和公式进行了适当的拓展。

自测题部分是为了便于读者检测和提高解题能力而设置的。其题型出成填空题、选择题、计算证明题的形式，尽可能贴近考试试题，这些题目中包括了自2000年以来全国硕士研究生入学考试数学三、四的所有概率论与数理统计试题，以期对备考的学生有直接帮助。另外，除考研试题（题号后标明了该题的年代）采用原题记号以外，所有试题和解答均采用与原教材一致的数学符号。

学好数学，提高自身的数学素质修养，首要的是独立思考与演算，多做练习题是学习数学内容的关键；其次是汲取别人的有益经验。本书提供的解题方法，便于读者开阔思路，提高解题能力，真正掌握概率论与数理统计的基本概念与方法。

本书的第一章至第五章由叶鹰编写，第六章至第十一章由李开丁编写。由于编者水平有限，加之时间仓促，其中错漏不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2003年11月

目　录

第一章　随机事件及其概率

知识要点

1. 随机事件与集合的对应关系

各种对应关系如表1-1所示。

表 1-1

符号	集合名	事件名	事件含义
ω	单点集	基本事件	每次试验必有且仅有一个发生
A	集合	复合事件	A 所含的某个基本事件发生
$\varnothing$	空集	不可能事件	每次试验都不会发生
Ω	全集	必然事件	每次试验都会发生
$A \subset B$	包含	包含	A 发生则 B 必然发生
$A \cup B$	并集	并(和)事件	A 与 B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	交(积)事件	A 与 B 同时发生
$A-B$	差集	差事件	A 发生且 B 不发生
$A \cap B=\varnothing$	不相交	互不相容	A 与 B 不可能同时发生
$\overline{A}$	补集	对立事件	A 不发生

2. 概率的两种定义

统计定义：$P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A\text{ 发生的次数 }m}{\text{试验次数 }n}$

古典定义：$P(A)=\dfrac{A\text{ 包含的基本事件个数 }m}{\text{全体基本事件个数 }n}$

其中古典概率的定义要求所有基本事件为有限个，且每个基本事件发生的可能性相等。

3. 加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别，若 A 与 B 互不相容，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

4. 条件概率、乘法公式与独立性

当事件 A 发生时，事件 B 发生的条件概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\qquad (P(A)>0)$$

由此得到乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

A 与 B 独立定义为

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

这意味着条件概率 $P(B|A)=P(B)$。

5. 全概率公式与贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组，即满足

(1) $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$

则有全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

和贝叶斯公式

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

利用概率的古典定义计算简单事件的概率是本章的基本要求。解决这类问题应把握两点：一是等可能性，它要求我们将 Ω 分

解成若干等可能的基本事件；二是计数技巧，它要求我们能熟练应用排列组合公式计算各种可能的情况数。将原事件转化为对立事件计算概率是一个简单易行的技巧。

应用加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式以及事件的独立性计算复杂事件的概率是学习本章的主要目的。特别是全概率公式和贝叶斯公式体现了解决实际问题的概率思想。用这两个公式解题的关键有两点：第一是找出该问题的完备事件组，第二是用条件概率描述所求概率的事件与完备事件组的关系。

两事件互不相容和两事件相互独立是初学者容易混淆的两个概念。一般情况下，这两个概念没有必然的联系。两事件互不相容是指两事件不能同时发生，而两事件相互独立则是由两事件同时发生的概率表达式来定义。我们还可以通过两个重要公式来加深对这两个概念的理解：A 与 B 互不相容使加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 简化为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；A 与 B 相互独立使乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 简化为 $P(AB)=P(A)P(B)$。

习题详解

1. 互不相容事件与对立事件的区别何在？说出下列各对事件的关系。

(1) $|x-a|<\delta$ 与 $x-a\geqslant\delta$； (2) $x>20$ 与 $x\leqslant 20$；

(3) $x>20$ 与 $x<18$； (4) $x>20$ 与 $x\leqslant 22$；

(5) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有一个废品；

(6) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有一个废品。

解 对立事件与原事件是互不相容事件，且对立事件与原事件的和事件是必然事件，而两互不相容事件的和事件不一定是必然事件。

(1) 集合 $(a-\delta,a+\delta)$ 与 $[a+\delta,+\infty)$ 不相交，但 $(a-\delta,a+\delta)$

$\cup[a+\delta,+\infty)\neq(-\infty,+\infty)$，故$\{|x-a|<\delta\}$与$\{x-a\geqslant\delta\}$是两个互不相容的事件，但不是对立事件。

(2) 集合$(20,+\infty)$与$(-\infty,20]$不相交，且$(20,+\infty)\cup(-\infty,20]=(-\infty,+\infty)$，故$\{x>20\}$与$\{x\leqslant 20\}$是对立事件。

(3) 同理知，$\{x>20\}$与$\{x<18\}$是互不相容事件。

(4) $\{x>20\}$与$\{x\leqslant 22\}$不是互不相容事件。

(5) “20 个产品全是合格品”意味着 20 个产品中没有废品，故它与“20 个产品中只有一个废品”是互不相容事件，但这两个事件都没有包含 20 个产品中有多个废品的情况，所以它们不是对立事件。

(6) “20 个产品全是合格品”意味着 20 个产品中没有废品，它与“20 个产品中至少有一个废品”是对立事件。或者，“20 个产品中至少有一个废品”意味着 20 个产品不全是合格品，故它与“20 个产品全是合格品”是对立事件。

2. 同时掷两颗骰子，x、y 分别表示第一、二颗骰子出现的点数，设事件 A 表示“两颗骰子出现点数之和为奇数”，B 表示“点数之差为零”，C 为“点数之积不超过 20”，用样本点的集合表示事件 $B-A$；BC；$B+\overline{C}$。

解　在此问题中，(x,y)的所有取值构成了样本空间(必然事件)：

$$
\begin{aligned}
\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A=\{&(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),(1,6),(6,1),\\
&(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),\\
&(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}
\end{aligned}
$$

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

$$C = \Omega - \{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

因为 A 与 B 互不相容，所以

$$B - A = B$$

$$BC = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$B + \overline{C} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\}$$

3. 用步枪射击目标 5 次，设 A_i 为“第 i 次击中目标”($i=1,2,3,4,5$)，B 为“5 次中击中次数大于 2”，用文字叙述下列事件：

(1) $A = \sum_{i=1}^{5} A_i$　　(2) $\overline{A}$　　(3) $\overline{B}$

解　(1) A 为“5 次射击中至少击中一次”；(2) $\overline{A}$ 为“5 次都没击中目标”；(3) $\overline{B}$ 为“5 次射击中最多击中 2 次”。

4. 用图示法简化下列各式(A、B、C 都相容)：

(1) $(A+B)(B+C)$

(2) $(A+B)(A+\overline{B})$

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$

解　(1) 如图 1-1(a)所示，横线阴影区域为 $A+B$，竖线阴影区域为 $B+C$，则网格线阴影区域就是 $(A+B)(B+C)=B+AC$。

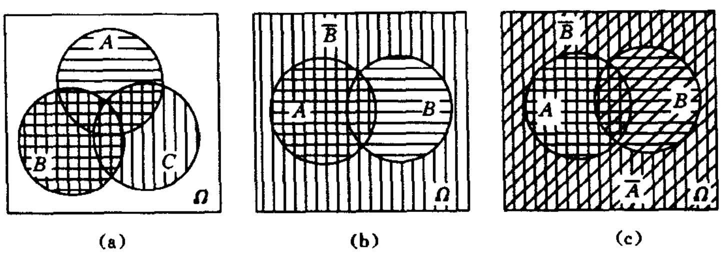


图 1-1

(2) 如图 1-1(b)所示，横线阴影区域为 $A+B$，竖线阴影区域

为 $A+\overline{B}$，则网格线阴影区域就是 $(A+B)(A+\overline{B})=A$。

(3) 如图1-1(c)所示，在图1-1(b)的基础上用斜线阴影区域表示 $(\overline{A}+B)$，则网格斜线阴影区域就是 $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)=AB$。

5. 在图书馆中随意抽取一本书，事件 A 表示"数学书"，B 表示"中文图书"，C 表示"平装书"。(1)说明事件 $AB\overline{C}$ 的实际意义；(2)若 $\overline{C}\subset B$，说明什么情况？(3) $\overline{A}=B$ 是否意味着馆中所有数学书都不是中文版的？

解 (1) $AB\overline{C}$ 表示精装的中文数学书；(2) $\overline{C}\subset B$ 说明精装书都是中文图书；(3) $\overline{A}=B$ 表示非数学书都是中文版的，且中文图书都是非数学书，所以数学书都不是中文图书。

6. 表1-2是10万个男子中活到 ξ 岁的人数统计表。若以 A、B、C 分别表示一个新生婴儿活到40岁、50岁、60岁，由表1-2估计 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$。

表 1-2

年岁 ξ	0	10	20	30	40	50
活到 ξ 岁的人数	100 000	93 601	92 293	90 092	86 880	80 521

年岁 ξ	60	70	80	90	100
活到 ξ 岁的人数	67 787	46 739	19 866	2 812	65

解 注意到表中所列数据为100 000个男子中到 ξ 岁时仍活着的人数，所以由统计概率知

$$P(A)=\frac{86\ 880}{100\ 000}=0.868\ 80$$

$$P(B)=\frac{80\ 521}{100\ 000}=0.805\ 21$$

$$P(C)=\frac{67\ 787}{100\ 000}=0.677\ 87$$

7. 某产品设计长度为20cm，规定误差不超过0.5cm为合格

品。今对一批产品进行测量，长度如表1-3所示。

表 1-3

长度/cm	19.5 以下	19.5～20.5	20.5 以上
件　　数	5	68	7

计算这批产品的合格率。

解　按题设要求，长度在19.5cm以下或者20.5cm以上均为不合格产品。这批产品的总件数为5+68+7=80件，故这批产品的合格率为

$$p=\frac{68}{80}=0.85$$

8. 掷3枚硬币，求出现3个正面的概率。

解　设$A_i(i=1,2,3)$为第i枚硬币出现正面，每枚硬币出现的情况是相互独立的，且出现正面的概率都是1/2。故所求概率为

$$p=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

9. 10把钥匙中有3把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率。

解　10把钥匙中任取两把的所有情况为C_{10}^2种，能打开门要求所取到的两把钥匙中至少有一把能打开门，这样的情况有$C_3^1C_7^1+C_3^2$种，故所求概率为

$$p=\frac{C_3^1C_7^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{21+3}{45}=\frac{8}{15}$$

或者考虑取到的两把钥匙都不能打开门的情况有C_7^2种，故所求概率也可计算为

$$p=1-\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=1-\frac{21}{45}=\frac{8}{15}$$

10. 一部4卷的文集随便放在书架上，问恰好各卷自左向右或自右向左的卷号为1、2、3、4的概率是多少？

解 4卷文集随便放在书架上的所有放法为1、2、3、4的所有排列，共4!种，排列1、2、3、4和4、3、2、1为其中的两种，故所求概率为

$$p=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}$$

11. 100个产品中有3个次品，任取5个，求其次品数分别为0、1、2、3的概率。

解 从100个产品中任取5个，所有可能的情况有C_{100}^5种，若取到的5个产品中有k个次品，这k个产品一定出自3个次品之中，另有$5-k$个产品出自$100-3=97$个正品之中。所以所求概率分别为

$$p_0=\frac{C_3^0C_{97}^5}{C_{100}^5}=\frac{97\times96\times95\times94\times93}{100\times99\times98\times97\times96}\approx0.856$$

$$p_1=\frac{C_3^1C_{97}^4}{C_{100}^5}=\frac{5\times3\times97\times96\times95\times94}{100\times99\times98\times97\times96}\approx0.138$$

$$p_2=\frac{C_3^2C_{97}^3}{C_{100}^5}=\frac{20\times3\times97\times96\times95}{100\times99\times98\times97\times96}\approx0.006$$

$$p_3=1-p_0-p_1-p_2=0.000$$

12. N个产品中有N_1个次品，从中任取n个$(1\leqslant n\leqslant N_1\leqslant N)$，求其中有$k(k\leqslant n)$个次品的概率。

解 本题是第11题所述问题的一般化，因此，由上题分析得

$$p_k=\frac{C_{N_1}^kC_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}\quad(k=0,1,2,\cdots,\min\{n,N_1\})$$

若$N-N_1<n$，则k至少应取$n-(N-N_1)$。

13. 一个袋内有5个红球，3个白球，2个黑球，计算任取3个球恰为一红、一白、一黑的概率。

解 袋内共有球$5+3+2=10$个，从中任取3个，共有C_{10}^3种情况，取到一红、一白、一黑分别是红球有5种情况，白球有3种情况，黑球有2种情况，故所求概率为

$$p=\frac{5\times3\times2}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

14. 两封信随机地投入四个邮筒,求前两个邮筒内没有信的概率以及第一个邮筒内只有一封信的概率。

解 按题意可用一个有序整数对(a,b)表示两封信投入四个邮筒的情况,a、b可以取1～4中的任何整数,比如(3,2)表示第一封信投入3号邮筒,第二封信投入2号邮筒。于是a有4种取法,b也有4种取法,两封信共有$4\times4=16$种投法。设A表示"前两个邮筒内没有信",则A中的a、b均只能取3、4,只有$2\times2=4$种取法,故

$$P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

设B为"第一个邮筒内只有一封信",则B中的$a=1,b\neq1$或者$a\neq1,b=1$,就有$3+3=6$种取法,故

$$P(B)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

15. 一批产品中,一、二、三等品率分别为0.8、0.16、0.04,若规定一、二等品为合格品,求产品的合格率。

解 设从这批产品中任取一件产品,记$A_i(i=1,2,3)$为取到i等品,则有

$$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=0.16,\quad P(A_3)=0.04$$

再设B为取到合格品,注意到$A_1A_2=\varnothing$,故合格品率为

$$P(B)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.96$$

16. 袋内装有两个5分、三个2分、五个1分的硬币,任意取出5个,求总数超过1角的概率。

解 十枚硬币中任取五枚的所有取法有C_{10}^5种,五枚硬币币值超过1角有如下情况:

若取到两枚5分硬币,则在剩下的八枚硬币中任取三枚即可使币值超过1角,故取法有C_8^3种;

若仅取到一枚5分硬币(C_2^1种取法),则所取到的其他四枚硬币中至少要有两枚2分硬币才能使总币值超过1角,即二枚2分硬币和二枚1分硬币($C_3^2C_5^2$种取法)或者三枚2分硬币和一枚1分硬