高等工科院校适用

高等数学及其应用

南京机械高等专科学校

苏永法 编著

机械工业出版社

高等工科院校适用

高等数学及其应用

南京机械高等专科学校　苏永法　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是为了满足目前国家教委在全国开展的工程专科小范围大幅度专业教育改革试点的教学需要而编写的。

本书内容包括一元微积分、矢量代数和矢函微积分、微分方程、多元微积分、空间解析几何以及级数等。

本书的主要特点是数学与工程原理相互渗透，因此读者在阅读本书时不仅能学到数学的基本知识和方法，同时又能提高运用数学解决实际问题的能力。

本书可作为高等工程专科、职工大学、成人教育的高等数学教材，也可作为广大工程技术人员的参考教材。

高等数学及其应用

南京机械高等专科学校　苏永法　编著

*

责任编辑：钱飒飒　版式设计：张世琴

封面设计：郭景云　责任校对：姚培新

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 · 印张22.75 · 字数562千字

1996年5月第1版第1次印刷

印数 0 001—2 000 定价：24.00元

*

ISBN 7-111-04878-4/O·118(课)

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

ISBN 7-111-04878-4

9 787111 048787 >

前　言

本教材是专为旨在以理论和实践密切结合的方法培养工程第一线的机电工程师而作大幅度专业改革的工程专科而写的数学教材。开卷可知，这不是传统的数学教材加了几个应用的例子，而是一种在高等工程专科教学层次上将数学和应用进行综合的新的尝试，其特点是：

1. 在数学教材中，第一次充分地、大胆地吸收了数百年来工程学家在数学思维实践中所创造的卓有成效的形象思维概念，并进行了整理和发展的尝试

例如用"邻点"这一形象思维概念来代替对极限变化过程的逻辑思考。定义点 $(x+dx)$为点x的"邻点"，于是称$dx=[(x+dx)-x]$为x的无穷小变化单元——x的微元。定义$y(x+dx)=y(x)+y'(x)dx$为等价等式。于是将$dy=y'dx$作为函数变化的形象思维概念——函数y的无穷小变化单元——y的微元。从而引进了可微函数中的微元变化模式，即当自变量变化一个微元dx时，函数y亦变化一个微元dy。并根据微元变化模式证明了函数$y(x)$的微元系数$y'(x)$必为连续函数。指出了由上述形象思维概念建立起来的微元分析法中的逻辑结构，即由等价等式导出的等式仍为等价等式，但当导出两个微元等价相等或两个实数等价相等时，即转化为精确相等。因而使作为与极限方法等价的精确求解方法——微元法更易于理解和运用。

2. 弱化了数学理论教学，加强了数学概念与方法的应用教学

例如，讲极限理论时，以能引出无穷小，无穷大，函数连续、可导、可微和微元概念为度；讲积分时，也不用极限方法定义，而根据函数的微元变化模式直接给出积分定义和牛莱积分公式。

对数学上的微元概念充实各种几何、物理内容，逐步引导学生在微元上应用有关的中学数学和物理公式去解决大学课程中各种简单的非均匀变化问题，有时还借助物理上的微元概念进一步发展出新的数学方法。例如，利用位移元矢量概念直接推出空间曲线、平面曲线的弧微分公式。

3. 专设了微积分的基本概念和基本方法一章

将导数、微分、积分进行并行比较教学，加强微积分基本概念之间的联系，以便于提高大学第一学期开设的其它基础课的起点。

4. 增加了矢量函数微积分基本知识

这样，可以扩大和加强微积分基本概念和方法的应用训练，以利于后继课程与数学课程接轨。

5. 本教材设计了大量的（课内）填空练习，旨在逐步提高读者的自学能力

本教材得到了上海纺织高等专科学校陈政君副教授，南通纺织工学院庄海宜教授的关心和支持，并承蒙他们审阅了全书，在此表示衷心的感谢。

本教材虽已使用过五年，作了三次较大的修改，但限于本人水平有限，尚有不少错误和缺点，敬请同行和学生批评指正。

作者　1995年 4 月

目 录

第一章 函 数

第一节 函数概念

下面按照集合论的观点定义函数概念。

定义1-1 设A、B为两个非空集合，如果按照一个确定的规则f，对于集合A中每一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，则称f为由集合A到集合B的映射。记作

$$f: A \to B$$

如果A中的元素a对应B中的元素b（图1-1），则称b为a的象，a为b的原象。

定义1-2 设有两个非空实数集合D_f、B，如果对于数集D_f中的每一个数x，按照确定的规则f对应B中唯一的一个数y(图1-2)，记作$y=f(x)$，则称f为定义在数集D_f上的函数。数集D_f称为函数f的定义域，数集$B_f=\{y|y=f(x),\ x\in D_f\}$称为函数$f$的值域。显然$B_f\subseteq B$。

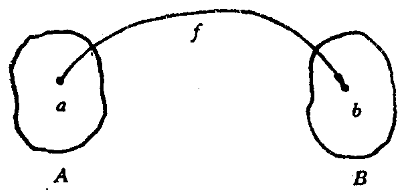

图 1-1

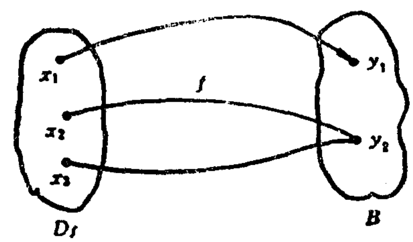

图 1-2

对应规则f可以是一个公式，亦可以是一条曲线或一种表格。

习惯上，称x为自变量，y为因变量，f为函数，而$f(x)$为函数值。由于研究函数总是通过函数值进行的，因此为了方便，以后也常将$f(x)$称为x的函数或将y称为x的函数，常记为$y=y(x)$，这里y既代表对应规则又代表因变量，一词两用。

由于给定了一个对应规律f及其定义域D_f，就完全确定了一个函数。

所以 $y=f(x),\ x\in D_f$ 与 $s=f(t),\ t\in D_f$

是同一个函数，即函数与自变量的记号无关。

又若$f(x)$，$x\in D_f$，$g(x)$，$x\in D_g$，且$D_f=D_g$，$f(x)=g(x)$，则函数$f=g$。

例1-1 $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$，定义域相同，但对应规律不完全相同（$x\geqslant 0$时相同，$x<0$时不同)，因而是不同的函数。

例1-2 $y=|x|$，$y=\sqrt{x^2}$，定义域和对应规律均相同，故为同一函数

例1-3

$$f(x)=x^2,\ x\geqslant -10$$

$$g(x)=(x-1)^2+2x-1,\ x\geqslant -10$$

$$k(y)=y^2,\ y\geqslant -10$$

由于这三个函数的定义域相同，且对于定义域中每一个数，都有相同的函数值，因此$f=g=k$。

注意，上面两个例子中，不同的运算关系或对应规律的不同表达形式，都表示了同一个函数。即函数只决定于对应规律，不决定于对应规律的表达形式。

但任何事物的内容又必须通过一定的形式才能表现出来，函数也不例外，例如函数 $f(x)=2x+1$ 表示函数的自变量 x 与函数值之间的对应关系是通过表达式 $(2x+1)$ 的运算来实现的，因此，$f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$。

例1-4 设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$。

解1 $$f(x+3)=\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+3-2}{x+3-1}\Longrightarrow f(x)=\frac{x-2}{x-1}$$

解2 令 $t=x+3$，则 $x=t-3$

故 $$f(t)=\frac{t-8+1}{t-3+2}=\frac{t-2}{t-1}，\text{即 } f(x)=\frac{x-2}{x-1}$$

练1-1 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$

解1 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}+1=2-(\qquad\qquad)$

可见 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}=1-\cos x$

解2 令 $\sin\dfrac{x}{2}=t$，则 $x=2\arcsin t$，$\cos x+1=\cos 2\arcsin t+1=\underline{\qquad\qquad}$

$\underline{\qquad\qquad\qquad}=2-2t^2$

即 $f(t)=2-2t^2$

$\therefore\quad f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=\underline{\qquad\qquad}=1-\cos x$

有时需要讨论函数 $y=f(x)$ 在一点 x_0 附近有没有定义等问题。设 δ 为一小正数，则开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为以 x_0 为中心，以 δ 为半径的邻域，简称 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\ \delta)$，即 $U(x_0,\ \delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$，有时 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处无定义，但在区间 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$ 内有定义。这种挖掉中心点 x_0 的邻域称为点 x_0 的去心邻域或空心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$，即 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，这两种邻域图示于图1-3上。

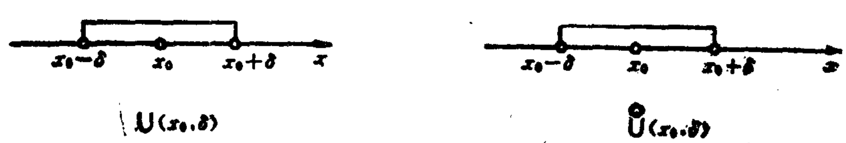

图 1-3

第二节 函数的几个初等性质

以后讨论函数时，往往会论及函数的几个初等性质。

一、函数的有界性

设 M 为某一正常数，若 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in D_f$，则称 f 为 D_f 内的有界函数，否则称 f 在

D_f内无界；又设M为某一常数，若$f(x) \leqslant M$（或$M \leqslant f(x)$），$x \in D_f$则称f在D_f内是有上（下）界的。

例1-5 $y=\frac{1}{x}$在开区间（$-\infty$，　），（0，$+\infty$）内无界，在（$-\infty$，0）内有上界$y=0$，在（0，$+\infty$）有下界$y=0$，在区间[1 $+\infty$)内有界。

二、函数的单调性

若$f(x_1) \leqslant f(x_2)$，$x_1 < x_2$，x_1、$x_2 \in D_f$，则称f在D_f上单调增(升)，记为$f(x)\nearrow$，若等号不成立，则称f在D_f上严格单调增(升)。同样可定义单调减(降)，函数$f(x)$单减，记为$f(x)\searrow$。

例1-6 $y=x^2$在（$-\infty$，$+\infty$）非单调，但在[0，$+\infty$）严格单增，在($-\infty$，0]严格单减。

三、函数的奇偶性

若$f(x)=f(-x)$，$x \in (-a, a)$，则称f为偶函数。

若$f(x)=-f(-x)$，$x \in (-a, a)$，则称f为奇函数。

四、函数的周期性

若$f(x)=f(x+T)$，$T>0$，$x+T$、$x \in D_f$，则称f为周期函数。

注意：周期函数的周期一般是指其最小正周期T，但并非每个周期函数都存在最小正周期T，例如常数函数$y=C$是周期函数，因为$y(x+T)=C$，但T为任何大于零的数，无最小者。

练1-2　判别$f(x)=\sin^2 x$的周期性。

解　$\because$ $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}($　　　　$)$

而　$\cos 2x=\cos 2(x+\_\_\_\_)$

$\therefore f(x)$是________函数，具有最小正周期$T=$____。

第三节　反　函　数

由函数定义可知，函数实质上是两个数集D_f与B_f之间的一种单值对应：D_f中的一个数唯一地映射到B_f中的一个数。称这种对应为单值对应而不是一一对应，是因为D_f中不同的数也可能对应B_f中同一个数。如果D_f中的一个数唯一对应B_f中的一个数，并且B_f中的一个数也唯一对应D_f中的一个数，则集合D_f、B_f间的对应称为一一对应。在一一对应的情况下，显然映射可以反过来进行，即由B_f向D_f映射，从而得到反函数定义。

定义1-3　设函数f定义在数集A上，其值域为数集B。如果对于数集B中每一个数y，数集A中都有唯一的一个数x，使$f(x)=y$，记由y对应于x的规则为f^{-1}，则称f^{-1}为f的反函数，也常称$x=f^{-1}(y)$为$y=f(x)$的反函数，两者图形相同。但习惯上用x表示自变量，故将$y=f(x)$的反函数写成为$y=f^{-1}(x)$，此时二者图形对称于直线$y=x$，如图1-4所示。

由反函数定义可知，图1-5中的函数f、g在区间[a，b]上必有反函数。由图可见，f、g在[a，b]上均是单调的，由此可得结论：

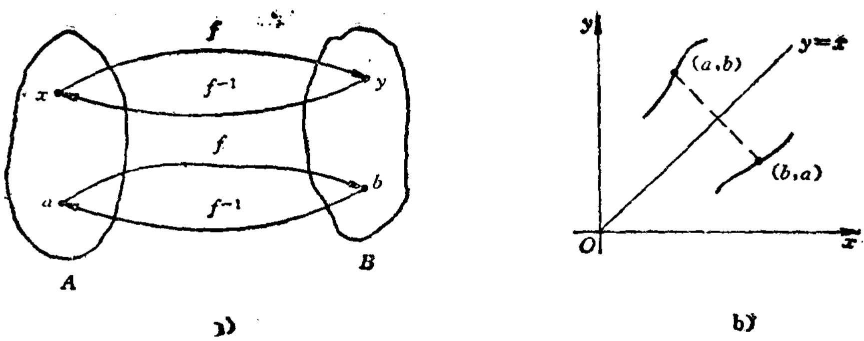

图 1-4

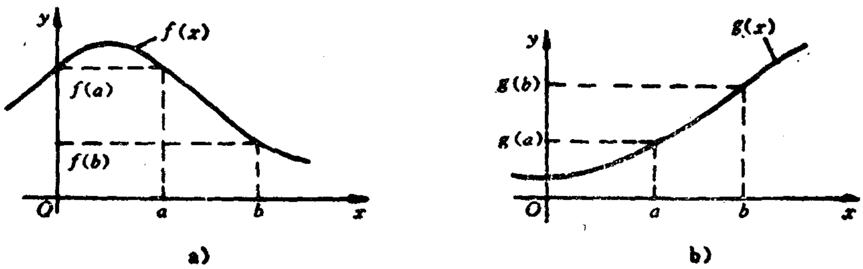

图 1-5

定理1 严格增（减）的函数必有严格增（减）的单值反函数

例1-7 求 $y=f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$ 的反函数。

解 $y=x\,(x<1,\ y<1)$的反函数为$x=y\,(y<1)$；$y=x^2\,(1\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant 16)$的反函数为$x=\sqrt{y}\,(1\leqslant y\leqslant 16)$；$y=2^x\,(x>4,\ y>16)$的反函数为$x=\log_2 y\,(y>16)$。合并上述结果，得反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases} y, & -\infty<y<1 \\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16 \\ \log_2 y, & 16<y<+\infty \end{cases}$$

对换x，y得

$$y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty \end{cases}$$

例1-7中的函数是在其定义域（$-\infty$，$+\infty$）内的不同区间上有不同表达式的函数。这种形式的函数称为分段函数。分段函数在工程学上常见。

例1-8 脉冲发生器产生一个如图1-6所示的三角波，它的电压u与时间t的函数关系为

$$u=\begin{cases} \frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10 \\ -\frac{3}{2}(t-20), & 10<t\leqslant 20 \end{cases}$$

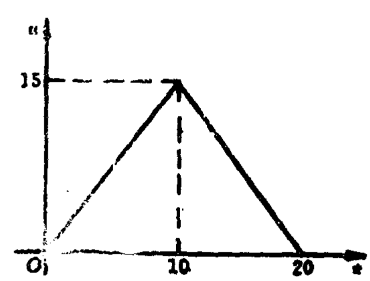

图 1-6

第四节 基本初等函数

基本初等函数共六种：

常数函数 $y=C$，C是常数； 幂函数 $y=x^\mu$，μ是实数；

指数函数 $y=a^x$，$(a>0)$； 对数函数 $y=\log_a x$，$(a>0)$；

三角函数 $y=\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg} x$等； 反三角函数 $\arcsin x$，$\operatorname{arc\,tg} x$等

以上六种函数，是构成较复杂的初等函数的基本元素，所以称为基本初等函数。

在微积分计算中常会遇到三角恒等变换，今将常用公式摘录如下：

$\sin^2x+\cos^2x=1$ $\quad \sec x=1/\cos x$ $\quad \csc x=1/\sin x$ $\quad 1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2x$ $\quad 1+\operatorname{ctg}^2x=\csc^2x$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$ $\quad \sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$

$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\quad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}$

正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

第五节 函数运算 初等函数

函数可以通过加、减、乘、除和复合运算组合起来形成更为复杂的函数。例如$\sin x\cos x$是正弦函数与余弦函数之积，$\sin(\cos x)$是余弦函数在正弦函数里的复合。

定义1-4 设f、g为分别定义在数集D_f、D_g上的两个函数，则：

一、函数的和、差、积

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$；$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$；$(fg)(x)=f(x)g(x)$

$D_{(f+g)}=D_{(f-g)}=D_{fg}=D_f\cap D_g$

二、函数的商

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ D_{(f/g)}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}$$

三、函数的复合

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\ D_{(f\circ g)}=\{x\,|\,x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}$$

例1-9 设$f(x)=\sqrt{x}$，$D_f=[0,+\infty)$，$g(x)=2\sqrt{x}$，$D_g=[0,+\infty)$，

则$(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}=2x$，$D_{fg}=[0,+\infty)$。

注意：$(fg)(x)=2x$，与$h(x)=2x$是两个不同的函数，因为后者的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

例1-10 设$f(x)=\sqrt{x}$，$D_f=[0,+\infty)$，$g(x)=x^2+1$，$D_g=(-\infty,+\infty)$

则 $$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1}$$

$$D_{f\circ g}=\{x\mid x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=(-\infty,+\infty)$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+1=x+1$$

$$D_{g\circ f}=\{x\mid x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=[0,+\infty)$$

由复合函数的定义和例1-10可知，复合函数指的仍然是一个对应规律，只不过它是由两个对应规律复合起来的一个对应规律罢了。我们将$f\circ g$看成是函数间施行的一种运算，称为复合运算。由例1-10可知，复合运算一般不满足交换律。

例1-11 设$f(x)=2x+1$，求一个函数$g(x)$，使$(f\circ g)(x)=x^3$。

解 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2g(x)+1=x^3 \quad\Longrightarrow g(x)=\frac{1}{2}(x^3-1)$

练1-3 设$f(x)$、$x\in(0,1]$，求$F(x)=f(\sin x)$，$G(x)=\sin f(x)$的定义域。

解 设$g(x)=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$D_F=D_{f\circ g}=\{x\mid x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=\{x\mid x\in D_g\wedge g(x)\in(\qquad]\}$$

$$=\{x\mid 2k\pi<x<\_\_\_\_\_\_,\ (k=0,\pm1,\pm2\cdots)\}$$

$$D_G=D_{g\circ f}=\{x\mid x\in D_f\wedge f(x)\in D_g\}=(0,\_\_\_\_\_\_]$$

在微积分的运算中需熟练分析复合函数的复合层次。分析复合函数的层次，一般由外向里逐步进行。

例1-12 分析复合函数$y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$的复合层次。

解 该函数的复合层次可表示为

$$y=u^2,\ u=\arcsin v,\ v=\sqrt{w},\ w=1-x^2$$

变量间的关系可用变量链来表示

$$y-u-v-w-x$$

其中，x称为自变量，y称为因变量，u、v、w称为中间变量。

练1-4 将函数$y=\sqrt{\dfrac{1-(1-x^2)^2}{1+(1-x^2)^2}}$按变量链$y-u-v-x$，写出变量间的函数关系。

$y=f_1(u)=\sqrt{u}$，$u=f_2(v)=\_\_\_\_\_\_\_\_$，$v=f_3(x)=$

即$y=(f_1\circ f_2\circ f_3)(x)$，由三个函数复合而成。

根据函数运算定义，可将六种基本初等函数，通过有限次的加、减、乘、除和复合运算构造出一类较为复杂的，但仅用一个式子表示的函数，这类函数称为初等函数。

分段函数一般不属于初等函数，但如本章第三节例1-8（图1-6）中的分段函数仍为初等函数，因为它可用一个式子表示为$u(t)=\frac{30}{2}-|________|$，$(0\leqslant t\leqslant 20)$

例1-13 $y^2\log_a(1+\sin^2x)-2^x$是初等函数。

例1-14 $y=x^x$，$(x>0)$是初等函数，因为$y=x^x=e^{x\ln x}$是x的复合函数。

练1-5 求函数$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的定义域。

解 $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$是$f(x)=e^x(-\infty<x<+\infty)$和$g(x)=________$（$x>\_\_\_\_$，$x<\_\_\_\_$）的复合

即 $y=(f\circ g)(x)=f[g(x)]=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

于是 $D_y=D_{f\circ g}=\{x\mid x\in D_g\wedge g(x)\in D_f\}=(x>$________, $x<$________$)$

初等函数中有一类相当重要的函数称为双曲函数，它们分别定义为

双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

双曲余弦函数 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

上式中 $e=2.71828\cdots$

双曲正切函数 $y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

设 $y_1=\mathrm{sh}x$ $y_2=\mathrm{ch}x$

则
$$y_1^2-y_2^2=-1$$

此为等轴双曲线方程，双曲函数由此而得名。这类函数在科技书中是常见的。

用数学工具解决实际问题时，通常要建立能反映实际问题内在规律的一种数学结构，这种数学结构称为实际问题的数学模型，简称数模。在大学各个应用课程中，将会学到各种建模方法。其中，反映实际问题中变量间的函数关系式即为最基本的数学模型。例如 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 就是自由落体的数学模型。本章练习中，将给出凭几何直观即能分析出变量间函数关系式的练习。

习　题

在题1-1～1-4中 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同，为什么？

1-1 $f(x)=\lg(x^2)$ 与 $\varphi(x)=2\lg x$

1-2 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$

1-3 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $\varphi(x)=1$

1-4 $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\arcsin(\sin x)$

判断题1-5～1-8中函数的奇偶性。

1-5 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

1-6 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\in(-1,1)$

1-7 $f(x)=x^3\cos x$

1-8 $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{2}{3}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

求题1-9～1-11中函数的最小正周期。

1-9 $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

1-10 $y=1+\mathrm{tg}x$

1-11 $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$

求题1-12～1-14中函数的图形。

1-12 $y=\sin x+\sin 3x$

1-13 $y=3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

1-14 $y=x\cos x$

1-15 根据函数定义，写出 xOy 上半平面内以 R 为半径的半圆曲线的函数式：$y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$。

1-16 试将绝对值函数 $y=|x|$ 用 x 的符号函数 $\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 表示。

求题1-17～1-18中的反函数。

1-17 $y=1+\ln(x+2)$, $-2<x<+\infty$

1-18 $y=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$

判断题1-19、1-20中的函数间的运算是否可行？

1-19 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-(x+1)}\Rightarrow y=\sqrt{x}+\sqrt{-(x+1)}$

1-20 $y=\arcsin u$、$u=2+x^2\Rightarrow y=\arcsin(2+x^2)$

用中间变量表示题1-21～1-23中复合函数的结构层次。

1-21 $y=\cos^3(1-2x)$

1-22 $y=\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+6\right)}$

1-23 $y=\lg(\arcsin x)$

1-24 设$f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\lg x$，求$(f\circ\varphi)(x)$，$(f\circ f)(x)$，$(\varphi\circ f)(x)$，$(\varphi\circ\varphi)(x)$

1-25 设$f(x)=e^{x^2}$，$(f\circ\varphi)(x)=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$及其定义域。

1-26 设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，求$f(x^2)$的定义域。

1-27 直梁OAB由两种材料接合而成。OA长为1单位，其线密度(即单位长度上的质量)为2；AB长为2单位，其线密度为3。设M为直梁上任意一点。试写出OM一段的质量m与OM长x之间的函数关系(提示：$x\in[0,3]$)。

1-28 工程上为将转动转化为往复直线运动(或相反)，广泛采用曲柄连杆机构(图1-7)。设曲柄$AO=r$，连杆$AB=l$，若曲柄AO以等角速度ω逆时针旋转，求滑块B的运动规律$x(t)$。

提示：过点A作$AC\perp OB$，$x=OC+CB$可分别在直角三角形ACO、ACB中确定，再将$\varphi=\omega t$代入。

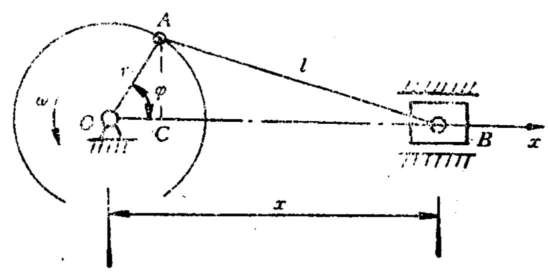

图 1-7

第二章　极限问题与函数的连续性

第一节　极 限 概 念

自然界中有一种变化过程称为极限变化过程。例如，钳工师傅用锉刀将一个正四边形通过如图2-1所示的正八边形，正十六边形等等，逐步加工成圆的过程，就是一个极限过程。从几何上看，这个过程是加工的正多边形的边数无限增多的极限过程。在这个极限过程中，正多边形的边数无限增多时，正多边形与圆的差别就会无限减小。可以预料，这种差别是会趋于0的。描述这个过程，可由以下两种等价的说法：

1）加工中的正多边形，当边数无限增多时，以圆为极限。

2）加工中的正多边形，当边数无限增多时，正多边形与圆的差别以0为极限。

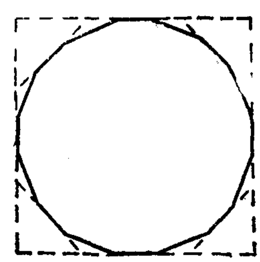

图　2-1

为了便于将上述极限过程用数学形式表示出来，我们可以给圆定个标准分值A，而正多边形的圆度评分值显然是正多边形边数n的函数，记为$x(n)$。于是上述对钳工锉圆的极限过程的两种等价描述可表示为

$$\lim_{n\to+\infty} x(n)=A \tag{2-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x(n)-A|=0 \tag{2-2}$$

式中，$n\to+\infty$表示正多边形边数无限增多的极限过程；$x(n)$表示该极限过程中的变量；A表示变量$x(n)$的极限值。

下面撇开具体事物变化的极限过程，抽象地研究函数$f(x)$的极限问题。

对于函数$f(x)$，极限过程可有以下六种：

极限过程$x\to+\infty$，表示x由小变大，且无限变大的过程；

极限过程$x\to-\infty$，表示$-x$由小变大，且无限变大的过程；

极限过程$x\to\infty$，表示$|x|$由小变大，且无限变大的过程；

极限过程$x\to x_0^-$，表示x从小于x_0而向x_0无限趋近的无限变化过程；

极限过程$x\to x_0^+$，表示x从大于x_0而向x_0无限趋近的无限变化过程；

极限过程$x\to x_0$表示x从点x_0左、右向点x_0无限趋近的无限变化过程。

在给出极限定义之前，我们先一般地观察一下函数$f(x)$的极限变化的几何图象。在图2-2中，画出了$x\to x_0$，$x\to\infty$两种极限过程，其它极限过程类同。在图2-2中，ε是预先给定的任意小正数，用$|f(x)-A|<\varepsilon$来表示$f(x)$向A趋近的程度。图2-2a表示，若在极限过程$x\to x_0$中，$f(x)$有极限值A，则必然存在一个x_0的δ邻域，当x进入该邻域时，$|f(x)-A|$小于预先给定的任意小正数ε。图2-2b表示，若在极限过程$x\to\infty$中，$f(x)$有极限值A，则必然存在一个大正数N，当$|x|>N$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$。由上述几何直观，我们发现，

若在某一极限变化过程中，$f(x)$ 有极限值 A，则必然存在一个变化时刻，在此时刻以后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，于是给出如下定义：

定义2-1 设 A 为常数，函数 $f(x)$ 在某一极限过程中有定义，若对任给的小正数 ε，存在一个变化时刻，在此时刻后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在此极限过程中的极限值，记作 $\lim f(x)=A$，或 $f(x)\to A$。

若 $A=0$，就产生了无穷小量的概念。

定义2-2 在某种极限过程中，以 0 为极限的变量称为无穷小量。

由定义2-2知，**0是无穷小量**，因为在任何极限过程中，$\lim 0=0$。

无穷小量的运算性质：①有限个无穷小量之和仍为无穷小量；②无穷小量与有界量之积仍为无穷小量；③有限个无穷小量之积仍为无穷小量。

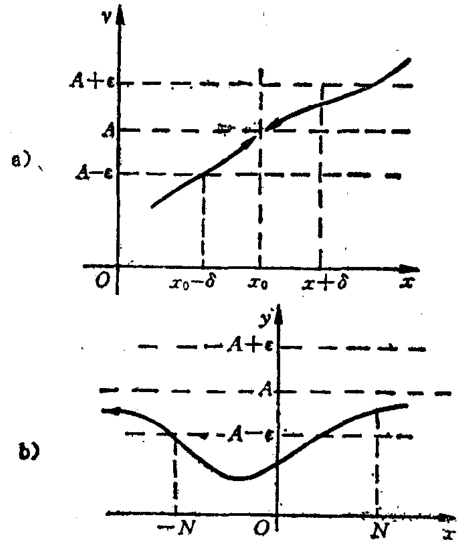

图 2-2

例2-1 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$。

$\because\ \left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1 \quad \therefore\ \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

函数的极限与无穷小量的关系：

$$\because\ \lim f(x)=A \Leftrightarrow \lim|f(x)-A|=0 \tag{2-3}$$

若记 $f(x)-A=\alpha(x)$，则 $\alpha(x)$ 为无穷小量。

$$\therefore\ \lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\ \alpha(x)\to 0 \tag{2-4}$$

即 $\lim f(x)=A$ 的充要条件是变量 $f(x)$ 等于 A 加一个无穷小量。

由式（2-4）可见，若 $A>0$，则因 A 不是无穷小量，故 $|A|>|\alpha(x)|$，从而 $f(x)>0$，反之，若 $A<0$，则 $f(x)<0$，于是有结论：

定理2-1（保号性）若 $\lim f(x)=A>0$，（或 $A<0$）则极限过程存在某个时刻，在此时刻以后，恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

根据定理2-1，利用反证法，便可证明下述定理。

定理2-2 若在极限过程的某时刻以后恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），且 $\lim f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）。

无穷小量与无穷大量的关系：

若在某极限过程中，变量 $f(x)$ 的绝对值越变越小，则变量 $1/f(x)$ 的绝对值就越变越大，显然

$$\lim f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\frac{1}{f(x)}=\infty,\ f(x)\neq 0 \tag{2-5}$$

即不为0的无穷小量的倒数为无穷大量。

上述极限理论称为潜无限理论。在该理论中的无穷小量称为潜无穷小量，无穷大量称为潜无穷大量，在实数轴上并无确定的点与之对应，故它们都不是数，只反映变量无穷变化的一种变化趋势。

例2-2 求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2}a\dfrac{x^2-1}{x-1}$。

解 当$x=1$时，$f(1)=\frac{0}{0}$，是不定式。

为观察在$x\to1$的极限过程中，函数$f(x)$的变化趋势，我们列表计算变量$|f(x)-a|$在这个极限过程中的变化趋势：

x	0.999	0.9999		1^-	1^+		1.0001	1.001
$\|f(x)-a\|$	$0.0005a$	$0.00005a$	…	0	0	…	$0.00005a$	$0.0005a$

表中结果表明，当$x\to1$，$|f(x)-a|\to0$ 于是：

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2}a\frac{x^2-1}{x-1}=a$$

这个结果可通过以下算法直接得到：

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{2}a\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}a\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}a(x+1)$$

$$=\frac{1}{2}a\lim_{x\to1}(x+1)=\frac{1}{2}a\cdot2=a$$

这是由于极限过程$x\to1$是x只能无限趋近于1而永远也不能等于1的一个无限变化过程，因此在这个极限过程中$(x-1)\neq0$，在代数学上能将$(x-1)$从分子分母中消去。

在这个例子中，虽然$f(x)$在点$x=1$无意义，但在$x\to1$时却有极限。这一事实是具有普遍性的。因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$一般表示：

1）这是一个x从点x_0左、右趋向点x_0的无限变化过程。

2）考察$f(x)$在$x\to x_0^-$和$x\to x_0^+$的极限过程中的变化趋势，如果在左、右极限过程中，分别存在某一时刻，在那时刻以后，均恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon\text{，则}\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

即

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

因此，在求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$中，只要求$f(x)$在点$x_0$的某个邻域内有定义，而不管在点$x_0$上有无定义。

例2-3 函数$f(x)=[x]$称为取整函数，它取不大于x的最大整数。例如$[3]=3$，$\left[\frac{1}{2}\right]=0$，$[2.16]=2$，$[-5.6]=-6$由图2-3可见

$$\lim_{x\to2^-}[x]=1\qquad\lim_{x\to2^+}[x]=2$$

一般地对任何整数n

$\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$，$\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$，而$\lim\limits_{x\to n}[x]$不存在。

例2-2的结果有一种有趣的几何解释。