职工高等工业专科学校
高等职业技术教育

试用教材

高等数学
学习指导与题解

白富志　主编

机械工业出版社

职工高等工业专科学校
高等职业技术教育
试用教材

高等数学学习指导与题解

主　编　白富志
副主编　孟昭凤　曹光华

机械工业出版社

本书是白富志教授主编的职工高等工业专科学校和高等职业技术院校教材《高等数学》(第2版) 配套的辅助教材，也可与其它类似教材配合使用。书中系统地介绍了各章的学习目的和要求、重点和难点、学习方法、内容提要，对教材的大部分思考题和习题作了提示性解答，并根据教学大纲要求增添了部分课堂讨论的内容，以供参考。

本书可作为高等职业技术院校及职大、业大、电大等院校各专业的学生学习《高等数学》的辅导教材和自学参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习指导与题解/白富志主编.—北京：机械工业出版社，1998.8

职工高等工业专科学校高等职业技术教育试用教材

ISBN 7-111-06495-X

Ⅰ.高… Ⅱ.白… Ⅲ.高等数学-高等学校：专业学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 16652 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码 100037）

责任编辑：冯 铁 王世刚 版式设计：霍永明 责任校对：申春香

封面设计：姚 毅 责任印制：路 琳

北京机工印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行

2002年10月第1版第3次印刷

787mm×1092mm 1/16・17.25印张・420千字

6 501—8 000 册

定价：26.00 元

前　言

为适应我国高等职业技术教育的蓬勃发展，加强教材的配套与建设，我们受中国机械工程学会职工高等教育学会的委托，根据国家教委1992年18号文件的精神，按照基础课和专业基础课，以应用为目的，以必需、够用为度，既体现高等职业技术教育的特色，又体现不同产业部门需要的特色，按照应用型和技艺型两类课程设置要求，由白富志教授编写了《高等数学教学大纲》、《教学大纲说明书》，并按大纲要求编写《高等数学》（第2版）一书，同时，依据大纲及教材内容编写了《高等数学学习指导与题解》。

在编写中，尽量考虑高等职业技术教育的特点，力求结构紧凑、语言简练，深入浅出、通俗易懂。各章内容均含答疑辅导、习题解答、小结、自测题等。参加本书编写工作的有（按姓氏笔划为序）：白富志、田明欣、米全锁、关纬藩、孟昭凤、皇甫守先、曹光华、董清永。全书由白富志教授任主编，孟昭凤、曹光华任副主编。

由于编者水平有限，编写中的错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

1998年2月26日

目　录

第一章　函　　数

一、答疑辅导

1. 函数的值与自变量的值是一一对应的，这种说法对吗？

答：这种说法不对。设自变量值域为集 D，函数的值域为集 M。集 D、M 的元素一一对应，即 D 中的每一元素，M 中必有唯一元素与之对应；M 的每一元素，D 中必有唯一元素与之对应。实质上，函数概念只要求对于一个自变量值，有唯一确定的函数值与之对应。如函数 $y = f(x) = x^2$，当 $x = 1$ 时，$f(1) = 1$；当 $x = -1$ 时，$f(-1) = 1$，与函数值 1 相对应的自变量值就不是唯一的。

2. 函数与函数表达式是不是一回事？

答：不是一回事。函数是自变量与作为函数的因变量之间的对应法则，在 $y = f(x)$ 中，这种对应法则用"f"这个符号来表示。函数表达式是表示这种对应法则的一种方式，所以同一个函数可以有不同的表达式。

例如　$y = |\sin x|$　　$y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

$$y = \begin{cases} \sin x & 2k\pi \leqslant x < (2k+1)\pi \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & (2k+1)\pi \leqslant x < 2(k+1)\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

表示同一函数。由此亦说明，分段函数虽然可含有几个表达式，但它不是表示几个函数，仅表示一个函数。

3. 怎样理解点 x_0 的 δ 邻域？

答：一般来说，邻域是要多小有多小的开区间；点 x_0 的 δ 邻域就是以点 x_0 为中心的开区间，邻域内的点集中在点 x_0 的附近。

4. 函数关系一定能表示为一个解析式吗？

答：不一定，我们所研究的函数关系，有用一个解析式表示的，也有用图像法或表格法表示的。

另外，有些函数即使用解析式表示，也不是非用一个式子不可，根据实际需要，有时要用几个式子来表示一个函数，而这与函数的定义并无矛盾，我们称这类函数为分段函数。如函数

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ 2x & (1 \leqslant x \leqslant 2) \\ x^2 - 4x + 8 & (2 < x \leqslant 3) \end{cases}$$

就是用三个解析式表示一个函数的分段函数。

5. 在研究函数单调性时应注意什么问题？

答：应注意明确指出函数的单调区间，也就是说，应指明函数 $f(x)$ 在什么范围内具有单调

性，否则，就容易发生错误。

例如，在整个数轴上就无法讨论函数 $f(x) = x^2$ 的单调性，而只能在 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, \infty)$ 内分别研究。

6. 如何判断函数 $f(x)$ 是否为周期函数？若 $f(x)$ 是周期函数，如何求出周期 T？

答：可根据周期函数的定义，判断一个函数 $y = f(x)$ 是否为周期函数。若 T 为函数 $y = f(x)$ 的周期，则在自变量的取值范围内总有：

$$f(x) = f(x + T)$$

即 $f(x) - f(x + T) = 0$ 或 $f(x + T) - f(x) = 0$。

在上面两式中，将 T 看作未知量求解，若解出的 T 依赖于自变量 x 或为零，则 $f(x)$ 不是周期函数；若可以求出不依赖于 x 的非零常数解（一般都不唯一），其中最小的正数解就是所求的周期。

例如，函数 $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$ 的周期（ω、θ 为常数，$\omega > 0$）可求解如下：

因为

$$f(t + T) - f(t) =$$
$$\sin[\omega(t + T) + \theta] - \sin(\omega t + \theta) =$$
$$2\sin\frac{\omega T}{2}\cos\left(\omega t + \theta + \frac{\omega T}{2}\right)$$

若 T 为周期，则应有

$$f(t + T) - f(t) = 0$$

从而

$$\sin\frac{\omega T}{2} = 0 \tag{1}$$

或

$$\cos\left(\omega t + \theta + \frac{\omega T}{2}\right) = 0 \tag{2}$$

由式(1)解得最小非零正数解为：$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

由式(2)解得最小非零正数解为：$\omega t + \theta + \dfrac{\omega T}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

即

$$T = \frac{2\left[\frac{\pi}{2} - (\omega t + \theta)\right]}{\omega}$$

由于式(2)的解依赖于自变量 t，故它不是函数的周期，所以，函数 $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$

又如函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 是否为周期函数，可判定如下：

若函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 是周期函数，则必存在非零常数 T，使 $f(x + T) - f(x) = 0$ 成立，即

$$\sin\frac{1}{x + T} - \sin\frac{1}{x} = 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + T} + \frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + T} - \frac{1}{x}\right) =$$
$$2\cos\frac{2x + T}{2x(x + T)}\sin\frac{-T}{2x(x + T)} =$$
$$-2\cos\frac{2x + T}{2x(x + T)}\sin\frac{T}{2x(x + T)} = 0$$

于是有

$$\sin\frac{T}{2x(x + T)} = 0 \tag{1}$$

或
$$\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0 \tag{2}$$
显然不存在满足式(1)、(2)两式成立的非零常数解T,所以,函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$不是周期函数。

7. 是不是任何两个函数都可以复合起来,成为一个复合函数?

答:不是,例如$y=\ln z$和$z=-(x^2+1)$就不能复合成为y对x的复合函数。因为函数$y=\ln z$的定义域为$z>0$,而函数$z=-(x^2+1)$的值却永远小于零,故对任何x的值,y都没有定义。

8. 学习复合函数时应注意什么问题?

答:应注意下面三个问题:

(1) 复合函数并不是一类新的函数,它只是反映某些函数在结构方面的某种特点。

(2) 函数的复合运算是对函数关系的扩展,其作用是把复杂的函数分解成简单的函数关系来认识。把复杂问题化为简单问题来研究。那么,什么样的函数关系是简单函数关系呢?根据我们对函数关系的研究得出的结论是,基本初等函数是简单的函数,因而,一个复杂函数如果是由简单函数复合而得,究竟如何复合而得?就看它是由哪些基本初等函数复合而得即可。

(3) 两个函数复合后,函数的定义域可能发生变化,例如,由$y=\ln z$和$z=1+x$复合后得到y对x的复合函数$y=\ln(x+1)$,其定义域为$x>-1$的一切实数。而函数$z=x+1$的定义域为全体实数。

(4) 在研究复合函数时,很重要的一点就是,根据复合函数的结构,将它分解成几个简单函数时,应从外到里一层一层地分解,千万不要漏层。

例如,复合函数$y=\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$的最外层是函数$x=\sin u$;第二层为幂函数:$u=v^{-\frac{1}{2}}$;最里层是个多项式$v=x^2+1$。

又如,$s=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$($\omega$、$l$、$r$为常数)是两个复合函数$u=r\cos\omega t$和$v=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$之和,其中第一个函数由$u=r\cos\theta\quad\theta=\omega t$复合而成,第二个函数由$v=\sqrt{y}$,$y=l^2-r^2z\quad z=\psi^2,\psi=\sin\phi,\phi=\omega t$复合而成。

9. 为什么把$y=f(x)$的反函数$x=\phi(y)$常写成$y=\phi(x)$呢?

答:由于习惯上总是用字母x表示自变量,用字母y表示函数,用x轴代表自变量轴,用y轴代表函数轴,所以,常把反函数$x=\phi(y)$写成$y=\phi(x)$。

例如,把$y=x+1$的反函数$x=\frac{y-1}{2}$写成$y=\frac{x-1}{2}$

这样做,虽然表示自变量与因变量的字母改变了,但函数关系并没有改变,函数的"结构"是完全一样的,而且函数的定义域也没有发生变化,所以,函数$x=\phi(y)$与$y=\phi(x)$是表示同一函数。例如,函数$x=\frac{y-1}{2}$与$y=\frac{x-1}{2}$就是同一个函数。

10. 分段函数是初等函数吗?

答:由于分段函数不是用一个解析式表示的函数,所以,不是初等函数。

二、习题解答

(一) 习题 1-1

1. 下列各题中两个函数是否相同?为什么?

(1) $y=\frac{x}{x}$ 和 $y=1$　　　(2) $y=\lg x^3$ 和 $y=3\lg x$

解(1) $y=\frac{x}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$y=1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$

两函数的定义域不同,故不是同一函数。

(2) 由于函数 $y=\lg x^3$ 的定义域和对应法则分别与 $y=3\lg x$ 的定义域和对应法则相同,所以二者是同一函数。

题后话:函数概念的要点是定义域和对应法则。定义域不同或对应法则不同,则必不是同一函数。对应法则是否相同,有时可直接看出,有时则从值域是否相同来判别。定义域和对应法则完全相同,则是同一函数。这说明函数的异同与用什么字母表示自变量和因变量无关。

2. 确定下列函数的定义域

(1) $y=\ln\arcsin x$　　　(2) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$

(3) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}+\ln(2x-3)$　　　(4) $y=\arccos\frac{x-1}{2}+\ln(4-x^2)$

(5) $y=\frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$　　　(6) $y=\log_3\log_6\log_7 x$

解　(1) 要使函数有意义,须使

$$\begin{cases}\arcsin x>0\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

解得
$$0<x\leqslant 1$$

则
$$y=\ln\arcsin x \text{ 的定义域为}(0,1]$$

(2) 要使函数有意义,须使

$$\begin{cases}1-x>0\\x+2\geqslant 0\end{cases}$$

解得
$$-2\leqslant x<1$$

则
$$y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2} \text{ 的定义域为}[-2,1)$$

(3) 要使函数有意义,须使

$$\begin{cases}x-2\neq 0\\2x-3>0\end{cases}$$

解得
$$\frac{3}{2}<x<2 \text{ 或 } 2<x<+\infty$$

所以
$$y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}+\ln(2x-3) \text{ 的定义域为}\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$$

(4) 要使函数有意义,须使

$$\begin{cases}-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1\\4-x^2>0\end{cases}$$

解得
$$-1\leqslant x<2$$

所以
$$y=\arccos\frac{x-1}{2}+\ln(4-x^2) \text{ 的定义域为}[-1,2)$$

(5) 要使函数有意义，须使

$$\begin{cases}4-x\geqslant 0\\ x-1>0 \text{ 且 } x-1\neq 1\end{cases}$$

解得 $$1<x\leqslant 4 \text{ 且 } x\neq 2$$

所以 $$y=\frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)} \text{ 的定义域为}(1,2)\cup(2,4]$$

(6) 要使函数有意义，须使

$$\begin{cases}\log_6\log_7 x>0\\ \log_7 x>0\\ x>0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\log_7 x>1\\ x>1\\ x>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>7\\ x>1\\ x>0\end{cases}$

则 $$x>7$$

所以 $$y=\log_3\log_6\log_7 x \text{ 的定义域为}(7,+\infty)$$

题后话：求函数的定义域归结为解不等式或解不等式组。若归结为不等式组，则应由各不等式解的交集确定函数的定义域。另外，还要注意函数的实际意义。例如，在研究圆面积 A 与半径 r 的关系 $A=\pi r^2$ 时，应保证半径 $r>0$；在研究距离 s 与时间 t 的关系 $s=vt$（速度 v 为常数）时，应保证时间 $t\geqslant 0$；数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 应取正整数等等。

若函数式后面不加注明，通常就把定义域理解为使函数表达式有意义的那些自变量值的全体，在这种情况下，定义域也叫函数的存在域。

3. 写出下列函数关系

(1) 把球的体积 V 表示为它的表面积 S 的函数。

(2) 半径为 R 的球内，有一内接圆柱体，试将圆柱体的体积表示为高的函数。

解(1) 因为 $S=4\pi R^2$，　所以 $R=\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3=\frac{\pi}{6}\left(\frac{S}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}(S\in(0,+\infty))$$

(2) 设圆柱体的底面半径为 r，高为 h，则圆柱体体积

$$V=\pi r^2 h$$

又因 $r^2=R^2-\left(\dfrac{h}{2}\right)^2=R^2-\dfrac{h^2}{4}$　代入上式有

$$V=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h\qquad h\in(0,2R)$$

题后话：运用数学工具解决实际问题，首先要把问题中的数量关系用数学式子表示出来，如果数量之间是变量关系，就需要把问题中变量之间的函数关系用数学式子表示出来。

4. 求下列函数值

(1) $F(x)=2^{x-3}$　求 $F(0)$、$F(1)$、$F(-3)$。

(2) $y=3\sin\theta+1$，求 $y|_{\theta=0}$，$y|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$，$y|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}$

解　(1) $F(0)=2^{0-3}=\dfrac{1}{8}$　$F(1)=2^{1-3}=\dfrac{1}{4}$　$F(-3)=2^{-3-3}=\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{1}{64}$

(2) $y|_{\theta=0}=3\sin 0+1=1\quad y|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=3\sin\frac{\pi}{4}+1=\frac{3}{2}\sqrt{2}+1$

$y|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2$

5. $f(x)=x^3-5x$，证明

(1) $f(-2)=-f(2)$　　　　(2) $f(-x)=-f(x)$

证明：(1) $f(-2)=(-2)^3-5\times(-2)=2\qquad -f(2)=-(2^3-5\times 2)=2$

所以 $$f(-2)=-f(2)$$

(2) $f(-x)=(-x)^3-5\cdot(-x)=-x^3+5x=-(x^3-5x)=-f(x)$

得证。

6. $f(t)=t^2+t-2$，求 $f(t)=0$ 时的 t 值。

解　由 $f(t)=0$ 得

$$t^2+t-2=0$$

即 $$(t+2)(t-1)=0$$

所以 $$t=-2\text{ 或 }t=1$$

7. 设 $A=\{1,3,5,7\}$，$f(x)=x^3$，求 f 的值域。

解　f 的值域 $=\{1^3,3^3,5^3,7^3\}=\{1,27,125,343\}$

(二) 习题 1-2

1. 指出下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x)^2$　　(2) $y=3x^2-x^3$　　(3) $y=x-x^2$

(4) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$　　(5) $y=2^x$　　(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

解　(1) 因 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)]^2=x^2(1+x)^2\neq -f(x)$

显然 $$f(-x)\neq f(x)$$

所以 $y=x^2(1-x)^2$ 是非奇非偶函数。

(2) 因 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq -f(x)$

显然 $$f(-x)\neq f(x)$$

所以 $y=3x^2-x^3$ 是非奇非偶函数。

(3) 因 $f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2\neq -f(x)$

显然 $$f(-x)\neq f(x)$$

所以 $y=x-x^2$ 是非奇非偶函数。

(4) 因 $f(-x)=(-x)-\frac{(-x)^3}{6}+\frac{(-x)^5}{120}=-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}=$

$$-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)=-f(x)$$

所以 $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ 为奇函数。

(5) 因 $f(-x)=2^{-x}\neq -f(x)$

又　$f(-x)\neq f(x)$

所以 $y=2^x$ 是非奇非偶函数。

(6) 因 $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$

所以 $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 是偶函数。

2. 设 $f(x)=2x^2+6x-3$，求 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并决定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数？哪个是偶函数？

解 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\dfrac{1}{2}[(2x^2+6x-3)+2(-x)^2+6(-x)-3]=$

$$\frac{1}{2}[2x^2+6x-3+2x^2-6x-3]=2x^2-3$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\frac{1}{2}\{(2x^2+6x-3)-[2(-x)^2+6(-x)-3]\}=$$

$$\frac{1}{2}[2x^2+6x-3-2x^2+6x+3]=6x$$

因为 $\varphi(-x)=2(-x)^2-3=2x^2-3=\varphi(x)$

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数。

$$\psi(-x)=6(-x)=-6x=-\psi(x)$$

所以 $\psi(x)$ 为奇函数。

3. 设下面所考虑的函数都是定义在 $(-l,l)$ 内的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数。

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证明：设 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 为偶函数；$\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ 为奇函数。

设 $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$；$f(x)\cdot g(x)=fg(x)$

(1) $(\varphi_1+\varphi_2)(-x)=\varphi_1(-x)+\varphi_2(-x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=(\varphi_1+\varphi_2)(x)$

所以 $(\varphi_1+\varphi_2)(x)$ 为偶函数。

$$(\psi_1+\psi_2)(-x)=\psi_1(-x)+\psi_2(-x)=-\psi_1(x)-\psi_2(x)=$$
$$-[\psi_1(x)+\psi_2(x)]=-(\psi_1+\psi_2)(x)$$

所以 $(\psi_1+\psi_2)(x)$ 为奇函数。

(2) $(\varphi_1\varphi_2)(-x)=\varphi_1(-x)\cdot\varphi_2(-x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)=\varphi_1\varphi_2(x)$

所以 $(\varphi_1\varphi_2)(x)$ 为偶函数。

$$(\psi_1\psi_2)(-x)=\psi_1(-x)\cdot\psi_2(-x)=[-\psi_1(x)][-\psi_2(x)]=$$
$$\psi_1(x)\psi_2(x)=\psi_1\psi_2(x)$$

因为 $(\psi_1\psi_2)(x)$ 为偶函数

$$(\psi_1\varphi_1)(-x)=\psi_1(-x)\cdot\varphi_1(-x)=-\psi_1(x)\cdot\varphi_1(x)=-(\psi_1\varphi_1)(x)$$

所以 $(\psi_1\varphi_1)(x)$ 为奇函数证毕。

此例结论就是奇函数和偶函数的性质，这些性质在以后计算定积分和作傅里叶级数展开时都是很有用的，最好予以记住。

4. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期。

(1) $y=\cos(x-2)$ (2) $y=\sin\pi x$

(3) $y=x\cos x$ (4) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$

解 (1) 是周期函数，又根据 $y=\cos(\omega t+\theta)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 这一公式，有

$$y=\cos(x-2)\text{ 的周期为 }T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$$

(2) 是周期函数，根据 $y=\sin(\omega t+\theta)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 这一公式，有

$$y=\sin\pi x\text{ 的周期为 }T=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

(3) 设 $T>0$ 为 $y=x\cos x$ 的周期，则

$f(x+T)=f(x)$，　即 $(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$

T 不易找，我们先找几个特殊值去观察：

令 $x=0$，代入后有 $T\cos T=0$，而 $T\neq0$，所以 $\cos T=0$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}$，代入后有 $\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=0$，而 $T>0$

所以 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=-\sin T=0$　即 $\sin T=0$

T 既要满足方程 $\cos T=0$，又要满足方程 $\sin T=0$，这是不可能的，因此这样的 T 是不存在的，也就是说 $y=x\cos x$ 不为周期函数。

(4) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 的周期仍为函数 $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 的周期，由函数 $y=\cos(\omega t+\theta)$ 的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，可得

$$y=1+\cos\frac{\pi}{2}x\text{ 的周期 }T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

5. 验证下列函数在所示区间内是单调增加的。

(1) $y=x^4\quad(0,+\infty)$；　(2) $y=2^{x-1}\quad(0,+\infty)$

(3) $y=\lg x+x\quad(0,+\infty)$；　(4) $y=2x+\sin x\quad\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

证明：(1) 对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，设 $x_1<x_2$

因为　$f(x_1)-f(x_2)=x_1^4-x_2^4=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2)<0$

所以　$f(x_1)<f(x_2)$

$y=x^4$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

(2) 对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，设 $x_1<x_2$

因为　$f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1-1}-2^{x_2-1}=\dfrac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2}<0$

所以　$f(x_1)<f(x_2)$

$y=2^{x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

(3) 对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，设 $x_1<x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=(\lg x_1+x_1)-(\lg x_2+x_2)=\lg\frac{x_1}{x_2}+(x_1-x_2)<0$$

所以　$f(x_1)<f(x_2)$

$y=\lg x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

(4) 对任意的 $x_1,x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，设 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1+\sin x_1)-(2x_2+\sin x_2)=2(x_1-x_2)+(\sin x_1-\sin x_2)<0$

所以　$f(x_1)<f(x_2)$

所以 $y=2x+\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加。

6. 验证下列各函数在所示区间内是单调减少的。

(1)$y=x^4$　$(-\infty,0)$　　　(2)$y=\cos x[0,\pi]$

证:(1) 对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$,设 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=x_1{}^4-x_2{}^4=(x_1{}^2+x_2{}^2)(x_1{}^2-x_2{}^2)>0$

所以　$f(x_1)>f(x_2)$

$y=x^4$ 在$(-\infty,0)$内单调减少。

(2) 对任意的 $x_1,x_2\in[0,\pi]$,设 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=\cos x_1-\cos x_2>0$

所以　$f(x_1)>f(x_2)$

$y=\cos x$ 在$[0,\pi]$内单调减少。

(三) 习题 1-3

1. 设 $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$,求复合函数 $f\circ\varphi$、$\varphi\circ f$、$f\circ f$ 的表示式。

解　$f\circ\varphi(x)=f[\varphi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}$

$\varphi\circ f(x)=\varphi[f(x)]=2^{x^2}$

$f\circ f(x)=f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$

2. 设 $\varphi(x)=x^3+1$,求 $\varphi(x^2)$、$[\varphi(x)]^2$ 及 $\varphi[\varphi(x)]$

解　$\varphi(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$

$[\varphi(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$

$\varphi[\varphi(x)]=(x^3+1)^3+1$

题后话:此题为求自变量取不同值所对应的函数值,这时,只要搞清楚对应法则,问题就迎刃而解了,这里 $\varphi(\ )=(\ )^3+1$。

3. 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(x+1)$

解　此问题是已知自变量取 $x-1$ 时对应的函数值,求函数值 $f(x+1)$。这就需要先求出原来函数的解析表达式,这时把 $x-1=y$ 看作整体,由此解出 x,并将结果代入 $f(x-1)$ 的表达式,则可得 $f(y)$ 的表达式,从而得 $f(x)$ 的表达式,进一步得到 $f(x+1)$ 的表达式。

令 $x-1=y$　解得 $x=y+1$

代入有　$f(y)=(y+1)^2$,故 $f(x)=(x+1)^2$

从而　$f(x+1)=[(x+1)+1]^2=(x+2)^2$

4. 下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1)$y=\sqrt{(1+x)^2+1}$　　　(2)$y=3^{(x+2)^2}$

(3)$y=\cos^2(2x+1)$　　　(4)$y=\sqrt[3]{\ln\cos^2x}$

(5)$y=(x^2+6x+10)\ln(x^2+6x+10)$

解　(1)$y=\sqrt{(1+x)^2+1}$ 是由 $y=\sqrt{u}$,$u=v^2+1$,$v=1+x$ 复合而成。

(2)$y=3^{(x+2)^2}$ 是由 $y=3^u$,$u=v^2$,$v=x+2$ 复合而成。

(3)$y=\cos^2(2x+1)$ 是由 $y=u^2$,$u=\cos v$,$v=2x+1$ 复合而成。

(4)$y=\sqrt[3]{\ln\cos^2 x}$ 是由 $y=u^{\frac{1}{3}}, u=\ln v, v=w^2, w=\cos x$ 复合而成。

(5)$y=(x^2+6x+10)\ln(x^2+6x+10)$ 是由 $y=u\ln u, u=x^2+6x+10$ 复合而成。

5. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f(e^{-x})$。

解 $f(e^{-x})=(e^{-x})^2\ln(1+e^{-x})=e^{-2x}\ln(1+e^{-x})$

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$，求 $f(a\lg x)$。

解 $f(a\lg x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+(a\lg x)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+a^2\lg^2 x}}\quad(a>0)$

7. 设 $S(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$，求 $S\left[\dfrac{1}{S(t)}\right]$。

解 $\dfrac{1}{S(t)}=\dfrac{1}{A\cos(\omega t+\varphi)}$

$$S\left[\frac{1}{S(t)}\right]=A\cos\left[\frac{\omega}{A\cos(\omega t+\varphi)}+\varphi\right]$$

8. 求下列函数的反函数，并作图。

(1) $y=1-3x$　　(2) $y=\dfrac{1}{x+1}$

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$　　(4) $y=\cos x$

解　(1) $y=1-3x$　则 $x=\dfrac{1-y}{3}$

所以反函数为 $y=\dfrac{1-x}{3}$，图形如图 1-1 所示。

(2) $y=\dfrac{1}{x+1}$　则 $x+1=\dfrac{1}{y}, x=\dfrac{1}{y}-1$

所以反函数为 $y=\dfrac{1}{x}-1\quad(x\neq 0)$，如图 1-2 所示。

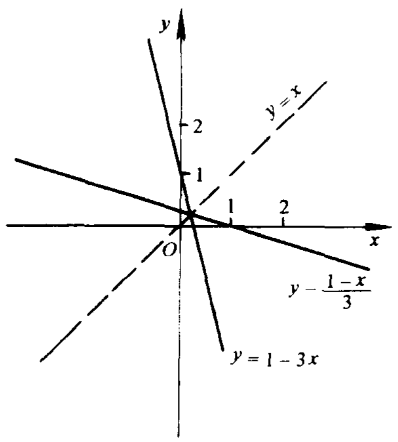

图　1-1

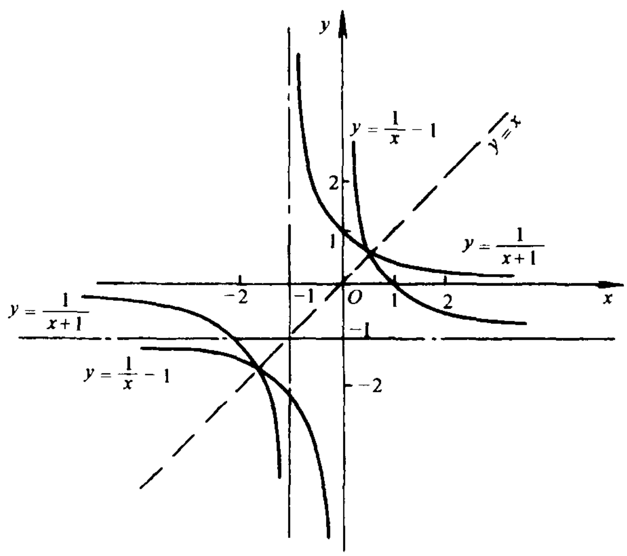

图　1-2

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$　$y^2=1-x^2, x^2=1-y^2, x=\pm\sqrt{1-y^2}$

所以反函数为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}\quad(x>0)$，如图 1-3 所示。

(4) $y=\cos x$　则 $x=\arccos y$

所以反函数为 $y=\arccos x$，如图 1-4 所示。

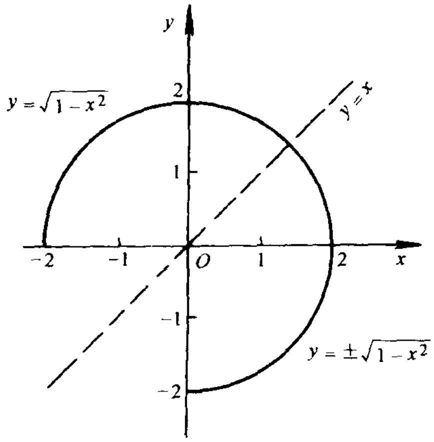

图　1-3

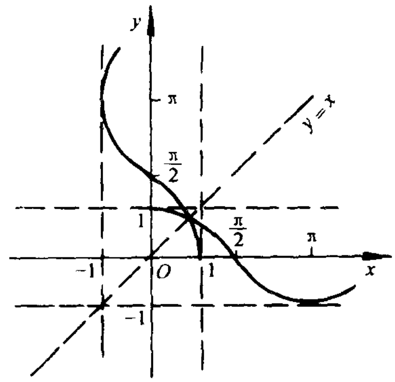

图　1-4

题后话：求函数的反函数时，要注意根据原函数的定义域和值域正确确定其反函数的值域和定义域。

三、小　　结

函数概念是高等数学中最基本、最重要的概念之一，这一章，我们重点学习了函数概念及函数的基本性质。

1. 函数的定义域与对应关系(函数关系) 是函数的两个重要因素。

(1) 函数定义中最重要的一点是“对应”，这种“对应” 的表达方式是多样的。我们已经知道，函数不一定用解析式表示，即使用解析式表示，也不能限定一个式子表示。

(2) 函数定义仅要求对自变量确定的数值(在某个范围内)，函数有确定的数值与之对应。并没要求当自变量变动时，函数值一定随着变动，因此 $f(x)=C$(C 为常数) 也表示一个函数。

(3) 定义域是函数概念中另一重要内容，它指出了使函数有定义的自变量的取值范围。我们应熟练掌握求函数定义域的方法。

(4) 两个函数如果它们的函数关系(对应关系) 和定义域都相同，则这两个函数是相同的。

2. 由于今后常局限于在某个固定的实数 x_0 附近去研究函数，所以，邻域的概念是重要的。我们应掌握用绝对值不等式表示邻域的方法。

3. 复合函数虽然不是一类新的函数，但它却是我们研究的重点，要能将复合函数分解成若干基本初等函数。

4. 在这一章中，应注意掌握综合应用解析式和直观图形去研究函数的方法，并能应用这一方法研究函数的基本性质。

四、自　测　题

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\sin x-1}$　　(2) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$

2. 判断下列函数组的每对函数是否是同一函数,并说明理由。

(1) $f(x)=\cos x \qquad g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(2) $f(x)=\sqrt{x(x+2)} \qquad g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+2}$

3. 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$　　(2) $f(x)=x^2 e^{-x^2}$

4. 选择适当的区间填空:

(a) $(-\infty,+\infty)$　　(b) $(0,+\infty)$

(c) $(-\infty,0)$　　(d) $(-1,1)$

(1) 函数 $f(x)=1-x^2$ 在________单调增加

(2) 函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$ 在________单调减少

(3) 函数 $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ 在________单调减少

5. 设 $y=f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,则 $x=f^{-1}(y)=(\quad)$, $y=f^{-1}(x)=(\quad)$, $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是(　　), $y=f^{-1}(x)$ 的值域是(　　)。

6. 若 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $F(x)=\dfrac{1}{1+x}$,则 $f[F(x)]=(\quad)$, $F[f(x)]=(\quad)$。

7. 已知 $f(x)=\ln x$,求证 $f(x)+f(x+1)=f[x(x+1)]$。

8. 函数 $y=\operatorname{arctg}\sqrt{(x^2+1)e^{\frac{1}{x}}}$ 是由哪些函数复合而成的?

9. 给定函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ \dfrac{1}{2} & x=0 \\ \ln x & x>0 \end{cases}$

(1) 作 $f(x)$ 的图形

(2) 求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$ 的值