

平面解析幾何學

平面解析幾何學

石鴻翥編

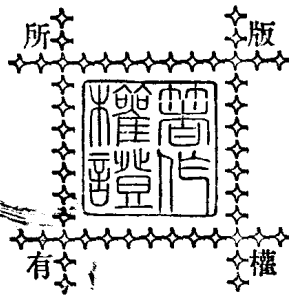
華書局印行

民國三十五年十一月發行
民國三十五年十一月初版

大學用書 平面解析幾何學 (全一冊)

◎ 定價 國幣 十元

(郵運匯費另加)



編者 石 鴻 翥

發行人 顧 樹 森
中華書局股份有限公司代表

印刷者 上海澳門路四六九號
中華書局永寧印刷廠

發行處 各埠中華書局

(一三〇四四)(天)

小 史

解析幾何學爲數學之一分科，以代數學之權威而統馭幾何學之建造者。點線面體，幾何學證之以圖形；但涵義之涉於艱深者，究非圖解所能詳盡；故其法術有時而窮。後之嚆人悟及方程式之宏力，號稱萬能，可使點線面體之凡百問題，由各種公約納入代數學之範圍，以補救超然幾何學之缺點。斯是而有解析幾何學之創著，其目的在合幾何與代數於一爐而冶之，令其混絕畛域也。且以代數證幾何，幾何之真理愈顯，通幾何於代數，代數之效用益彰。誠近世數學中最有興趣而最重要之學科。倘學者不先治此，則又無法以攻微積學；不解微積學，則對於高深之物理學，電氣學，機械學，……亦惟有瞠目興歎而已！

西曆一千六百三十七年，法國哲學家 Descartes 氏首創幾何新法，解析幾何學即胚胎於此，大爲嚆人所尊崇。至十九世紀初，Carnot 氏發表其著述之方位幾何學，風靡一時，大衆相率致力於純幾何學，轉不以 Descartes 學說爲介意。迨後 Poncelet, Charles, Sturm, ………繼起，復舉而討論之，沉寂已久之解析幾何學不獨頓呈活動之氣象，而內容之增進益多。代有傳人，發明無量；時至今日，購之登峯造極，不其然歟！

平面解析幾何學

目 錄

第一章 緒 論

	(頁數)
I 位標.....	1
II 極位標.....	7
III 射影.....	8
IV 位標軸之轉換.....	11
V 兩點之距離.....	14
VI 分點.....	16

第二章 方程式解釋

I 表線之方法.....	20
II 線之區別.....	26
III 齊次方程式.....	29
IV 代函數作圖.....	33
V 三角函數作圖.....	39
VI 方根作圖.....	41

第三章 直 線

I 直線之通方程式.....	45
II 直線之特別方程式.....	50
III 點線問題.....	58
IV 表直線之高次方程式.....	74
V 關於極位標之點線問題.....	82

第四章 曲線通論

I	二級曲線之分類	87
II	引數	93
III	切線	96
IV	法線	100
V	漸近準線, 漸近線	101
VI	中心	104
VII	通徑	106
VIII	軸	109
IX	焦點, 準線	112
X	雜錄	117

第五章 二次方程式之簡約

I	有心曲線	122
II	無心曲線	126

第六章 幾何軌跡

I	第一類軌跡	129
II	第二類軌跡	137

第七章 平 圓

I	平圓之方程式	147
II	平圓之特性及問題	153
III	切線, 法線, 極線	170
IV	乘冪, 根軸, 圓簇	180

第八章 橢 圓

I	橢圓之方程式及特性	193
II	焦點及準線	200
III	切線及法線	204
IV	通徑及相配通徑	217

V	解題	225
VI	橢圓面積	236

第九章 雙曲線

I	雙曲線之方程式及特性	241
II	漸近線	246
III	焦點及準線	249
IV	切線及法線	252
V	通徑	258
VI	解題	265
VII	雙曲線之面積	269

第十章 拋物線

I	拋物線之方程式及特性	276
II	準線及焦點	278
III	切線及法線	280
IV	通徑	288
V	解題	291
VI	拋物線之面積	296
VII	二級曲線焦點之特性	298

第十一章 定二級曲線之法

I	通論	309
II	虛元素	309
III	無窮遠元素	311
IV	二級曲線之交點	314
V	通過定點與切於定直線之圓錐曲線	322
VI	參加圓錐曲線之條件	333
VII	以五條件節制之圓錐曲線	336

VIII 以四條件節制之圓錐曲線	344
------------------	-----

IX 包線	360
-------	-----

第十二章 複比調和比極點極線

I 複比與調和比	365
----------	-----

II 極點與極線	369
----------	-----

第十三章 二次曲線問題

I 雜題	378
------	-----

II PASCAL 六邊形	386
---------------	-----

III BRIANCHON 六邊形	392
-------------------	-----

IV 圓錐曲線之脗合圓	395
-------------	-----

V 法線問題	404
--------	-----

第十四章 對等形與類似形

I 對等形	408
-------	-----

II 類似形	412
--------	-----

第十五章 圓錐面之截線

I 正圓錐面之截線	415
-----------	-----

II 斜圓錐面之截線	422
------------	-----

第十六章 曲線作法

I 代函數之作法	426
----------	-----

II 越函數之作法	440
-----------	-----

III 極函數之作法	442
------------	-----

附 卷

第十七章 點與直線

I 雙對原理	449
--------	-----

II 基本圖形	452
---------	-----

III 點列	455
IV 線簇	460
V 投射形	464
VI 調和形	470
VII 疊合投射形	473
VIII 對合	474
IX 虛元素,迷向直線	479

第十八章 位 標

I 簡約符號	489
II 正則位標	492
III 三度位標	504
IV 中心位標	507
V 對應三角形	514

第十九章 二級曲線

I 二次方程式	520
II 圓錐曲線定理	527
III 關於三度位標之圓	531
IV 關於切位標之圓	540
V 二級曲線之化成	542

平面解析幾何學

第一章 緒論

第一節 位標

1. 定直線上之點 許多幾何問題,先一步驟,即謀點之如何確定,故吾人首論表點之方法,及 Descartes 位標*,因此種位標式,爲施算時所慣用也。

研究一直線上之各線分(一名線段或截分),須注意符號的定則。

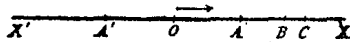


Fig. 1

因此,於原設之 $X'X$ 直線上,選擇其某一方向,例如 $X'X$ 爲此直線之正方向;反之如 XX' 爲此直線之負方向,正方向常以矢金誌之,或默想之亦可。

任何線分 AB , 爲一動點自 A 至 B 沿一直線之方向徑行不逆,所經過之路程;此線分之代數量爲一數值,以某一單位爲度,乃比較的長度也,數值之前置壹“+”號或置壹“-”號,視動點進取之方向爲直線之正方向或爲直線之負方向而定之,準本公約,則

$$AB = -BA,$$

$$AB + BA = 0.$$

符號定則,對於一直線上任何排列之點,可歸納之爲一範

* Descartes 位標,譯稱笛卡兒位標,又稱常位標。

式,觀下定理.

2. 定理 於一直線上取 A, B, C 三點,其關係式即

$$AB + BC + CA = 0.$$

何則,如 B 在 A 與 C 之間,勿論直線之正方向如何,而有

$$AB + BC = AC,$$

移項得

$$AB + BC + CA = 0.$$

如 C 在 A, B 之間,可書之爲

$$AB = AC + CB;$$

或

$$AB - CB - AC = 0,$$

而

$$AB + BC + CA = 0.$$

同樣證 A 在 B, C 之間.

3. 欲於 $X'X$ 直線上,確定任意一點 A 之位置,則先於此直線上任取一點 O 爲線分之起點(一稱原點).如知 OA 線分之長度與方向,則 A 點之位置可完全決定. OA 線分謂之 A 點之橫線(fig. 1).

例如 $OA = +2$, 於 OX 方向量取二單位,即得 A 點.至於 $OA' = -2$, 須於 OX' 方向量取二單位,乃得 A' 點.

通常設 A 點之橫線爲 $x = a$, 如 a 爲一正值,則向起點之右量取之,負值則向左量取之(fig. 1).

若 $x = 0$, 即表起點之本身; $x = \pm\infty$, 一則表示 OX 方向無窮遠(或無盡界)之一點,一則表示 OX' 方向無窮遠之一點.

4. 設 $x = OA$, $x' = OB$ 爲 $X'X$ 直線上之任何兩點 A, B 之橫線, A, B, O 三點可滿足下式(fig. 2):

$$OA + AB + BO = 0,$$

移項

$$AB = -BO - OA,$$

或

$$OB - OA = x' - x.$$

可見任一線分,等於其止點之橫線與其起點之橫線之差.

Fig. 2

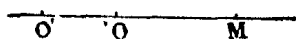


Fig. 3

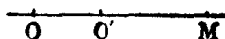


Fig. 4

5. 預定之起點,有時有變更之必要,因之點之橫線之代數量亦受其影響,如 fig. 3, 設 O 爲舊起點, O' 爲新起點,彼此相距爲 $-a$. 又設 M 點對於舊起點之橫線爲 $x = OM$, 對於新起點之橫線爲 $x' = O'M$, 準 §4 理, OM 線分之長即 $x = x' - a$.

如新起點在舊起點之右,則爲 (fig. 4)

$$x = x' + a.$$

6. 定平面上之點 設 M 爲平面內一點 (fig. 5). 爲確定其位置起見,則於此平面上引 OX 與 OY 二直線,謂之爲位標軸,或縱橫軸,互交於 O . 此交點爲二軸之起點. 次於每軸之上選擇一正方向,如 OX 與 OY 之例.

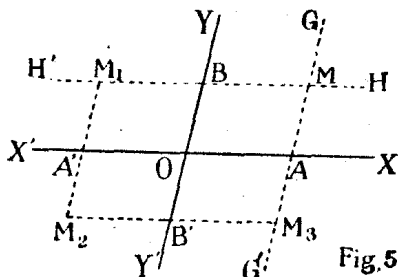


Fig. 5

再自 M 點作 $G'G$ 直線與 OY 軸(或稱 y 軸)平行,並與橫軸 XX' 相交於 A ; 又自同點作 $H'H$ 直線與 OX 軸(或稱 x 軸)平行,而與縱軸 YY' 相交於 B . 如知 $G'G$, $H'H$ 二直線之位置,則 M 點可定,因 M 爲該直線之交點也. 但定 $G'G$ 直線之位置,須知線分 $OA = a$ 之長

度及方向;同理,定 $H'H$ 直線之位置,須知線分 $OB=b$ 之長度及方向.

OA 謂之 M 點之橫線, OB 謂之縱線,二者總稱為 M 點之位標,或縱橫線,此即法人 Descartes 所創之位標制,為定位置之最常用者,遂又稱為常位標(即平直位標).

M 點之位標,隨其位置而變,故以變數 x, y 代表之,定 M 點之位置,非知其位標之數值不可,即謂應有

$$x=a, \quad y=b.$$

此式稱為點之方程式.

7. 注意 I. 表點之式,通例書之為 (a, b) , 括弧以內之首一字母代表橫線,次一字母代表縱線.

例如一點之位標為 $x=2, y=3$, 即書作 $(2, 3)$; 又一點之位標為 $x=-2, y=3$, 則書作 $(-2, 3)$.

表示已知點,從 (a, b) , 或 (x', y') , 或 (x_1, y_1) ; 表示未知點,概從 (x, y) .

II. 求 M 點之位標,法於 M 點 (fig. 5) 作 YY' 之平行線 $G'G$ 即可;蓋 OA 為 M 之橫線,其縱線(注意符號)即 AM . 若不如此,則自同點作 $X'X$ 之平行線 $H'H$ 亦可;此時定 BM 為橫線, OB 為縱線.

反之,知 M 之位標,求此點之位置,法於起點之右或左,量取若干單位長度等於橫線,並於橫線之止點引 YY' 之平行線;又於起點之上或下,量取若干單位長度等於縱線,並於縱線之止點引 XX' 之平行線,二平行線之交點即 M 之位置是.

最簡捷之法,莫如逕作 OAM 或 OBM 折線,此折線名 M 點位標之周界.

III. 縱橫兩軸之交角有四,四角之次序,與平三角之計算象限者相同,即謂 XOY 為第一角(或第一區), YOX' 為第二角, $X'OY'$ 為第三角, $Y'OX$ 為第四角,第一角又稱軸角,介乎 0° 與 180°

之間。

凡點之在第一角以內者，縱橫線俱為正值，第二角以內者，橫線為負值，縱線為正值(fig. 5)。餘觀下表：

M $x=OA=a$, $y=OB=b$, 第一區。

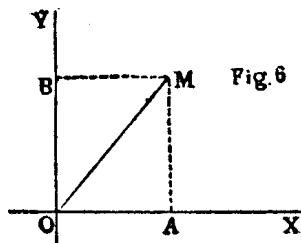
M_1 $x=OA'=-a$, $y=OB=b$, 第二區。

M_2 $x=OA'=-a$, $y=OB'=-b$, 第三區。

M_3 $x=OA=a$, $y=OB'=-b$, 第四區。

縱橫線異號相等之二點，就起點而言，為對稱點，如 M 及 M_2 ， M_1 及 M_3 是。

IV. 凡 $X'X$ 橫軸上之點，縱線等於零； $Y'Y$ 縱軸上之點，橫線等於零；方程式 $x=0$, $y=0$ 表示位標軸之起點。



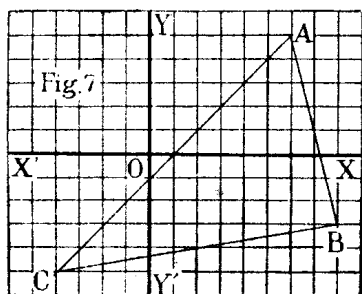
V. 一方程式如 $x=a$ ，凡 YY' 之平行線 $G'G$ 上之點之橫線皆可充此式，不在此線上之點橫線不等於 a ；故此方程式可表示 YY' 之平行線。同理， $y=b$ ，表示 XX' 之平行線。

VI. 位標軸之交角通常為任何角，如 XOY 軸角為一直角時則謂之正交位標軸，不等於一直角時謂之斜交位標軸。

正交位標軸，為施算畫圖所習用之。在此種位標制， M 點之位標即此點與二軸之距離，或 OM 線分在二軸上之垂直射影(fig. 6)。

8. 解題 試繪 $A(6,5)$, $B(8,-3)$, $C(-4,-5)$ 三點之圖。

如下圖,先作任何正交位標軸,(凡問題之未明定何種軸式者,作圖之時,不妨取正交位標軸,製圖之紙有已印成方格者,每格之寬長等於一單位長度。)次自起點 O 始,沿 $X'X$ 軸之正方



向取六方格爲 A 點之橫線,並於第六格作誌,自此又沿 $Y'Y$ 之正方向取五方格爲 A 點之縱線,此縱線之止點即 A 點位置之處,同樣沿 $X'X$ 之正方向取八方格爲 B 點之橫線,並於第八格作誌,自此又沿 $Y'Y$ 之負方向取三方格爲 B 點之縱線,此縱線之止點即 B 點位置之處, C 點仿此類推,兩兩聯之成一三角形。

例 題

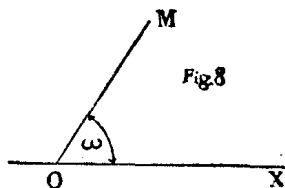
1. 作 $(3,2)$, $(3,-2)$, $(-4,3)$, $(-5,0)$, $(0,4)$ 各點之圖。
2. 問同上,設點爲 $(-6,1)$, $(-2,0)$, $(-7,-4)$, $(2,-1)$, $(\sqrt{3},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{5},0)$, $(0,-\sqrt{5})$ 。
3. 設 a,b,c 爲正值,問 $(-a,b)$, $(a,-b)$, $(-a,-b)$ 各點在何區之內?
4. 三角形之頂點爲 $(-2,0)$, $(5\sqrt{5}-2,5)$, $(-2,10)$,試以圖顯之。
5. 四邊形之頂點爲 $(-2,0)$, $(4,2)$, $(0,6)$, $(-4,2)$,試以圖顯之。
6. 證 (x,y) 與 $(x,-y)$,就 x 軸而言,爲對稱點;又 (x,y) 與 $(-x,y)$,就 y 軸而言,爲對稱點; (x,y) 與 $(-x,-y)$,就起點而言,爲對稱點。
7. 橫軸上之點,當如何表示之?

8. 縱軸上之點,當如何表示之?
9. 表示起點當如何?
10. 表示橫軸上之無窮遠點,或縱軸上之無窮遠點當如何?

第二節 極位標

9. 定點之方法甚多,除 Descartes 位標之外,以極位標為常見.

設 O 為平面內之一定點(名極點),過此點作一直線 OX (名極軸),又聯 O 與任何一點 M 為直線,



如知 OM 直線之位置及 M 與 O 之距離, M 之位置立時可以決定,但 OM 直線之位置與 XOM 角有關,此角常以 ω 代之,謂之極角, O, M 兩點之距離,以 ρ 代之,謂之極距,合而稱之曰極角距,或極位標,乃定一點之要素也.

10. 注意 I. ρ 之變度可自 0 迄 ∞ ; ω 之變度可自 0° 迄 2π , 故勿論平面內之何點,皆可以 (ω, ρ) 表示之.

II. OM 極距偕 O 點旋轉之正方向與時計指針運動之方向相反.

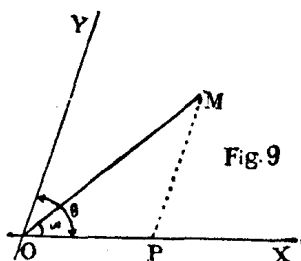
11. 極位標與 Descartes 位標之關係 設極軸重合於橫軸,極點重合於起點,令軸角為 θ , 從 OMP 三角形而有

$$\frac{OM}{\sin MPO} = \frac{PM}{\sin MOP} = \frac{OP}{\sin OMP'}$$

或

$$\frac{\rho}{\sin \theta} = \frac{y}{\sin \omega} = \frac{x}{\sin(\theta - \omega)}.$$

$$x = \frac{\rho \sin(\theta - \omega)}{\sin \theta}, \quad y = \frac{\rho \sin \omega}{\sin \theta}.$$



特則 倘軸角等於一直角, 即謂 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 則有

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega.$$

或變之爲

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}, \quad \rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

第三節 射 影

12. 界說 一平面上有 $A, B, C, \dots$ 諸點及一直線 $X'X$ (名軸) 與一方線 U . 自 $A, B, C, \dots$ 諸點各作 U 之平行線交 $X'X$ 於 $A', B', C', \dots$, 此交點 A' 謂之 A 之射影, B' 謂之 B 之射影, $\dots$; 與 U 平行之直線 $AA', BB', CC', DD', \dots$ 謂之射徑.

