平面解析幾何學

平面解析幾何學

石鴻翥編

[redacted]華書局印行

民國三十五年十一月發行
民國三十五年十一月初版

大學用書 平面解析幾何學（全一冊）

◎ 定價國幣十元
（郵運匯費另加）

版權所有

編者 石鴻翥

發行人 中華書局股份有限公司代表 顧樹森

印刷者 上海澳門路四六九號 中華書局永寧印刷廠

發行處 各埠中華書局

（一三〇四四）（天）

小史

解析幾何學爲數學之一分科,以代數學之權威而統馭幾何學之建造者.點線面體,幾何學證之以圖形;但涵義之涉於艱深者,究非圖解所能詳盡;故其法術有時而窮. 後之疇人悟及方程式之宏力,號稱萬能,可使點線面體之凡百問題,由各種公約納入代數學之範圍,以補救超然幾何學之缺點.斯是而有解析幾何學之創著,其目的在合幾何與代數於一爐而冶之,令其泯絕畛域也.且以代數證幾何,幾何之真理愈顯,通幾何於代數,代數之效用益彰.誠近世數學中最有興趣而最重要之學科.倘學者不先治此,則又無法以攻微積學;不解微積學,則對於高深之物理學,電氣學,機械學,……亦惟有瞠目興歎而已!

西曆一千六百三十七年,法國哲學家 Descartes 氏首創幾何新法,解析幾何學即胚胎於此,大爲疇人所尊崇.至十九世紀初,Carnot 氏發表其著述之方位幾何學,風靡一時,大衆相率致力於純幾何學,轉不以 Descartes 學說爲介意.迨後 Poncelet, Charles, Sturn,………繼起,復舉而討論之,沉寂已久之解析幾何學不獨頓呈活動之氣象,而內容之增進益多.代有傳人,發明無量;時至今日,謂之登峯造極,不其然歟!

平面解析幾何學

目　錄

第一章　緒　論

第二章　方程式解釋

第三章　直　線

第四章　曲線通論

第五章 二次方程式之簡約

第六章 幾何軌跡

第七章 平圓

第八章 橢圓

第九章 雙曲線

第十章 拋物線

第十一章 定二級曲線之法

第十八章 位標

第十九章 二級曲線

平面解析幾何學

第一章　緒論

第一節　位標

1.　定直線上之點　許多幾何問題,先一步驟,即謀點之如何確定.故吾人首論表點之方法,及 Descartes 位標*,因此種位標式,爲施算時所慣用也.

研究一直線上之各線分(一名線段或截分),須注意符號的定則.

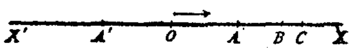


Fig. 1

因此,於原設之 $X'X$ 直線上,選擇其某一方向,例如 $X'X$ 爲此直線之正方向;反之如 XX' 爲此直線之負方向.正方向常以矢金誌之,或默想之亦可.

任何線分 AB, 爲一動點自 A 至 B 沿一直線之方向徑行不逆所經過之路程;此線分之代數量爲一數值,以某一單位爲度,乃比較的長度也.數值之前置壹"+"號或置壹"−"號,視動點進取之方向爲直線之正方向或爲直線之負方向而定之.準本公約,則

$$AB=-BA,$$

$$AB+BA=0.$$

符號定則,對於一直線上任何排列之點,可歸納之爲一範

---

* Descartes 位標,譯稱笛卡兒位標,又稱常位標.

式,觀下定理.

2. **定理** 於一直線上取 A,B,C 三點,其關係式卽

$$AB+BC+CA=0.$$

何則,如 B 在 A 與 C 之間,勿論直線之正方向如何,而有

$$AB+BC=AC,$$

移項得

$$AB+BC+CA=0.$$

如 C 在 A,B 之間,可書之爲

$$AB=AC+CB;$$

或

$$AB-CB-AC=0,$$

而

$$AB+BC+CA=0.$$

同樣證 A 在 B,C 之間.

3. 欲於 $X'X$ 直線上,確定任意一點 A 之位置,則先於此直線上任取一點 O 爲線分之起點(一稱原點).如知 OA 線分之長度與方向,則 A 點之位置可完全決定. OA 線分謂之 A 點之橫線(fig. 1).

例如 $OA=+2$.於 OX 方向量取二單位,卽得 A 點.至於 $OA'=-2$,須於 OX' 方向量取二單位,乃得 A' 點.

通常設 A 點之橫線爲 $x=a$.如 a 爲一正値,則向起點之右量取之,負値則向左量取之(fig. 1).

若 $x=0$,卽表起點之本身; $x=\pm\infty$,一則表示 OX 方向無窮遠(或無盡界)之一點,一則表示 OX' 方向無窮遠之一點.

4. 設 $x=OA$, $x'=OB$ 爲 $X'X$ 直線上之任何兩點 A,B 之橫線, A,B,O 三點可滿足下式(fig. 2):

$$OA+AB+BO=0,$$

移項

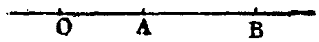
$$AB=-BO-OA,$$

或

$$OB-OA=x'-x.$$

可見任一線分,等於其止點之橫線與其起點之橫線之差.

Fig.2



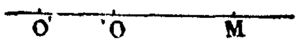


Fig.3

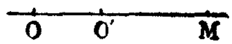


Fig.4

5.　預定之起點,有時有變更之必要,因之點之橫線之代數量亦受其影響.如 fig. 3, 設 O 爲舊起點, O' 爲新起點,彼此相距爲 $-a$. 又設 M 點對於舊起點之橫線爲 $x=OM$, 對於新起點之橫線爲 $x'=O'M$. 準 §4 理, OM 線分之長卽 $x=x'-a$.

如新起點在舊起點之右,則爲(fig. 4)

$$x=x'+a.$$

6.　**定平面上之點**　設 M 爲平面內一點 (fig. 5). 爲確定其位置起見,則於此平面上引 OX 與 OY 二直線,謂之爲位標軸,或縱橫軸,互交於 O. 此交點爲二軸之起點.次於每軸之上選擇一正方向,如 OX 與 OY 之例.

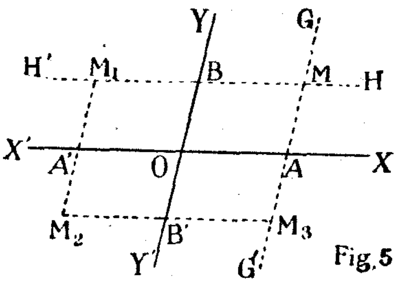


Fig.5

再自 M 點作 $G'G$ 直線與 OY 軸(或稱 y 軸)平行,並與橫軸 XX' 相交於 A; 又自同點作 $H'H$ 直線與 OX 軸(或稱 x 軸)平行,而與縱軸 YY' 相交於 B. 如知 $G'G$, $H'H$ 二直線之位置,則 M 點可定,因 M 爲該直線之交點也.但定 $G'G$ 直線之位置,須知線分 $OA=a$ 之長

度及方向;同理,定 $H'H$ 直線之位置,須知線分 $OB=b$ 之長度及方向.

OA 謂之 M 點之橫線, OB 謂之縱線,二者總稱為 M 點之位標,或縱橫線.此卽法人 Descartes 所創之位標制,為定位置之最常用者,遂又稱為常位標(卽平直位標).

M 點之位標,隨其位置而變,故以變數 x,y 代表之.定 M 點之位置,非知其位標之數值不可,卽謂應有

$$x=a,\quad y=b.$$

此式稱為點之方程式.

7. 注意 I. 表點之式,通例書之為 (a,b).括弧以內之首一字母代表橫線,次一字母代表縱線.

例如一點之位標為 $x=2, y=3$,卽書作 $(2,3)$;又一點之位標為 $x=-2, y=3$,則書作 $(-2,3)$.

表示已知點,從 (a,b),或 (x',y'),或 (x_1,y_1);表示未知點,概從 (x,y).

II. 求 M 點之位標,法於 M 點 (fig. 5) 作 YY' 之平行線 $G'G$ 卽可;蓋 OA 為 M 之橫線,其縱線(注意符號)卽 AM.若不如此,則自同點作 $X'X$ 之平行線 $H'H$ 亦可;此時定 BM 為橫線, OB 為縱線.

反之,知 M 之位標,求此點之位置.法於起點之右或左,量取若干單位長度等於橫線,並於橫線之止點引 YY' 之平行線;又於起點之上或下,量取若干單位長度等於縱線,並於縱線之止點引 XX' 之平行線.二平行線之交點卽 M 之位置是.

最簡捷之法,莫如逕作 OAM 或 OBM 折線.此折線名 M 點位標之周界.

III. 縱橫兩軸之交角有四,四角之次序,與平三角之計算象限者相同.卽謂 XOY 為第一角(或第一區), YOX' 為第二角, $X'OY'$ 為第三角, $Y'OX$ 為第四角.第一角又稱軸角,介乎 $0°$ 與 $180°$

之間.

凡點之在第一角以內者,縱橫線俱爲正值.第二角以內者,橫線爲負值,縱線爲正值(fig. 5).餘觀下表:

M………………	$x=OA=\ \ a,$	$y=OB=\ \ b,$	第一區.
M_1………………	$x=OA'=-a,$	$y=OB=\ \ b,$	第二區.
M_2………………	$x=OA'=-a,$	$y=OB'=-b,$	第三區.
M_3………………	$x=OA=\ \ a,$	$y=OB'=-b,$	第四區.

縱橫線異號相等之二點,就起點而言,爲對稱點.如 M 及 M_2, M_1 及 M_3 是.

IV. 凡 $X'X$ 橫軸上之點,縱線等於零; $Y'Y$ 縱軸上之點,橫線等於零;方程式 $x=0, y=0$ 表示位標軸之起點.

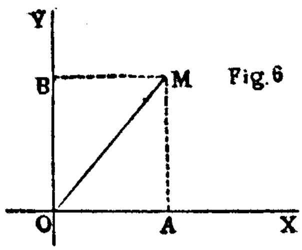


Fig. 6

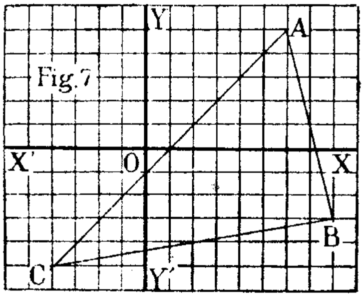
V. 一方程式如 $x=a$, 凡 YY' 之平行線 $G'G$ 上之點之橫線皆可充此式,不在此線上之點橫線不等於 a; 故此方程式可表示 YY' 之平行線.同理, $y=b$, 表示 XX' 之平行線.

VI. 位標軸之交角通常爲任何角.如 XOY 軸角爲一直角時則謂之正交位標軸,不等於一直角時謂之斜交位標軸.

正交位標軸,爲施算畫圖所習用之.在此種位標制, M 點之位標即此點與二軸之距離,或 OM 線分在二軸上之垂直射影(fig. 6).

8. **解題** 試繪 $A(6,5)$, $B(8,-3)$, $C(-4,-5)$ 三點之圖.

如下圖,先作任何正交位標軸.(凡問題之未明定何種軸式者,作圖之時,不妨取正交位標軸.製圖之紙有已印成方格者.每格之寬長等於一單位長度.)次自起點O始,沿$X'X$軸之正方



向取六方格為A點之橫線,並於第六格作誌.自此又沿$Y'Y$之正方向取五方格為A點之縱線,此縱線之止點卽A點位置之處.同樣沿$X'X$之正方向取八方格為B點之橫線,並於第八格作誌.自此又沿$Y'Y$之負方向取三方格為B點之縱線,此縱線之止點卽B點位置之處.C點仿此類推.兩兩聯之成一三角形.

例題

1. 作$(3,2),(3,-2),(-4,3),(-5,0),(0,4)$各點之圖.

2. 問同上,設點為$(-6,1),(-2,0),(-7,-4),(2,-1),(\sqrt{3},\sqrt{2})$,
$(-\sqrt{5},0),(0,-\sqrt{5})$.

3. 設a,b,c為正值.問$(-a,b),(a,-b),(-a,-b)$各點在何區之內?

4. 三角形之頂點為$(-2,0),(5\sqrt{5}-2,5),(-2,10)$.試以圖顯之.

5. 四邊形之頂點為$(-2,0),(4,2),(0,6),(-4,2)$.試以圖顯之.

6. 證(x,y)與$(x,-y)$,就x軸而言,為對稱點;又(x,y)與$(-x,y)$,就y軸而言,為對稱點;(x,y)與$(-x,-y)$,就起點而言,為對稱點.

7. 橫軸上之點,當如何表示之?

8. 縱軸上之點,當如何表示之?

9. 表示起點當如何?

10. 表示橫軸上之無窮遠點,或縱軸上之無窮遠點當如何?

第二節 極位標

9. 定點之方法甚多,除 Descartes 位標之外,以極位標爲常見.

設 O 爲平面內之一定點(名極點).過此點作一直線 OX (名極軸).又聯 O 與任何一點 M 爲直線.

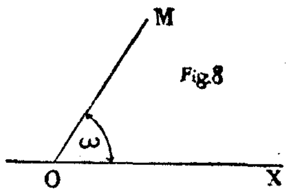


Fig.8

如知 OM 直線之位置及 M 與 O 之距離,M 之位置立時可以決定.但 OM 直線之位置與 XOM 角有關.此角常以 ω 代之,謂之極角.O,M 兩點之距離,以 ρ 代之,謂之極距.合而稱之曰極角距,或極位標,乃定一點之要素也.

10. **注意** I. ρ 之變度可自 0 迄 ∞;ω 之變度可自 0° 迄 2π,故勿論平面內之何點,皆可以 (ω,ρ) 表示之.

II. OM 極距偕 O 點旋轉之正方向與時計指針運動之方向相反.

11. **極位標與 Descartes 位標之關係** 設極軸重合於橫軸,極點重合於起點,令軸角爲 θ.從 OMP 三角形而有

$$\frac{OM}{\sin MPO}=\frac{PM}{\sin MOP}=\frac{OP}{\sin OMP},$$

或
$$\frac{\rho}{\sin\theta}=\frac{y}{\sin\omega}=\frac{x}{\sin(\theta-\omega)}.$$
$$x=\frac{\rho\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta},\quad y=\frac{\rho\sin\omega}{\sin\theta}.$$

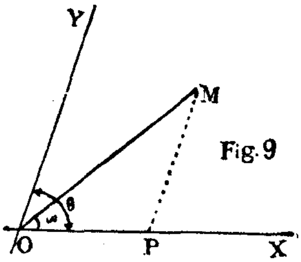


Fig. 9

特則 倘軸角等於一直角,卽謂 $\theta=\frac{\pi}{2}$,則有
$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega.$$
或變之爲
$$\operatorname{tg}\omega=\frac{y}{x},\qquad \rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

第三節 射影

12. 界說 一平面上有 $A,B,C,\ldots\ldots$ 諸點及一直線 $X'X$(名軸)與一方線 U. 自 $A,B,C,\ldots\ldots$ 諸點各作 U 之平行線交 $X'X$ 於 $A',B',C'\ldots\ldots$,此交點 A' 謂之 A 之射影, B' 謂之 B 之射影,……;與 U 平行之直線 $AA',BB',CC',DD',\ldots\ldots$ 謂之射徑.

Fig. 10