面向21世纪本科生教材

# 线性规划

张干宗 编著

（第二版）

全国优秀出版社
武汉大学出版社

面向21世纪本科生教材

# 线性规划

张干宗 编著

（第二版）

全国优秀出版社
武汉大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性规划/张干宗编著.—2版.—武汉：武汉大学出版社，2004.3
(面向21世纪本科生教材)
ISBN 7-307-04101-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.张…　Ⅲ.线性规划　Ⅳ.O221.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第118029号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：程小宜　　版式设计：支　笛

---

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
　　(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉市新华印刷有限责任公司
开本：850×1168　1/32　印张：14.5　字数：374千字
版次：1990年9月第1版　　2004年3月第2版
　　2004年3月第2版第1次印刷
ISBN 7-307-04101-4/O·283　　定价：20.00元

---


版权所有，不得翻印；凡购买我社的图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请与当地图书销售部门联系调换。

# 前　　言

线性规划是运筹学的重要分支，它是一门实用性很强的应用数学学科。这门学科产生于20世纪30年代。1939年，前苏联数学家康托洛维奇（Л. В. Канторовиц）在《生产组织与计划中的数学方法》一书中，最早提出和研究了线性规划问题。1947年，美国数学家丹泽格（G. B. Dantzig）提出了一般的线性规划数学模型和求解线性规划问题的通用方法——单纯形法，为这门学科奠定了基础。此后30年线性规划的理论和算法逐步丰富和发展。到20世纪70年代后期又取得重大进展。1979年，前苏联数学家哈奇扬（Л. Г. Хачиян）提出运用求解线性不等式组的椭球法去求解线性规划问题，并证明该算法是一个多项式时间算法。这一工作具有重要的理论意义，但实用效果不佳。1984年，在美国工作的印度数学家卡玛卡（N. Karmarkar）提出了求解线性规划的投影尺度法，这是一个有实用意义的多项式时间算法。这一工作引起人们对内点算法的关注，此后相继出现了多种更为简便实用的内点算法。随着计算机技术的发展和普及，线性规划的应用越来越广泛。它已成为人们为合理利用有限资源制定最佳决策的有力工具。

本书是在借鉴已有教材结合笔者教学实践积累的基础上编写的。1990年由武汉大学出版社出版。为适应高教发展需求，此次笔者对原书作了修订和补充。本书的选材和写法多从实用性和便于教和学等方面考虑，适于用做大专院校有关专业的线性规划

课教材，也可作为自学教材或有关专业人员的参考书。对本书的内容，可根据课程的学时数酌情取舍。例如，许多定理的证明可以略去。为方便教和学，各章习题在书末附有答案，对一些较难的题目，给出了提示或详解，以供参考。

对本书的编写和出版曾给予支持和帮助的同志们，作者谨致谢忱。本书疏误之处，敬望批评指正。

编　者

2004年1月



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　录

# 第一章 线性规划问题

线性规划是运筹学的一个大分支——**数学规划**的组成部分．数学规划可分为静态规划和动态规划；静态规划又可分为线性规划和非线性规划．静态数学规划一般说来是研究一个 $n$ 元实函数(称为目标函数)在一组等式或不等式约束条件下的极值问题．如果目标函数和约束条件都是线性的，则称为**线性规划**；否则，称之为**非线性规划**．线性规划问题广泛存在于工业、农业、商业、交通运输以及军事指挥等众多领域．本章从几个实例出发，说明线性规划的研究对象，并抽象出线性规划问题的一般数学模型．同时，介绍针对二变量线性规划问题的图解法，为后面的一般解法建立直观基础．

## 1.1 线性规划问题的实例

**例 1 资源利用问题**

先来考虑下述具体问题：

某工厂生产 $A,B$ 两种产品，已知生产 $A$ 产品每公斤需耗煤 9 吨，耗电 4 百度，用工 3 个劳动日(一个劳动日指一个工人劳动一天)；生产 $B$ 产品每公斤需耗煤 4 吨，耗电 5 百度，用工 10 个劳动日．$A$ 产品每公斤的利润是 700 元，$B$ 产品每公斤的利润是 1 200 元．因客观条件所限，该厂只能得到煤 360 吨、电 2 万度、劳力 300 个劳动日．问该厂应生产 $A,B$ 产品各多少，才能使获得的总利润最大?

下面来建立这个问题的数学模型.

问题是要决策产品 $A, B$ 的生产量，故设产品 $A, B$ 的生产量分别为 $x_1, x_2$(单位：公斤)，这是问题需要求解的未知量，又称为**决策变量**. 问题的目标是要使工厂所获得的总利润最大，现用 $z$ 表示总利润(单位：百元). 已知每公斤 $A$ 产品的利润是 700 元，故生产 $x_1$ 公斤 $A$ 产品的利润是 $700x_1$ 元. 同理，生产 $x_2$ 公斤 $B$ 产品的利润是 $1\,200x_2$ 元. 因此，总利润 $z$ 是决策变量 $x_1$, $x_2$ 的线性函数：

$$z = 7x_1 + 12x_2 \quad (\text{单位：百元}).$$

称此函数为问题的**目标函数**. 同时注意到决策变量的取值要受到资源限制条件的约束. 具体地说，就是要满足煤、电力、劳力的限额条件. 已知生产 $A$ 产品每公斤需耗煤 9 吨，则生产 $A$ 产品 $x_1$ 公斤需耗煤 $9x_1$ 吨. 同理，生产 $B$ 产品 $x_2$ 公斤需耗煤 $4x_2$ 吨. 于是总耗煤量为 $9x_1 + 4x_2$ 吨，此值不应超过煤的供应限额 360 吨. 所以决策变量应满足条件：

$$9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \quad (\text{单位：吨}).$$

同理可知，由于电力的限制，决策变量应满足

$$4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \quad (\text{单位：百度}).$$

由于劳力的限制，还应满足

$$3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \quad (\text{单位：劳动日}).$$

此外，由于产品的生产量不应取负值，故决策变量还应满足非负性限制：

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

上述 5 个不等式，称为此问题的**约束条件**.

综上所述可知，上述实际问题可抽象成如下数学问题，称为此实际问题的**数学模型**：

**求**决策变量 $x_1, x_2$ 的值，使之满足下列约束条件：

$$9x_1 + 4x_2 \leqslant 360,$$

$$
\begin{aligned}
4x_1 + \ \ 5x_2 &\leqslant 200, \\
3x_1 + 10x_2 &\leqslant 300, \\
x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

同时，使目标函数

$$z = 7x_1 + 12x_2.$$

达到最大值.

**资源利用问题**的一般提法如下：

设某企业有 $m$ 种不同的资源，记为 $R_1, R_2, \cdots, R_m$，用来生产 $n$ 种产品，记为 $D_1, D_2, \cdots, D_n$. 已知每生产产品 $D_j$ 一单位需消耗资源 $R_i$ 的数量为 $a_{ij}$，且知客观条件对该企业拥有资源 $R_i$ 的限制量为 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$. 又知产品 $D_j$ 的单位利润为 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$. 问如何计划各种产品的生产量，在不超过各种资源限额的条件下，使企业获得的总利润最大?

设产品 $D_j$ 的生产量为 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$. 则各种产品的生产对资源 $R_i$ 的总消耗量为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

此消耗量不应超过资源 $R_i$ 的限制量 $b_i$. 因此，决策变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$应满足下列 $m$ 个不等式：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

由于产量不应取负值，故还应满足

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

整个生产的总利润，记为 $z$，是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数：

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

问题是寻求使 $z$ 取最大值的生产方案. 所以上述一般资源利用问题的数学模型可表述为：

求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的值，在满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m),$$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

的前提下，使函数

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

达到最大值.

**例 2　物资调运问题**

设某种物资(如粮食、钢材、煤炭等)有 $m$ 个发点(仓库或产地)，记为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$；有 $n$ 个收点(需求单位或销地)，记为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 已知发点 $A_i$ 的物资储备量为 $a_i$ 吨($i = 1,2,\cdots,m$)，收点 $B_j$ 的需求量为 $b_j$ 吨($j = 1,2,\cdots,n$)，$A_i$ 到 $B_j$ 每吨物资的运费为 $c_{ij}$ 元($i = 1,2,\cdots,m$；$j = 1,2,\cdots,n$). 要求制定一个调运方案，使它满足各收、发点的供需要求，又使总运费最小.

设由 $A_i$ 到 $B_j$ 的物资运量为 $x_{ij}$，则从 $A_i$ 发出的物资总量为 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$，它不能超过 $A_i$ 的储量 $a_i$；在 $B_j$ 收到的物资总量为 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$，应要求它等于 $B_j$ 的需求量 $b_j$. 总运费 $f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. 因此调运问题的数学模型可表述为：

求未知量 $x_{ij}$($i = 1,2,\cdots,m$；$j = 1,2,\cdots,n$)的值，使之满足下列条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n),$$

并使函数

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

达到最小值.

**例 3　合理下料问题**

某工厂有一批长度为 5 m 的钢管(数量充分多)．为制造零件的需要，要将它们截成长度分别为 140 cm，95 cm，65 cm 的管料，并要求这三种管料按 2:4:1 的比例配套．问如何下料，才能使残料最少?

表 1-1 中列出了 8 种可能的截法(残料显著多的截法未列入)．

**表 1-1**

| 料长＼根数＼截法 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 140 cm | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 95 cm | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 5 | 3 | 1 |
| 65 cm | 1 | 0 | 3 | 1 | 4 | 0 | 3 | 6 |
| 残料/cm | 15 | 30 | 25 | 10 | 5 | 25 | 20 | 15 |

若只选取表 1-1 中的一种截法，如选截法 5 下料，可以使残料最少，但不满足配套要求．所以应当选取多种截法配合下料．

用 $x_i$ 表示按第 $i$ 种截法截割的钢管数量($i=1,2,\cdots,8$)，则所截出的 140 cm 长的管料数量为

$$3x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5;$$

所截出的 95 cm 长的管料数量为

$$2x_2+3x_4+x_5+5x_6+3x_7+x_8;$$

所截出的 65 cm 长的管料数量为

$$x_1+3x_3+x_4+4x_5+3x_7+6x_8.$$

按照配套要求，它们应分别等于 $2a$，$4a$，$a$，这里 $a$ 表示套数．为便于求解，可先令 $a=1$，求出 $x_i$($i=1,2,\cdots,8$)后，再同乘以适当倍数，使它们都化为整数．残料总量为

$$f=15x_1+30x_2+25x_3+10x_4+5x_5+25x_6+20x_7+15x_8.$$

于是，上述下料问题的数学模型可表述为:

求 $x_j(j=1,2,\cdots,8)$，使之满足下列条件：

$$\begin{aligned}
3x_1+2x_2+2x_3+\ x_4+\ x_5 \qquad\qquad\qquad\qquad &=2,\\
2x_2 \qquad +3x_4+\ x_5+5x_6+3x_7+\ x_8&=4,\\
x_1 \qquad +3x_3+\ x_4+4x_5 \qquad +3x_7+6x_8&=1,\\
x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,8)&,
\end{aligned}$$

并使函数

$$f=15x_1+30x_2+25x_3+10x_4+5x_5+25x_6+20x_7+15x_8$$

达到最小值.

**例 4　经济配料问题**

某饲养场有 5 种饲料. 已知各种饲料的单位价格和每百公斤饲料的蛋白质、矿物质、维生素含量如表 1-2 所示. 又知该场每日至少需蛋白质 70 单位、矿物质 3 单位、维生素 10 毫单位. 问如何混合调配这 5 种饲料，才能使总成本最低？

**表 1-2**

| 饲料种类 | 有关成分 | | | 饲料单价 |
|---|---|---|---|---|
| | 蛋白质/单位 | 矿物质/单位 | 维生素/毫单位 | |
| 1 | 0.30 | 0.10 | 0.05 | 2 元/100 公斤 |
| 2 | 2.20 | 0.05 | 0.10 | 7 元/100 公斤 |
| 3 | 1.00 | 0.02 | 0.02 | 4 元/100 公斤 |
| 4 | 0.60 | 0.20 | 0.20 | 3 元/100 公斤 |
| 5 | 1.80 | 0.05 | 0.08 | 5 元/100 公斤 |

设第 $i$ 种饲料的用量为 $x_i$(单位：百公斤)，$i=1,2,\cdots,5$. 则对应的总成本(单位：元)为

$$f=2x_1+7x_2+4x_3+3x_4+5x_5.$$

要求蛋白质总含量不少于 70 单位，则应满足

$$0.3x_1+2.2x_2+x_3+0.6x_4+1.8x_5 \geqslant 70.$$

要求矿物质总含量不少于 3 单位，则应满足

$$0.1x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5\geqslant 3.$$

要求维生素总含量不少于 10 毫单位，则应满足

$$0.05x_1+0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5\geqslant 10.$$

因此上述**配料问题**的数学模型如下：

求 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$，使之满足下列不等式：

$$\begin{aligned}
0.3x_1+\ 2.2x_2+\qquad x_3+0.6x_4+\ 1.8x_5&\geqslant 70,\\
0.1x_1+0.05x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.05x_5&\geqslant 3,\\
0.05x_1+\ 0.1x_2+0.02x_3+0.2x_4+0.08x_5&\geqslant 10,\\
x_i\geqslant 0\quad (i=1,2,\cdots,5)&,
\end{aligned}$$

并使函数

$$f=2x_1+7x_2+4x_3+3x_4+5x_5$$

达到最小值.

这类例子可以举出许多. 它们的实际内容虽然各不相同，但抽象成数学问题，都是求一组未知量(称为**决策变量**)的值，使之满足由一组线性不等式或线性方程式所表达的条件(称为**约束条件**)，在此前提下，使一个线性函数(称为**目标函数**)达到最大值或最小值. 这类问题便是线性规划的研究对象，称为**线性规划问题**.

## 习题 1.1

试建立下列问题的数学模型：

1. 某化工厂生产 $A_1,A_2$ 两种产品. 已知生产产品 $A_1$ 一万瓶要用原料 $B_1$ 5 公斤、$B_2$ 300 公斤、$B_3$ 12 公斤，可得利润 8000 元；生产 $A_2$ 一万瓶要用原料 $B_1$ 3 公斤、$B_2$ 80 公斤、$B_3$ 4 公斤，可得利润 3000 元. 该厂现有原料 $B_1$ 500 公斤、$B_2$ 20000 公斤、$B_3$ 900 公斤. 问在现有条件下，生产 $A_1,A_2$ 各多少，才能使该厂获得的利润最大?

2. 有甲、乙两个煤厂，每月进煤分别不少于 60 吨、100 吨，它们担负供应三个居民区用煤的任务. 这三个居民区每月需用煤分别为 45 吨、75 吨、40 吨. 甲厂离这三个居民区分别为 10 公里、5 公里、6 公里. 乙厂离这三个居民

区分别为 4 公里、8 公里、15 公里. 问这两个厂如何分配供煤量，才能使总运输量(以吨公里为单位)最小?

3. 某农场有耕地 403 亩，打算种植三种作物：地瓜、玉米、谷子. 该农场有粪肥 3 820 车、化肥 1 138 斤，可提供劳力 5 296 个工. 已知三种作物的亩产量和每亩所需粪肥、化肥和劳力的数量如表 1-3 所示(其中地瓜亩产量已折合成粮食计算). 问制定怎样的种植计划，才能使总产量最高?

**表 1-3**

| 资源 \ 作物 | 地瓜 | 玉米 | 谷子 |
|---|---|---|---|
| 粪肥/车 | 8 | 10 | 12 |
| 化肥/斤 | 0 | 4 | 26 |
| 劳力/工 | 16 | 12 | 12 |
| 亩产/斤 | 280 | 300 | 320 |

4. 一消费者要购买营养物，要求维生素 A,C 的含量分别不少于 9 单位、19 单位. 今有 6 种营养物都含有这两种维生素，但含量各不相同，各营养物的价格也不相同，如表 1-4 所示. 问消费者应购买 6 种营养物各多少，才能既获得所需维生素 A,C 的含量，又花钱最少?

**表 1-4**

| 每公斤营养物所含维生素/单位 维生素 \ 营养物 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 |
| 营养物价格/(元/公斤) | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 |

## 1.2 线性规划问题的数学模型

从上节知道，线性规划问题就是一个线性函数在一组线性约束条件下的极值问题，其数学模型的一般形式为:

求一组决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值，使之满足下列约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \ (\text{或}\geqslant b_1,\text{或}=b_1), \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \ (\text{或}\geqslant b_2,\text{或}=b_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \ (\text{或}\geqslant b_m,\text{或}=b_m), \end{cases}$$

并使目标函数

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

取最大值(或最小值).

其中，$a_{ij},b_i,c_j$ 均为实常数，从应用和计算的角度考虑，可以认为它们都是有理数.

为书写简便起见，上述模型可表述为

$$\max\ (\text{或}\ \min)\quad f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\ (\text{或}\geqslant b_i,\ \text{或}=b_i),\ i=1,2,\cdots,m.$$

这里 max $f$ 表示求函数 $f$ 的最大值解，min $f$ 表示求最小值解，s. t. 是“subject to”的缩记，表示“在……约束条件之下”，或者说“约束为……”. 这里把非负性条件 $x_j\geqslant 0$ 看成上述不等式的特殊情形.

如前节例 1 的资源利用问题，其数学模型可写为

$$\max\quad z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\quad (i=1,2,\cdots,m),$$

$$x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

前节例 2 的物资调运问题，其数学模型可写为

$$\min\quad f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com