高等学校专科教材配套图书

高等数学
学习辅导

杨万禄 滕桂兰 编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/杨万禄,滕桂兰编.—天津:天津大学出版社,2003.9

ISBN 7-5618-1810-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨… ②滕… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 063459 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 天津市宝坻区第二印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm×210mm
印　　张 10
字　　数 298 千
版　　次 2003 年 8 月第 1 版
印　　次 2003 年 8 月第 1 次
印　　数 1-4 000
定　　价 15.00 元

前 言

《高等数学学习辅导》是根据教育部1998年颁布的《全国成人高等教育专科高等数学课程教学基本要求》和我校多年来教学实践经验并结合目前成人教育的现状和特点而编写的.

考虑到学员在学习高等数学过程中,往往感到抽象难懂,特别是解题时缺少思路不知如何下手,为了帮助学员学习高等数学这门课程,我们编写了这本《高等数学学习辅导》.该书可作为大学专科、高等职业教育、函授、夜大学专科、高等教育自学考试等学员学习高等数学的学习辅导教材.

该书各章由以下三部分组成.

一、内容提要

简要列出本章所学的主要内容,帮助学生总结归纳本章的要点.内容提要包括:定义、定理、性质、主要公式等.

二、例题及例题分析

例题深广度的选择,体现教材的基本内容和具体要求.通过例题分析,可以帮助学生加深对基本概念和定理的理解;指导学生运用基本概念、基本理论和基本方法分析问题、解决问题,开阔思路,举一反三,提高解题的能力;减少学生做题时所遇到的困难.

三、思考练习题

思考练习题,可供学生在复习时检查自己对本章所学的基本内容掌握的情况,同时也达到巩固基本概念的目的.对练习题给出了比较详细的题解.

本书是学员学习高等数学的一本辅助性的读物,结合教学要求和教学进度学员可参看其相应部分.我们希望通过《高等数学学习辅导》能使广大的学员在掌握高等数学的基本内容、提高基本计算能力方面起到一定的作用.

书中标有 * 号的内容、例题，不做基本要求，可供有余力的学员选读．

该书共分 13 章，第 1、2、3、8、9、10、11 章由杨万禄编写．第 4、5、6、7、12、13 章由滕桂兰编写．

本书在编写过程中得到天津大学出版社的热情支持，在此表示感谢．

由于我们教学经验和水平所限，编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正．

编者

2003 年 7 月于天津大学

目　　录

第 1 章　函数 ………………………………………… (1)
　一　内容提要 ………………………………………… (1)
　二　例题及例题分析 ………………………………… (8)
　三　思考练习题 ……………………………………… (17)
第 2 章　极限与连续 ………………………………… (22)
　一　内容提要 ………………………………………… (22)
　二　例题及例题分析 ………………………………… (28)
　三　思考练习题 ……………………………………… (42)
第 3 章　导数与微分 ………………………………… (50)
　一　内容提要 ………………………………………… (50)
　二　例题及例题分析 ………………………………… (55)
　三　思考练习题 ……………………………………… (62)
第 4 章　中值定理与导数应用 ……………………… (71)
　一　内容提要 ………………………………………… (71)
　二　例题及例题分析 ………………………………… (77)
　三　思考练习题 ……………………………………… (88)
第 5 章　不定积分 …………………………………… (102)
　一　内容提要 ………………………………………… (102)
　二　例题及例题分析 ………………………………… (104)
　三　思考练习题 ……………………………………… (116)
第 6 章　定积分 ……………………………………… (131)
　一　内容提要 ………………………………………… (131)
　二　例题及例题分析 ………………………………… (135)
　三　思考练习题 ……………………………………… (142)
第 7 章　定积分应用 ………………………………… (159)

一　内容提要……………………………………………………… (159)
二　例题及例题分析………………………………………………… (163)
三　思考练习题……………………………………………………… (169)
第 8 章　向量代数与空间解析几何 ……………………………… (175)
一　内容提要……………………………………………………… (175)
二　例题及例题分析………………………………………………… (181)
三　思考练习题……………………………………………………… (185)
第 9 章　多元函数微分学 ………………………………………… (196)
一　内容提要……………………………………………………… (196)
二　例题及例题分析………………………………………………… (203)
三　思考练习题……………………………………………………… (217)
第 10 章　重积分 ………………………………………………… (226)
一　内容提要……………………………………………………… (226)
二　例题及例题分析………………………………………………… (231)
三　思考练习题……………………………………………………… (242)
第 11 章　曲线积分 ……………………………………………… (248)
一　内容提要……………………………………………………… (248)
二　例题及例题分析………………………………………………… (252)
三　思考练习题……………………………………………………… (258)
第 12 章　无穷级数 ……………………………………………… (262)
一　内容提要……………………………………………………… (262)
二　例题及例题分析………………………………………………… (267)
三　思考练习题……………………………………………………… (280)
第 13 章　微分方程 ……………………………………………… (294)
一　内容提要……………………………………………………… (294)
二　例题及例题分析………………………………………………… (299)
三　思考练习题……………………………………………………… (305)

第1章 函　　数

函数是高等数学研究的主要对象，它是高等数学中重要的概念之一，是学习微积分的基础.

一　内容提要

(一)常量与变量

1.常量与变量

在某一过程中，保持一定数值的量叫常量.可以取不同数值的量叫变量.

2.连续变量的表示方法

表示变量的变化范围可以用区间或不等式，现将其列成下表.

区　　间	不等式表示	含　　义
$(-\infty,+\infty)$	$-\infty<x<-\infty$	全体实数
$(a,+\infty)$	$a<x<+\infty$	大于 a 的全体实数
(a,b)	$a<x<b$	大于 a 小于 b 的全体实数
$[a,b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	大于或等于 a 但小于或等于 b 的全体实数

此外还有$(a,b]$,$[a,b)$,$(-\infty,b)$,$[a,+\infty)$等，其含义请读者自己讨论.

(二)绝对值与邻域

1.绝对值

(1)定义：任意实数 a 的绝对值，用符号$|a|$表示，定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

由定义可知,任何一个实数 a 的绝对值是非负的.

(2)绝对值的性质:

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},$$

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,\qquad ||a|-|b||\leqslant|a-b|,$$

$$|x-a|<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta.$$

2.邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,满足不等式 $a-\delta<x<a+\delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域,点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

(三)函数

1.函数的定义

设在某个过程中,有两个变量 x 和 y,如果当变量 x 在实数的某一范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的规律,总有确定数值和它对应,则变量 y 称为变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$.其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为因变量.

2.定义域

自变量取值的全体称为函数的定义域.若函数由解析式子给出,不考虑函数的实际意义,则函数定义域就是使解析式子有意义的自变量的一切实数值.

3.函数的表示法

(1)公式法:两个变量之间的函数关系是借助公式直接给出的,即称为函数的公式表示法或解析法,这种方法便于理论上研究,但不直观.

(2)图示法:借助于平面坐标系,将变量之间的关系用图形表示出来.这种方法直观,但准确度不高.

(3)表格法:用表格的方法把变量之间的函数关系表示出来,此种表示法给了自变量的值,可以直接查到对应的函数值,但缺乏直观性,不便于理论上的研究.

4.函数的符号

$y=f(x)$表示 y 是 x 的函数,"f"表示 y 与 x 之间的对应规律,即函数关系.在同一个问题里有时会同时有几个函数,这时就要用不同的函数记号,如 $F(x)$,$g(x)$,$\varphi(x)$等分别表示,或用 $f_1(x)$,$f_2(x)$,……

(四)函数的性质

1.函数的单值性与多值性

如果自变量在定义域内任取一个确定值时,函数只有一个确定值和它对应,则称为单值函数.若有两个或两个以上的函数值与之对应,则称为多值函数.

以后凡是没有特别说明的,本书中函数都是指单值函数.

2.函数的有界性

若存在正数 M,使函数 $f(x)$在区间 $\mathscr{X}$内都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在区间 $\mathscr{X}$内有界.若这样的 M 不存在,则称 $f(x)$在 $\mathscr{X}$内无界.

3.函数的单调性

若对于(a,b)内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的.

若对于(a,b)内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.同样可以在无限区间上定义单增或单减函数.

4.函数的奇偶性

函数 $f(x)$在对称区间$(-a,a)$内有定义,对任意点 x 有$f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$在区间$(-a,a)$内为奇函数.

函数 $f(x)$在对称区间$(-a,a)$内有定义,对任意点 x 有$f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$在区间$(-a,a)$内为偶函数.

奇函数的图形对称于坐标原点,偶函数的图形对称于 y 轴.

5.函数的周期性

若对函数 $f(x)$存在一个不为零的数 l,使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任意 x 值都成立,则称 $f(x)$ 为周期函数. l 是周期函数 $f(x)$ 的周期,通常 l 是指满足上式的最小正数.

(五)反函数

1.反函数定义

设 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当做自变量,x 当做因变量,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,或记为 $x=f^{-1}(y)$,而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

在反函数定义中,自变量写成 y,函数写成 x,这与我们用 x 表示自变量,y 表示函数的习惯不合,所以一般把按定义得到的反函数 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$)中的 x 与 y 两个字母互换写成 $y=\varphi(x)$(或 $y=f^{-1}(x)$).

2.反函数的图形

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形画在同一个直角坐标系中,两个图形对称于直线 $y=x$.

(六)初等函数

1.基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.为了学习方便,把基本初等函数的图形及简单性质列成表(见附表).

2.复合函数

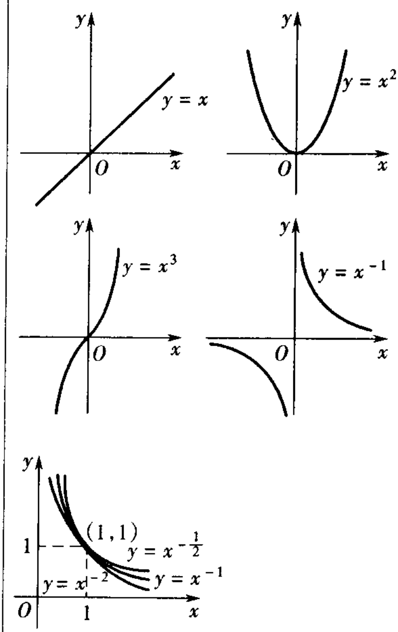
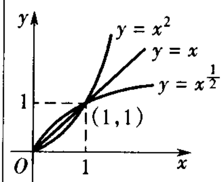
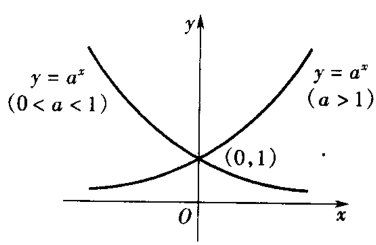
设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有意义,则 y 成为 x 的函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$.这个函数叫做由函数 $y=f(u)$,及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,其中 u 称为中间变量.

3.初等函数

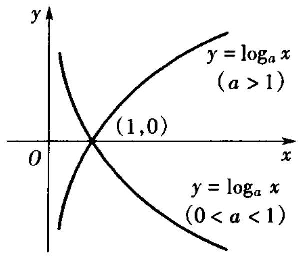
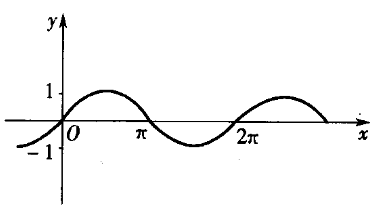
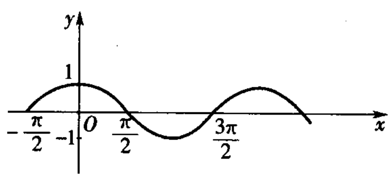
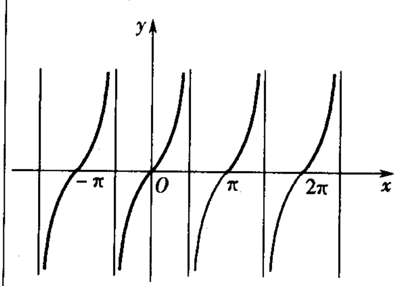
初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成,并用一个式子表示的函数.

分段函数不是用一个解析式子表示,所以分段函数一般情况下不是初等函数,而称为非初等函数.

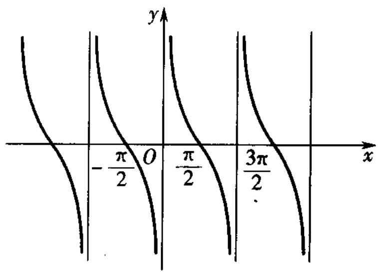
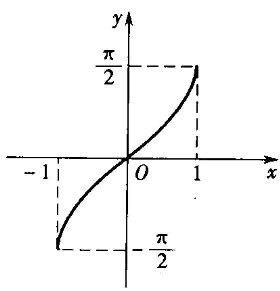
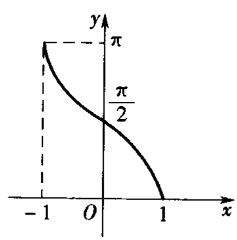
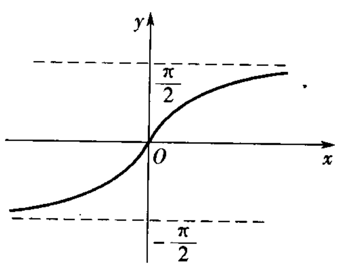
附　表

名称	公式	图　形	简单性质
幂函数	$y=x^{\mu}$ (μ 为实数)		1. $\mu>0$ 时，图形过(0,0)及(1, 1)两点，在(0, $+\infty$)内是增函数. 2. $\mu<0$ 时，图形过(1,1)点，在(0, $+\infty$)内是减函数. 
指数函数	$y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)		定义域:($-\infty$, $+\infty$). 1. 过(0,1)点. 2. $a^x>0$. 3. 当 $a>1$ 时，a^x 单调增；当 $0<a<1$ 时，a^x 单调减.

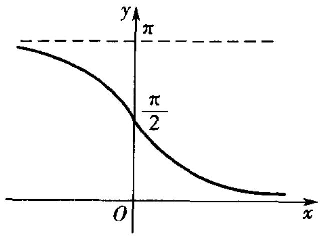
续表

名称	公式	图形	简单性质
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$		定义域:$(0,+\infty)$. 1.过(1,0)点. 2.当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增; 当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减.
三角函数	$y=\sin x$		定义域:$(-\infty,+\infty)$. 1.图形对称于原点. 2.以 2π 为周期. 3.$\|\sin x\|\leqslant 1$.
	$y=\cos x$		定义域:$(-\infty,+\infty)$. 1.图形对称于 y 轴. 2.以 2π 为周期. 3.$\|\cos x\|\leqslant 1$.
	$y=\tan x$		定义域:$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$. 1.图形对称于原点. 2.以 π 为周期. 3.在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增.

续表

名称	公式	图　形	简单性质
三角函数	$y=\cot x$		定义域：$x\neq k\pi$. 1. 图形对称于原点. 2. 以 π 为周期. 3. 在 $(0,\pi)$ 内单调减.
反三角函数	$y=\arcsin x$		定义域：$[-1,1]$. 1. 图形对称于原点. 2. $-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 3. 单调增.
	$y=\arccos x$		定义域：$[-1,1]$. 1. $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. 2. 单调减.
	$y=\arctan x$		定义域：$(-\infty,+\infty)$. 1. 图形对称于原点. 2. $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$. 3. 单调增.

续表

名称	公式	图　形	简单性质
反三角函数	$y=\operatorname{arccot} x$		定义域:$(-\infty,+\infty)$. 1. $0<\operatorname{arccot} x<\pi$. 2. 单调减.

二　例题及例题分析

(一)绝对值与不等式

例 1. 已知 $0<|x+2|\leqslant 3$,试用区间表示变量 x 的变化范围.

解　由 $0<|x+2|\leqslant 3$,可得到

$$-3\leqslant x+2\leqslant 3,x\neq -2,$$

即

$$-5\leqslant x\leqslant 1,x\neq -2.$$

变量 x 的变化区间为 $[-5,-2)\cup(-2,1]$.

例 2. 解绝对值不等式:

(1) $|x+a|\geqslant b$;　　　(2) $|x+1|<|x|$.

解　(1)当 $b\leqslant 0$ 时,$|x+a|\geqslant b$ 恒成立,即 x 为任意实数.

当 $b>0$ 时,$|x+a|\geqslant b$ 等价于

$$x+a\geqslant b \text{ 或 } x+a\leqslant -b,$$

解得　$x\geqslant b-a$,或 $x\leqslant -(a+b)$ 为绝对值不等式的解.

(2)由 $|x+1|<|x|$,得 $(x+1)^2<x^2$,

即

$$x^2+2x+1<x^2,$$

所以

$$2x<-1,$$

得

$$x<-\frac{1}{2},\text{即}\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right).$$

例 3. 解不等式 $x^2-2x-3>0$.

解 对 x^2-2x-3 分解,原不等式等价于

$$(x-3)(x+1)>0,$$

即

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x-3<0, \\ x+1<0, \end{cases}$$

解前组不等式得到 $x>3, x>-1$,其公共部分为 $x>3$.解后组不等式得到 $x<3, x<-1$,其公共部分为 $x<-1$.所以原不等式解的范围为

$$x<-1, \text{或 } x>3,$$

也可写成$(-\infty,-1)$,或$(3,+\infty)$.

(二)函数及其定义域

例 4.下列各对函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\frac{x}{x}$, $g(x)=1$;

(2)$f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(3)$f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(4)$f(x)=\arctan x (x>0)$, $g(x)=\arctan\frac{1}{x}(x>0)$.

解 (1)不相同.因为 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

(2)不相同.因为 $f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$(0,+\infty)$.

(3)相同.因为两个函数的定义域和对应规律都相同.

(4)不相同.虽然两函数的定义域是相同的,但它们的对应规律不相同.

例 5.求下列函数的定义域.

(1)$y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; (2)$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$.

解 (1)由于对数中的真数必须大于零,因此 $\lg(x-1)$的定义域是 $x-1>0$,即 $x>1$.对于$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域必须是 $x+1>0$,即 $x>-1$.所以函数的定义域是两者的公共部分 $x>1$.故函数

$$y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

的定义域是 $x>1$,或表示为$(1,+\infty)$.

(2)$\sqrt{x^2-x-6}$的定义域必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$,即

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0$$

解得 $$x\geqslant 3,\text{或 } x\leqslant -2.$$

而 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域必须满足

$$\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,$$

即 $$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得 $$-3\leqslant x\leqslant 4.$$

取两者的公共部分是 $-3\leqslant x\leqslant -2,3\leqslant x\leqslant 4$.所以函数

$$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$$

的定义域为 $-3\leqslant x\leqslant -2$,与 $3\leqslant x\leqslant 4$,或表示为$[-3,-2]\cup[3,4]$.

例 6. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;　　(2)$y=\sqrt{9-x^2}$;

(3)$y=\lg(6-5x-x^2)$;　　(4)$y=\arcsin(2x-3)$.

解　(1)分母不为零:$x^2-3x+2\neq 0$,所以 $x\neq 1$,与 $x\neq 2$,定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)负数不能开偶次方:$9-x^2\geqslant 0$,所以 $-3\leqslant x\leqslant 3$.定义域为$[-3,3]$.

(3)对数中的真数必须大于零,即 $6-5x-x^2>0$,所以 $-6<x<1$,故定义域为$(-6,1)$.

(4)反正弦函数中的变量的绝对值必须小于等于 1,即$|2x-3|\leqslant 1$,所以 $1\leqslant x\leqslant 2$,定义域为$[1,2]$.

例 7. 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(2x-1)$的定义域.

解　函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,应该理解为括号里面的变量的取值范围在0与1之间,即 0$\leqslant$变量$\leqslant$1.此题的变量为 $2x-1$,故有

$$0 \leqslant 2x-1 \leqslant 1,$$

即
$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

故函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

小结

函数由解析式子给出时，其定义域是使解析式子有意义的一切实数. 为此求函数的定义域时应遵守以下原则：

(1)在分式中分母不能为零；

(2)偶次根式内非负；

(3)在对数函数中真数大于零；

(4)反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, 要满足 $|x| \leqslant 1$；

(5)两函数和(差)的定义域，应是两函数定义域的公共部分.

(三)函数符号的运用

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的表达式，求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式

例 8. 已知 $f(x)=x^2-3x+1$，求 $f(x+1)$, $f(\sin x)$, $f[f(x)]$.

解 已知函数的结构应该理解为

$$f(\text{变量})=(\text{变量})^2-3(\text{变量})+1.$$

求 $f(x+1)$, $f(\sin x)$, $f[f(x)]$ 相当括号中的变量分别用 $x+1$, $\sin x$ 和 $f(x)$ 代入所得的结果. 即

$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+1=x^2-x-1.$$

$$f(\sin x)=(\sin x)^2-3\sin x+1,$$

$$\begin{aligned} f[f(x)] &= [f(x)]^2-3f(x)+1 \\ &= (x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1 \\ &= x^4-6x^3+8x^2+3x-1. \end{aligned}$$

例 9. 已知 $f(3x)=\log_2\sqrt{\frac{9x+1}{2}}$，求 $f(1)$.

解 令 $3x=1$，即 $x=\frac{1}{3}$，将 $x=\frac{1}{3}$，代入上式得

$$f(1)=\log_2\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$