Z变换与差分方程

王泽汉
龙文庭 编

哈尔滨工业大学出版社

Z变换与差分方程

王泽汉　龙文庭　编

哈尔滨工业大学出版社

Z变换与差分方程

王泽汉　龙文庭 编

•

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

•

开本 787×1092　1/32　印张 5.625　字数 121,000

1985年1月第1版　1985年1月第1次印刷

印数 1—10,000

书号 13341·5　定价 1.40元

前　言

用Z变换解差分方程，实质上就是将差分方程转化为代数方程来解。它同拉普拉斯变换解微分方程一样，是一种有效的方法。在自动控制理论中，是处理线性定常离散系统的一个重要方法。

本书对Z变换的概念、理论与方法，作了较系统而全面的介绍。汇集、推算了较完整的Z变换表。最后，并给出了关于差分方程的算子解法。

本书可供有关专业的教师、科技人员、工程技术人员、自学者学习参考之用。由于编者的水平与经验所限，不当之处，在所难免。请读者勿吝批评指正。

本书经杨克劭同志校阅，并提出宝贵意见，在此致谢。

编　者

1984.10

目　录

§1 差分方程概念

如同微分方程用来表明模拟信号的系统那样，差分方程则用来表明离散信号的系统。由于差分方程容易在数字计算机上处理，并且比较容易解出，所以差分方程可用来逼近微分方程。

作为数字逼近的一个例子，我们可用一个向前差来逼近一个函数在一个已知点的导数，即

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=kT} \approx \frac{y(kT+T)-y(kT)}{T} \tag{1.1}$$

其中T（$T>0$）选为某一个很小的值使(1.1)是一个足够近似的等式。用(1.1)，我们可将一阶微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=f(t) \tag{1.2}$$

在$t=kT$时用

$$\frac{y(kT+T)-y(kT)}{T}+ay(kT)=f(kT) \tag{1.3}$$

来逼近。方程(1.3)可写成

$$\frac{1}{T}y(kT+T)+\left(a-\frac{1}{T}\right)y(kT)=f(kT) \tag{1.4}$$

此为一阶差分方程，其中$k=0, 1, 2, 3, \cdots$。

一般，一个 n 阶常系数线性差分方程为

$$a_0y(kT+nT)+a_1y(kT+nT-T)+\cdots+a_{n-1}y(kT+T)+a_ny(kT)=f(kT) \tag{1.5}$$

其中a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}，a_n均为常数，$k=0$，1，2，3，$\cdots$，而 n 为固定的自然数，$n\geqslant1$。又 $y(iT)$表 y 在时刻iT的值，i 为自然数或 0 。i 为负时，$y(iT)=0$ 。

方程(1.5)是n阶差分方程。其所以称为n阶是因为在方程中出现的最高差为nT。我们可用下述方法把(1.5)化成一组包含n个未知数列的 n 个一阶差分方程。为了给n个未知数列编号，我们改写$x_1(kT)=y(kT)$，并令

$$x_2(kT)=x_1(kT+T)[=y(kT+T)]$$

$$x_3(kT)=x_2(kT+T)[=y(kT+2T)]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n(kT)=x_{n-1}(kT+T)[=y(kT+nT-T)]$$

把末式中kT换为 $kT+T$，可有

$$x_n(kT+T)=x_{n-1}(kT+2T)[=y(kT+nT)]$$

于是(1.5)可写成

$$x_n(kT+T)=-\frac{a_n}{a_0}x_1(kT)-\frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(kT)-\cdots-\frac{a_1}{a_0}x_n(kT)+\frac{1}{a_0}f(kT)$$

从而改写$x_1(kT)=y(kT)$，可见（1.5）等价于一组 n 个一阶差分方程

$$x_2(kT)=x_1(kT+T)$$

$$x_3(kT)=x_2(kT+T)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_n(kT)=x_{n-1}(kT+T)\\
&x_n(kT+T)=-\frac{a_n}{a_0}x_1(kT)\\
&-\frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(kT)-\cdots-\frac{a_1}{a_0}x_n(kT)\\
&+\frac{1}{a_0}f(kT)
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

我们把(1.6)写成向量—矩阵型。令

$$\vec{x}(kT)=\begin{pmatrix} x_1(kT)\\ x_2(kT)\\ x_3(kT)\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_n(kT)\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

这是$n\times 1$状态向量。又令

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
-\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \cdot & \cdots & -\frac{a_1}{a_0}
\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$\vec{B}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \cdots\\ 1/a_0\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

它们分别是$n\times n$矩阵和$n\times 1$矩阵。于是(1.6)可写成

$$\vec{x}(kT+T)=\vec{A}\vec{x}(kT)+\vec{B}f(kT)$$

欲证此，注意

$$\vec{x}(kT+T)=\begin{pmatrix} x_1(kT+T)\\ x_2(kT+T)\\ x_3(kT+T)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}(kT+T)\\ x_n(kT+T)\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

并且由矩阵乘法有

$$\vec{A}\vec{x}(kT)=\begin{pmatrix} x_2(kT)\\ x_3(kT)\\ x_4(kT)\\ \cdots\cdots\\ x_n(kT)\\ -\frac{a_n}{a_0}x_1(kT)-\frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(kT)-\cdots\\ -\frac{a_1}{a_0}x_n(kT)\end{pmatrix}$$

$$\vec{B}f(kT)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\ \frac{1}{a_0}f(kT)\end{pmatrix}$$

它们是三个$n\times 1$矩阵。由矩阵加法和矩阵相等的定义，可见(1.6)等价于(1.10)。

§2 差分方程解法举例

我们考察一个简单的例子。设有一阶差分方程

$$x(kT+T)+2x(kT)=0 \tag{2.1}$$

试求$x(kT)$。

我们可用递推法求出$x(kT)$：于(2.1)令$k=0$，可有

$$x(T)+2x(0)=0$$

故

$$x(T)=-2x(0)$$

于(2.1)令$k=1$，可有

$$x(2T)+2x(T)=0$$

故

$$x(2T)=-2x(T)=(-2)^2x(0)$$

再于(2.1)令$k=2$得

$$x(3T)+2x(2T)=0$$

故 $$x(3T)=-2x(2T)=(-2)^3x(0)$$

于是我们可归纳出

$$x(kT)=(-2)^kx(0) \tag{2.2}$$

而由(2.1)可有

$$x(kT+T)=-2x(kT)$$

以(2.2)代入之可得

$$x[(k+1)T]=(-2)^{k+1}x(0)$$

这与(2.2)有相同的形式，(以$k+1$代(2.2)的k)，故(2.2)

即为所求之解。由$x(0)$的任意性，这解可写成

$$x(kT)=C(-2)^k,$$

C为常数，即C与k无关。

称此解为(2.1)的通解。

这种方法虽然可普遍应用，但对于二阶或更高阶的差分方程，要归纳出通解就繁杂得多。

类似于用拉氏变换解常系数线性微分方程一样，可用z变换解常系数线性差分方程。还是拿(2.1)作例子。我们以z^{-k}遍乘（2.1)，然后取和$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+T)z^{-k}+2\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=0 \qquad (2.3)$$

假定收敛。每一个和显然是z的函数。如果设

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=X(z) \qquad (2.4)$$

则令$k+1=k'$，可有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+T)z^{-k}&=\sum_{k'=1}^{\infty}x(k'T)z^{-k'+1}\\&=z\sum_{k'=1}^{8}x(k'T)z^{-k'}=z\left[\sum_{k'=0}^{\infty}x(k'T)z^{-k'}-x(0)\right]\\&=z[X(z)-x(0)]\end{aligned} \qquad (2.5)$$

以(2.4)及（2.5）代入（2.3）可有

$$z[X(z)-x(0)]+2X(z)=0$$

由此解得

$$X(z)=\frac{zx(0)}{z+2} \qquad (2.6)$$

我们再把(2.6)展开为Z^{-1}的幂级数。为此，把(2.6)写成

$$X(z)=\frac{1}{1+2z^{-1}}x(0)$$

如果 $|2Z^{-1}|<1$，即 $|Z|>2$，则可有展开式

$$X(z)=x(0)\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k z^{-k} \tag{2.7}$$

将(2.7)与(2.4)比较，可立刻得到

$$x(kT)=x(0)(-2)^k$$

由此可见，用上面的方法得到的结果和用递推方法得到的结果(2.2)相同。

这里的主要作法是采用变换(2.4)，其中 $X(Z)$ 就称为 $x(kT)$ 的 z 变换，它类似拉氏变换

$$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

注意对于一阶差分方程，我们以后将要用到性质(2.5)，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+T)z^{-k}=z[X(z)-x(0)]$$

而对二阶差分方程，以后还将用到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+2T)z^{-k}=\sum_{k'=2}^{\infty}x(k'T)z^{-k'+2} \quad (k'=k+2)$$

$$=z^2\left[\sum_{k'=0}^{\infty}x(k'T)z^{-k'}-x(0)-x(T)z^{-1}\right]$$

$$=z^2[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}] \tag{2.8}$$

一般，以后还将用到

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)z^{-k}=\sum_{k'=n}^{\infty}x(k'T)z^{-k'+n} \quad (k'=k+n)$$

$$=z^n\sum_{k'=n}^{\infty}x(k'T)z^{-k'}$$

$$=z^n[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}-\cdots-x(nT-T)z^{-n+1}] \tag{2.9}$$

公式(2.5)，(2.8)，(2.9)称为时间平移公式。（参阅§5）

§ 3 Z变换的定义及简单例子

设

$$0,\ T,\ 2T,\ 3T,\ \cdots,\ kT,\ \cdots \tag{3.1}$$

表示等时差的时间序列，T表示两相邻时间的间隔（T一般比较小）。再设

$$x(0),\ x(T),\ x(2T),\ x(3T),\ \cdots,\ x(kT),\ \cdots \tag{3.2}$$

表某信号x在(3.1)中各时刻的离散值。

定义

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k} \tag{3.3}$$

为$x(kT)$的z变换。我们并采用运算记号Z

$$Z[x(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=X(z) \tag{3.4}$$

这里z表复数。假定级数(3.3)在某圆$|z|>R$内收敛(参阅§7)。(3.3)是$z^{-1}=1/z$的幂级数，即z的负幂级数。

我们看几个简单例子。

例1. $x(kT)=1$

按(3.4)，在$|z|>1$时，得1的z变换为

$$Z[1]=\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot z^{-k}=\frac{1}{1-(1/z)}=\frac{z}{z-1} \tag{3.5}$$

例2. $x(kT)=\mu^k$，μ为常数，可为复数。

按(3.4)，可见在$|z|>|\mu|$时，得μ^k的z变换为

$$Z[\mu^k]=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu/z)^k=$$

$$\frac{1}{1-(\mu/z)}=\frac{z}{z-\mu} \tag{3.6}$$

特别，$\mu=1$，给出例1。

$\mu=-1$给出-1的z变换为$Z[(-1)^k]=\dfrac{z}{z+1}$

$\mu=e^{-aT}$给出e^{-aT}的z变换为$Z[e^{-akT}]=\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

$\mu=0$，认为$\mu^k=\begin{cases}1, & 在k=0\\ 0, & 在k=1,2,3,\cdots\end{cases}$

则(3.6)仍成立。

例3. $x(kT)=kT$

按(3.4)，可有：在$|z|>1$时给出kT的z变换为

$$Z[kT]=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}=Tz\sum_{k=0}^{\infty}kz^{-k-1}$$

$$=-TZ\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dz}(z^{-k})=-Tz\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}$$

$$=-Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-(1/z)}\right)=-Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$=-Tz\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2} \tag{3.7}$$

例4.于（3.6）中换μ为$\mu e^{j\omega T}$（此后，μ及ω均为实数$j=\sqrt{-1}$），可有

$$Z[\mu^k e^{j\omega kT}]=\frac{z}{z-\mu e^{j\omega T}}$$

$$=\frac{z(z-\mu e^{-j\omega T})}{(z-\mu e^{j\omega T})(z-\mu e^{-j\omega T})}$$

$$= \frac{z\{(z-\mu\cos\omega T)+j\mu\sin\omega T\}}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

分开实部及虚部（z看作实数），可得$\mu^k\cos(\omega kT)$，$\mu\sin(\omega kT)$的z变换分别为

$$Z\left[\mu^k\cos(\omega kT)\right]=\frac{z(z-\mu\cos\omega T)}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

$$Z\left[\mu^k\sin(\omega kT)\right]=\frac{z\mu\sin\omega T}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

特别，$\mu=1$，可有$\cos(\omega kT)$，$\sin(\omega kT)$的z变换分别为

$$Z\left[\cos(\omega kT)\right]=\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

$$Z\left[\sin(\omega kT)\right]=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

$\mu=-1$，可有$(-1)^k\cos(k\omega T)$，及$(-1)^k\sin(\omega kT)$的z变换分别为

$$Z\left[(-1)^k\cos(\omega kT)\right]=\frac{z(z+\cos\omega T)}{z^2+2z\cos\omega T+1}$$

$$Z\left[(-1)^k\sin(\omega kT)\right]=\frac{-z\sin\omega T}{z^2+2z\cos\omega T+1}$$

§ 4 Z变换与拉氏变换的关系

在§2中，我们已经指出：z变换

$$Z[x(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k} \tag{4.1}$$

类似拉氏变换

$$L[x(t)]=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{4.2}$$

连续自变量的函数 $x(t)$ 相应于离散变量 $x(kT)$。

积分 $\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ 相应求和 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$

因子 e^{-st} 相应因子 z^{-k}。

要得到两变换的本质联系，须借助于单位脉冲函数。

定义：单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{dt}, & (dt>0)，在 t=0\\ 0, & 在别处\end{cases}$$

从而

$$\delta(t-kT)=\begin{cases}\dfrac{1}{dt}, & (dt>0)，在 t=kT\\ 0, & 在别处\end{cases}$$

据此，它们的拉氏变换分别为

$$L[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\frac{1}{dt}\cdot 1\cdot dt=1 \tag{4.3}$$

及 $$L[\delta(t-kT)]=\int_0^{\infty}\delta(t-kT)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{dt}e^{-skT}dt=e^{-skT} \tag{4.4}$$

从数列

$$x(0),\ x(T),\ x(2T),\ \cdots,\ x(kT),\ \cdots$$

作脉冲函数表示

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \tag{4.5}$$

按(4.4)可得出$x^*(t)$的拉氏变换

$$L[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \tag{4.6}$$

在(4.6)中令

$$z = e^{sT} \tag{4.7}$$

亦即

$$s = \frac{1}{T}\ln z \tag{4.8}$$

即得$x(kT)$的z变换

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{4.9}$$

因此

$$Z[x(kT)] = [\text{脉冲函数}\,x^*(t)\,\text{的拉氏变换}]_{e^{sT}=z}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{8} x(kT)e^{-ksT}\right]_{e^{sT}=z} \tag{4.10}$$

应当指出：(4.10)与(4.9)即(4.1)，并没有本质区别。如果对(4.10)的和式各项作出代换$e^{sT} = z$，那末(4.10)就成为(4.9)。但把无限和化为封闭式时，(4.10)方括号中的和可能比(4.9)中的和稍方便些。我们讨论§3中的四个例子。对于例1，例2，例4，两种和化为封闭式，大致相同。对于例3，(4.10)中的和化为封闭式稍简。对此例，$x(kT) = kT$，(4.10)中的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds}(-e^{-skT}) = -\frac{d}{ds}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-sT})^k$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-e^{-sT}}\right) = \frac{Te^{-sT}}{(1-e^{-sT})^2} = \frac{Te^{sT}}{(e^{sT}-1)^2}$$