# 集与映射

李养成

湖南人民出版社

JIYUYINGSHE

# 集与映射

湖南人民出版社

# 集与映射

李养成

*

湖南人民出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行
湖南省新华印刷二厂印刷

*

1980年1月第1版第1次印刷
字数：185,000 印张：9.125 印数：1——2,000
统一书号：7109·1202 定价：0.72元

## 内 容 提 要

本书力图通俗地介绍集论的基础知识。概念的引入和定理的证明，叙述得比较详细，便于读者自学。它的主要内容包括：集及其运算、映射和关系、集的势、点集和函数五章，另加两个附录介绍了布尔代数的概念及超实数理论。

书中带有“*”的地方，初学者可略去不看，因不影响后面内容的学习。

此书可供中学数学教师阅读，高等院校理工科学生亦可参考。

# 前　　言

集合论是现代数学的一个重要分支。自从德国数学家康托尔(Cantor, 1845—1918)在1892年对集合论作了奠基性的工作以后，集合论思想的应用愈来愈扩大，并已成为现代数学各分支的基础与工具。本世纪以来，集合论一直吸引着许多数学家去进行研究，不断地攻克了许多难关，取得不少的成绩。在六十年代，由康托尔的集合概念又拓广为弗齐(Fuzzy)集的概念。弗齐集合论是现代弗齐数学(也叫不分明数学或模糊数学)的理论基础，因此康托尔的集合论又叫做经典集合论。

本书介绍的是经典集合论的内容。

第一章介绍集的一般概念，然后讲述集的运算及其基本运算规律，其中包含集代数的基本内容。

第二章在建立了直积集的概念的基础上，讨论集之间的关系，首先是单值对应关系，即本书所指的映射。在映射中，一一映射又是一种重要的映射。此外，还介绍了集中的有序关系和等价关系，相应地引进了有序集、集的分类和商集等。

第三章研究集的势，它描述了集的一种性质。无限集的势是有限集的元素个数这一概念的推广。判断两集是否等势，贝恩斯坦定理是一个有力的工具。在无限集的势中，主要讨论可数势与连续势，并指出可数势是最小的无限势，而最大的无限

势却不存在。

第四章介绍了距离空间，特别是欧氏空间点集论的基础知识，另外还简略地谈到了零集——依勒贝格意义测度为0的集合。

第五章主要对连续函数类、单调函数类、黎曼可积函数类进行讨论，它是微积分中相应内容的进一步深入。

附录一给出了布尔代数两种等价的定义，为此我们在有序集的基础上，引进了格的概念。另外还指出了集代数和逻辑代数都是布尔代数。

附录二比较详尽地介绍了超实数理论。在定义超实数系$^*R$时，我们引入了超滤子概念，然后规定超实数的四则运算和顺序关系，讨论了$^*R$的一系列性质，最后给出了$^*R$的几何表示。

本书在编写中，承本系李盛华教授的热情指导，使笔者受到不少启发和教益。孙烈武老师审阅了全书正文，尤兆桢、程麒老师审阅了附录，他们提出的宝贵建议使本书得到了进一步的改进。在此，一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中的错误和缺点请读者批评指正。

编　者

79年5月于湖南师范学院数学系

# 目　　录

# 第一章　集及其运算

## §1　集的概念

### 一、集合与元素

集合是现代数学最基本的概念之一．当我们把一群确定的事物作为整体来考察时，这一整体就叫做集合（简称集）．例如，某工厂全体工人可以作为一个集合，一个学校的所有教师也是一个集合．又如，一个教室里的所有座位，一个图书馆的所有书籍都可以看作是集合．

研究数学，总是要跟这样或那样的集合打交道．例如，全体自然数组成一个集合，界于 $-1$ 与 $1$ 之间的一切实数组成一个集合，方程 $x^2+5x+6=0$ 的解组成一个集合，形如 $f(x)=ax^2$（其中 $a$ 为实数，且 $a\neq 0$）的二次函数组成一个集合．还有各种几何图形，如直线段、平行四边形、球面、圆锥体等，都可以看作是具有某种几何属性的点的集合．

从上面列举的各种集合中，我们很自然地把集合理解为具有某种性质（或满足某一条件）的抽象的或具体的事物的全体．然而需要指出的是，上面关于集合概念的叙述不能认为是给它下定义，仅仅是一种解释而已．因为“整体”、“全体”等词都

是“集合”的同义词．而要把什么叫“集合”说清楚并不容易，正好象几何学中的“点”和“直线”一样．关于集合的严格数学定义，属于数学基础的研究范围，这里不作讨论．

组成集合的每一个事物，叫做这个集合的元素(简称元)．例如，一个公社的每台拖拉机是这个公社的拖拉机集合的元素；数 5 是自然数集合的一个元素．

如果两个集合所含有的元素完全相同，就说这两个集合是相等的．

在理解集合的概念时，应注意：

1° 集合是指具有某种属性的事物的全体，而不是指其中的个别事物，也就是说要区别集合及其元素这两个概念．例如，“湖南省全体教师”这个集合，不是指在湖南省工作的某一位教师，而是指在湖南省工作的所有教师．

2° 在讨论某一集合时，集合中所包含的事物应该是确定的，即可以确切地判断一个事物属于还是不属于这个集合．例如，只有在湖南省工作的教师才是“湖南省全体教师”这个集合的一元，不是教师或即使是教师、但不在湖南省工作的教师就不属于这个集合．

再看一个例子．“与数 3 接近的实数”能不能构成一集合？在这里，因无法判断一个数，比如 2，究竟是算接近于 3 的数还是不算接近于 3 的数，所以“与 3 接近的数”不能形成一个集合．

另外，所谓“包罗一切的集合”等类似术语，我们也不应当使用．

3° 由单独一个元素组成的单元素集与它含有的唯一元素

在概念上不是一回事，请不要混淆。

## 二、集合的表示法

习惯上，我们常用大写字母$A$，$B$，$X$，$Y$，… 表示集合，而用小写字母$a$，$b$，$x$，$y$，…表示元素。

若$x$是集$A$的一个元素，记为

$$x \in A,$$

读作"$x$属于$A$"。

若$x$不是集$A$的一个元素，则记为

$$x \notin A,$$

读作"$x$不属于$A$"。

**例 1** 以1,2,3,4为元素的集合可记为

$$\{1,2,3,4\}.$$

这种把集合的所有元素一一列举出来表示集合的方法叫做列举法。

注 $\{1,2,3,4\}$还可记为$\{1,3,4,2\}$，$\{2,4,1,3\}$等，因为它们含有的元素完全相同，表示同一个集合。

**例 2** 4到30以内的所有质数记为$P$：

$$P=\{5,7,11,13,17,19,23,29\},$$

显然 $13 \in P, 31 \notin P$.

**例 3** "绝对值小于5的所有整数"这一集合可表示为

{绝对值小于5的整数}.

这是表示集合的另一种方法．用描述集合元素的共同特征来表示集合的方法叫做描述法。

**例 4** 以$N,Z,Q$分别表示全体自然数，所有整数与一切有

理数，则它们可表示为

$$N=\{\text{自然数}\},\ Z=\{\text{整数}\},\ Q=\{\text{有理数}\}.$$

显然 $-2\in Z, -2\notin N$； $\frac{1}{2}\in Q$， $\frac{1}{2}\notin Z$.

除了用文字来描述一个集合的元素特征外，还可用数学式子来表达。设$p(x)$是某一与$x$有关的条件，所有适合这一条件的$x$所成之集可用$\underset{x}{E}[p(x)]$或$E[x;p(x)]$等表示。

**例 5** 如$p(x)$表示“数$x$的平方等于4”，则满足这一条件的$x$所成之集可表示为

$$E[x;x^2=4],$$

显然它是由$-2$与2这两个数组成的集合，用列举法又可表为$\{-2,2\}$，即

$$E[x;x^2=4]=\{-2,2\}.$$

比较这两种表示集的方法，可以看出：

1° 列举法的好处是可以具体看出集合由哪些元素所组成而描述法则刻划了集合元素的共同特征。

2° 对于由有限多个元素组成的有限集①，由例5可知，既可采用列举法又可采用描述法来表示该集，又如

$$\{1,2,3,4\}=\{\text{比5小的自然数}\};$$

$$\{\text{绝对值小于5的整数}\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}.$$

但是当有限集包含的元素较多时，还是采用描述法表示较好。如{小于100的正整数}用列举法表示就显得不便。

3° 对于不是由有限多个元素，即由无限多个元素组成的无

① 关于有限集的严格定义，见第三章§1。

限集①，则只能采用描述法表示。如集合$\{1,2,3,\cdots\}$不加说明，我们没有理由认为它表示自然数集，因为“…”究竟表示什么，我们并不清楚。倘若要用它表示自然数集，还须补充说明，比如

$$\text{自然数集}\{1,2,3,\cdots\},$$

或 $$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}\text{(其中}n\text{为自然数)等。}$$

对于由某些实数组成的特殊数集，在数学上用专门的符号表示。

设$R=\{$实数$\}$，$a$、$b$为二实数，且$a<b$。

把满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数$x$组成的集记为$[a,b]$，叫做闭区间，即

$$E[x;x\in R,a\leqslant x\leqslant b]=[a,b].$$

列举法 描述法

类似地，

$$E[x;\ x\in R,a<x<b]\xlongequal{\text{记为}}(a,b)，\text{叫做开区间，}$$

$$E[x;x\in R\text{且}a\leqslant x<b]=[a,b)$$

和 $$E[x;x\in R\text{且}a<x\leqslant b]=(a,b]$$

统称为半开（或半闭）区间。

$$E[x;x\in R\text{且}x\geqslant a]=[a,+\infty)$$

表示不小于$a$的一切实数之集，全体实数集$R$可记为$(-\infty,+\infty)$。这里$+\infty$，$-\infty$是记号，不是数。至于$(a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，其意义请读者补述。

---

① 关于无限集的精确定义，见第三章§1。

**例 6**　设函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

则　$E\left[x;f(x)>-\frac{1}{2}\right]$表示$(-\infty,+\infty)$ 中使$f(x)>-\frac{1}{2}$的所有$x$组成的集，该集是$[0,+\infty)$（图1.1）。

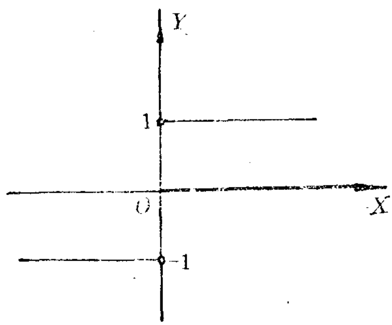

图　1.1

**三、空集**

不含任何元素的集叫做空集，记为$\varnothing$。

**例 7**　设 $A=\{x;x$ 是整数且$3x=-8\}$，则 $A=\varnothing$。因为由$3x=-8$，得$x=-\frac{8}{3}$，而$-\frac{8}{3}$不是整数。

**例 8**　设$B=\{x;x$是实数且$x^2+1=0\}$，则$B=\varnothing$。因为任意一个实数的平方不能为负数，因此方程$x^2+1=0$无实数解，也就是说，在实数集内，该方程的解集是一个空集。

注　1°　$\{0\}$不是空集，因为它含有数0，$\{0\}$是单元素集。

2° 不能将空集记作$\{\varnothing\}$，因为它是以空集$\varnothing$为元素的单元素集。

我们把由某些集为元素所组成的集，叫做集族.$\{\varnothing\}$可看作是一个集族。

**四、子集**

设有$A$、$B$二集．如果属于$A$的元素都属于$B$，我们把$A$叫做集$B$的一个子集，或说集$B$包含集$A$．记为$A\subset B$或$B\supset A$。

因此，$A\subset B$可规定为：

对每一个$x\in A$，必有$x\in B$。

包含关系"$\subset$"是集之间的一种关系．在讨论集的运算与集之间的关系时，我们可用一种专门的直观图来表示集，这种图叫韦恩(*Venn*)图．通常用圆、矩形等封闭图形表示集，而用其中的点表示它的元。

"$A\subset B$"的直观表示见图1.2。

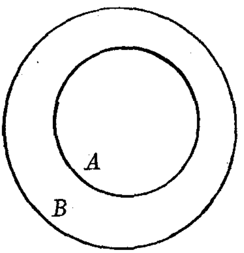


图 1.2

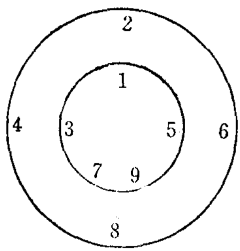


图 1.3

**例 9** 设$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$B=\{1,3,5,7,9\}$。

显然 $B\subset A$（如图1.3）。

**例10** {等边三角形}⊂{等腰三角形}，

{等腰三角形}⊂{三角形}。

见图1.4，其中

$U$——任意三角形集，

$I$——等腰三角形集，

$E$——等边三角形集。

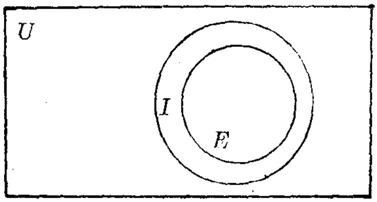


图 1.4

**例11** 设有实数集

$R_1=\underset{x}{E}[x^2>1]$与$R_2=\underset{x}{E}[x^2>2]$。

在集$R_2$内任取数$x_0$，则$x_0^2>2$，更有$x_0^2>1$，所以$x_0\in R_1$。既然对任意的$x_0\in R_2$，都有$x_0\in R_1$，故

$R_2\subset R_1$

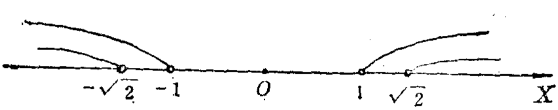


图 1.5

不难看出，集$R_1$由$(-\infty,\ -1)$和$(1,+\infty)$组成，集$R_2$由$(-\infty,-\sqrt{2})$和$(\sqrt{2},+\infty)$组成，所以$R_2\subset R_1$(图1.5)。

注 从属关系“$\in$”与包含关系“$\subset$”是两个不同的概念，

前者指的是集合的元素与集合本身的关系，后者表示的是两个集合之间的一种关系．例如，

设$A=\{a,b\}$．$a$是$A$的一元，$\{a\}$是$A$的一个子集，可分别记为$a\in A$，$\{a\}\subset A$．而写法$a\subset A$，$\{a\}\in A$则是错误的．

**定理 1**　对于任意的集$A,B,C$：

1）$A\subset A$；

2）$\varnothing\subset A$；

3）若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$．

**证明**　1）由子集定义知，任意集都是它自己的子集，即$A\subset A$．

2）因$B\subset A$的意义是：若$a\in B$，则$a\in A$．此命题与它的逆否命题等价；即若$a\notin A$，则$a\notin B$．

现设$B=\varnothing$．要证$\varnothing\subset A$，只要证：若$a\notin A$，则$a\notin\varnothing$就行了．事实上，若$a\notin A$，因$\varnothing$是空集，当然$a\notin\varnothing$，所以$\varnothing\subset A$．

3）若$A=\varnothing$，结论成立（据2）．现设$A\neq\varnothing$．

任取$a\in A$，因为$A\subset B$，所以$a\in B$．又因为$B\subset C$，所以$a\in C$．由此可见，$A$中的每一个元素都是$C$中的元素，因而

$A\subset C$．　　】①

图1.4正好反映了包含关系的传递性．

**定理 2**　$A=B$的必要充分条件是：$A\subset B$且$B\subset A$．

**证明**　1°　必要性　这是很明显的．

$\because$　$A\subset A$，而$A=B$，$\therefore A\subset B$．

---

① 符号“】”表示“证明完毕”．