

清华大学公共基础平台课教材

微 积 分 (III)

清华大学数学科学系《微积分》编写组

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

微 积 分 (III)

清华大学数学科学系《微积分》编写组

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本教材共分3册:《微积分(I)》、《微积分(II)》和《微积分(III)》。此书为《微积分(III)》,它是《微积分(I)》的扩展,讲述多元函数的微分学和积分学,涉及到空间解析几何、曲线论、场论的初步以及高阶线性微分方程等知识。这些内容可使读者进一步领会微积分方法的实质及其应用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分(III)/清华大学数学科学系《微积分》编写组编. —北京:清华大学出版社,2004

(清华大学公共基础平台课教材)

ISBN 7-302-06004-5

I. 微… II. 清… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 002501 号

出 版 者: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

客户服务: 010-62776969

责任编辑: 刘 颖

印 装 者: 清华大学印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 140×203 印张: 14 字数: 348 千字

版 次: 2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06004-5(O)·341

印 数: 1~4000

定 价: 18.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175 3103 或(010)62795704

前 言

微积分是 17 世纪由英国的牛顿(Newton)和德国的莱布尼茨(Leibniz)在前人成果的基础上创立起来的. 在以后的两个世纪里,它以惊人的速度飞快地发展,在许多领域中得到了广泛的应用,取得了空前辉煌的成就. 作为显示数学理论无比威力的例证之一是海王星的发现. 1781 年德国的威廉·赫歇尔通过观察,发现了天王星. 1830 年天文学家发现天王星的运行轨道的观测位置与理论计算位置不符,因而推测在天王星之外可能还有一颗未知的行星在影响它的运动. 英国天文学家与几何学家亚当斯(J. C. Adams)和法国天文学者勒维利(Le Verrier)于 1845, 1846 年先后按三体运动的推测,用严格的数学方法算出了这颗未知行星的运行轨道. 1846 年 9 月 23 日晚上在柏林天文台工作的加勒(Galle),将望远镜指向秋夜的星空,对准了勒维利预报的方位,果然找到了这颗新的行星,这就是海王星.

微积分之所以有如此神奇的力量,是因为通过这种方法,能找到“无限短”时间内物理运动规律的所谓“微分形式”,然后进行“积分”,从而合乎逻辑地得到适合于表示物体运动规律的函数关系. 正如爱因斯坦所说的:“微分定律的明晰概念是牛顿最伟大的理智成就之一”.

从更一般的角度看:用微积分方法研究实际问题的过程大致是这样的,在自变量的无限小变化过程中,考察函数的对应变化,并通过确定变化趋势的数学过程,即所谓“极限过程”,找出函数所满足的“微分规律”,然后“积分”,从而找出函数关系.

这里的关键就在于,如何在数学上理解并阐述清楚什么是“无限小变化”?什么是“极限过程”?牛顿及莱布尼茨等微积分的创立者,当时是用现实直观与数学理性相结合的方法,大胆而机智地解决了大量实际问题.他们的思想今天仍然在许多学科中被广泛使用.当然,这种方法有其不足之处,主要是作为一般的数学概念和方法,缺乏精确的数学描述,因而造成了一些混乱.在当时,牛顿也为其困惑,他想了许多方法来解决,终因受当时数学发展水平所限而没有能完成.对于这种状况,18世纪的许多大数学家,如高斯(Gauss),达朗贝尔(d'Alembert)等都意识到了这一问题的所在:微积分原理的严格理性基础,不能依赖于物理或几何的直观,而只能依靠自身合理的数学概念和方法.当时挪威数学家阿贝尔(N. H. Abel)明确地指出:“人们在今天的分析中无可争辩地发现了多得惊人的含混之处”,“最糟糕的是它还没有得到严格处理,高等分析中只有少数命题得到完全严格的证明.人们到处发现从特殊到一般的令人遗憾的推理方法”.正是在这种形势下,法国数学家柯西(Cauchy)在他1821年至1829年相继编写的几本教材:《分析教程第一编·代数分析》(1821)、《微积分概要》(1823)、《微积分在几何中的应用教程》(1826)和《微分学教程》(1829)中,首次成功地为微积分奠定了比较严格的基础,其中最核心的是给“极限”以比较精确的数学定义,使微积分从此走出了混乱的阶段.

今天我们来回顾微积分发展的这两个阶段,对于牛顿的直观微积分与柯西的理性微积分,应该给两者一个全面的评述.首先,这两个阶段是微积分发展历史中的两个必然阶段,前者是后者的基础,后者是前者的发展.更为重要的是,这两个阶段的微积分从方法上讲各有其特点,两者不是互相否定的,而是互为补充的.从应用上讲,牛顿的方法易于理解,贴近实际,激发创意,生动而充满活力,所以为许多非数学的学者所喜爱与沿用.但存在的问题是

缺乏严格的数学理论基础,导致一些重要概念上的混乱.柯西的理性微积分,基本上排除了混乱的概念,给微积分以完整的理论体系,为分析学科的发展奠定了坚实的理论基础.但另一方面,它也有用严格而形式的语言,掩盖牛顿方法的许多鲜活和源于实际的思想等问题,使学习者难以较快地理解极限的实质.这套严格的形式处理,对于初学者,有一种难以接受的感觉.

在微积分的教学和教材中如何既能体现“牛顿方法”生动易懂的特点,使学生对运用微积分方法解决实际问题的基本思路有所掌握,又能给予学生以“柯西方法”严谨的数学理性思维的初步训练,这是长期以来大学数学教学改革的一个重要课题,不少人在这方面做过多种有益的尝试.由于“微积分”是大学的一门很重要的基础课,它不但为大学的许多后续课程提供必要的数学工具,特别是在研究连续模型的数学方法方面起着重要作用;同时它在培养学生理性思维方面有着无可替代的地位.因此这门课程和教材的改革备受人们关注.我们编写的这本《微积分》教材,对微积分的体系作了一些改变,力求能反映近几年来国内数学改革的研究成果,适应我校创建研究型大学形势发展的要求.该教材重大的变化在极限的处理上,希望把“牛顿方法”与“柯西方法”适当结合起来,将极限内容分两阶段讲述,分别在《微积分(I)》和《微积分(II)》中完成.这样做的目的是为了突出重点、分散难点、循序渐进,同时使教材适应不同读者的要求.该教材分成三册,各册内容分述如下.

《微积分(I)》是在强调“变化趋势”的极限直观定义和初等函数极限的基础上,展开对一元函数微分和积分的概念、计算、应用及简单微分方程等微积分中最基本内容的讨论.这部分的重点是计算与应用,希望读者通过这部分内容的学习,能基本掌握一元微积分的极限、微分及积分的基本计算方法,初步理解微积分中用牛顿方法解决实际问题的思路,而对于极限等有关理论问题,则作为

进一步的内容留待在《微积分(II)》中研究.

《微积分(II)》是《微积分(I)》的深入,着重于极限理论层面上的讨论,目的是通过本册的学习,使读者的数学理性思维能力和数学的素养得到进一步的提高.在内容上选择了极限与连续、函数的可积性与广义积分、数项级数与函数项级数4个部分.

《微积分(III)》是《微积分(I)》的扩展,主要包括多元函数微分学和积分学、曲线论和场论的初步知识以及线性微分方程等内容.我们希望读者在本册中不但能学到多元微积分学的内容,进一步领会微积分方法的实质及其发展,同时在微积分的应用上视野能更加开阔.

本套教材力求继承清华大学长期以来数学教学的优良传统,力求吸收国内外同类教材的成功经验.该教材是在清华大学数学科学系已出版的多本有关教材的基础上编写的,如萧树铁主编,由高等教育出版社出版的面向21世纪的改革教材《一元微积分》、《多元微积分及其应用》,施学瑜编写,由清华大学出版社出版的《高等数学教程》(上、下册),韩云瑞、扈志明编写,由清华大学出版社出版的《微积分教程》(上、下册)等.本教材先以讲义形式经过一轮教学实践,然后集中了所有有关任课教师的意见,对体系、内容、习题安排等方面又进行反复讨论,最后由《微积分》教材编写组负责修改成稿.

《微积分》教材编写组的组成是:

主编:谭泽光

成员:刘坤林、韩云瑞、扈志明

参加编写工作的还有陆小援和刘庆华.

在教材的编写过程中,得到萧树铁、白峰杉、李津、张光远等老师的关心和帮助.清华大学出版社刘颖同志为本教材的编辑做了大量细致而有成效的工作.还有我系的一批博士生助教为教材中习题的校对做了大量工作.在此一并表示感谢.

这套教材虽经过教学实践,但由于在体系上有较大变化,仍是一种试用性的教材,其中必然还有一些不当之处,诚请使用此教材的老师及读者批评指正.

清华大学数学科学系

《微积分》教材编写组

2003 年 7 月

目 录

第 1 章 空间解析几何	1
1.1 向量及其运算	1
1.1.1 向量及其线性运算	1
1.1.2 向量的积	4
习题 1	8
1.2 空间直角坐标系	9
1.2.1 直角坐标系的建立	9
1.2.2 用直角坐标进行向量运算	12
习题 2	15
1.3 空间平面与直线	16
1.3.1 平面	16
1.3.2 直线	19
1.3.3 夹角	22
1.3.4 平面的参数方程	23
1.3.5 点到直线与点到平面的距离	24
习题 3	26
1.4 空间曲面	27
1.4.1 旋转曲面	27
1.4.2 二次曲面	28
习题 4	36
1.5 空间曲线	36
1.5.1 空间曲线的一般方程	36

1.5.2	空间曲线的参数方程	37
1.5.3	空间曲线在坐标面上的投影	38
	习题 5	39
第 2 章	多元函数微分学	41
2.1	多元连续函数	41
2.1.1	多元函数概念	41
2.1.2	$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中的简单拓扑学知识	44
2.1.3	开集、邻域和区域	46
2.1.4	函数的极限	50
2.1.5	连续函数	54
	习题 1	56
2.2	多元函数的偏导数	57
2.2.1	偏导数	57
2.2.2	高阶偏导数	60
	习题 2	63
2.3	多元函数的微分	64
2.3.1	微分的概念	64
2.3.2	函数可微的充分条件	72
2.3.3	微分在函数近似计算中的应用	75
	习题 3	76
2.4	复合函数微分法	78
2.4.1	复合函数求导法则	78
2.4.2	函数的方向导数和梯度	83
	习题 4	87
2.5	隐函数微分法	89
2.5.1	隐函数的背景和概念	89
2.5.2	一个方程确定的隐函数	91

2.5.3	函数方程组确定的隐函数	95
	习题 5	99
2.6	二元函数的泰勒公式	100
	习题 6	106
2.7	映射及其微分	107
2.7.1	$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射	107
2.7.2	线性映射与线性函数	109
2.7.3	映射的微分	112
2.7.4	复合映射的微分	115
	习题 7	119
第 3 章	多元函数微分学的应用	121
3.1	向量值函数的导数和积分	121
3.1.1	向量值函数	121
3.1.2	向量值函数的导数	123
3.1.3	向量值函数的积分	126
	习题 1	128
3.2	曲线的弧长和曲率	129
3.2.1	曲线的弧长	129
3.2.2	曲线的流动标架	132
3.2.3	曲线的曲率	135
	习题 2	139
3.3	曲线的挠率	140
3.3.1	曲线的挠率	140
3.3.2	曲线论基本公式	143
	习题 3	144
3.4	空间曲面和曲线	145
3.4.1	参数方程下曲面的切平面	145

3.4.2	一般方程下曲面的切平面	149
3.4.3	空间曲线的切线	151
	习题 4	153
3.5	多元函数的极值	154
3.5.1	极值的概念与必要条件	154
3.5.2	函数极值充分条件	157
3.5.3	n 元函数极值的充分条件	162
	习题 5	164
3.6	条件极值	164
3.6.1	二元函数的条件极值问题	165
3.6.2	一个约束条件的极值问题	168
3.6.3	多个约束的条件极值问题	175
3.6.4	条件极限的几何解释	178
	习题 6	180
第 4 章	重积分	182
4.1	二重积分的概念和性质	182
4.1.1	引例	182
4.1.2	二重积分的概念	184
4.1.3	二重积分的性质	186
	习题 1	190
4.2	二重积分的计算	191
4.2.1	用直角坐标系计算二重积分	191
4.2.2	用极坐标系计算二重积分	199
	习题 2	204
4.3	二重积分的变量代换	206
	习题 3	211
4.4	三重积分的计算	212

4.4.1	三重积分在直角坐标系下的计算·····	212
4.4.2	用柱坐标系计算三重积分·····	218
4.4.3	用球坐标计算三重积分·····	220
4.4.4	三重积分的变量代换·····	225
习题 4	·····	228
4.5	含参变量积分 ·····	230
4.5.1	引言·····	230
4.5.2	含参变量的定积分·····	231
4.5.3	含参变量广义积分·····	237
习题 5	·····	240
第 5 章	曲线积分和曲面积分 ·····	242
5.1	第一型曲线积分 ·····	242
习题 1	·····	247
5.2	向量场的曲线积分 ·····	248
5.2.1	有向曲线·····	248
5.2.2	向量场在曲线的积分概念·····	250
5.2.3	第二型曲线积分的计算·····	251
习题 2	·····	258
5.3	格林公式 ·····	259
习题 3	·····	265
5.4	第一型曲面积分 ·····	267
习题 4	·····	273
5.5	第二型曲面积分 ·····	273
5.5.1	有向曲面·····	273
5.5.2	向量场的曲面积分·····	276
习题 5	·····	284
5.6	高斯公式与斯托克斯公式 ·····	285

5.6.1	向量场的微分算子·····	285
5.6.2	高斯公式·····	287
5.6.3	斯托克斯公式·····	291
习题 6	·····	296
第 6 章	向量场初步·····	298
6.1	向量场的微分运算 ·····	298
6.1.1	向量场·····	298
6.1.2	梯度场与梯度算子·····	300
6.1.3	散度场与散度算子·····	302
6.1.4	旋度场与旋度算子·····	304
习题 1	·····	307
6.2	平面向量场 ·····	308
6.2.1	平面向量场的一般概念·····	308
6.2.2	平面保守场·····	310
6.2.3	势函数的计算·····	316
习题 2	·····	319
6.3	空间向量场 ·····	320
6.3.1	无源场·····	320
6.3.2	保守场·····	322
6.3.3	调和场·····	324
6.3.4	关于梯度、旋度和散度的表示 ·····	325
习题 3	·····	327
6.4	微分形式及其积分 ·····	328
6.4.1	引言·····	328
6.4.2	微分流形及其定向·····	330
6.4.3	微分形式及其外积·····	332
6.4.4	外微分·····	335

6.4.5	微分形式的积分·····	339
习题 4	·····	343
第 7 章	高阶线性常微分方程 ·····	344
7.1	线性常微分方程的概念 ·····	344
7.1.1	二阶线性常微分方程举例·····	344
7.1.2	微分方程的存在惟一性定理·····	347
7.2	线性常微分方程解的结构 ·····	349
7.2.1	线性常微分方程解的性质·····	349
7.2.2	函数组的线性相关与线性无关·····	350
7.2.3	二阶线性常微分方程的变动 任意常数法·····	355
习题 2	·····	358
7.3	高阶常系数线性常微分方程 ·····	359
7.3.1	常系数齐次线性常微分方程的特征法·····	359
7.3.2	常系数非齐次线性方程的待定系数法·····	363
7.3.3	欧拉方程·····	368
7.3.4	微分方程的简单应用举例—— 振动问题·····	371
习题 3	·····	376
7.4	线性常微分方程组 ·····	378
7.4.1	一般理论·····	379
7.4.2	线性微分方程组解的结构·····	382
7.4.3	常系数齐次线性微分方程组 的特征法·····	390
习题 4	·····	396
7.5	稳定性初步 ·····	397

7.5.1 稳定性的基本概念.....	398
7.5.2 线性微分方程(组)解的稳定性.....	401
7.5.3 非线性微分方程解的稳定性的判定.....	404
习题 5	409
习题答案与提示.....	411

第 1 章

空间解析几何

微积分中的许多概念和原理都有直观的几何意义. 将抽象的数学概念和原理与几何直观有机地结合, 不仅可以加深对问题的理解, 而且能够启发人们的想像能力和创造能力. 几何的方法是现代数学的重要组成部分, 本章介绍的是多元微积分中常用的一些空间解析几何知识.

1.1 向量及其运算

1.1.1 向量及其线性运算

物理学中的力、位移和速度等一些量, 不仅有大小, 还有确定的方向, 这样的量称为**向量**(vector). 在几何上, 常常用有方向的线段表示向量, 例如图 1.1 中的线段 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 都表示向量. 有时也用小写粗体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 等表示向量.

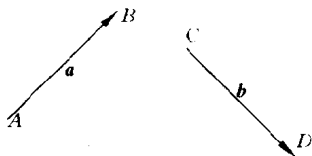


图 1.1

向量的大小称为向量的**模**, 或**长度**, 也称为向量的**范数**(norm). 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的范数就等于该线段的长度, 并用 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示. 如