關於矢的理論和運動學

何衍璿編著

商務印書館

關於矢的理論和運動學

何衍璿編著

商　務　印　書　館

關於矢的理論和運動學
何衍璿編著
★版權所有★
商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新 華 書 店 總 經 售
上 海 勞 動 印 製 廠 印 刷
13017·78

1952 年12月初版	開本 850×1168 1/32
1956 年 9 月 3 版	印張 3 6/16
1957 年 6 月上海第 2 次印刷	印數 4,201—5,200

定價(10) ¥ 0.55

8507939

編 輯 大 意

（一）運動學和動靜力學等科目常引用若干度量，決定這些度量的方法，是在一點沿着一個方向，有一個數量。這樣的度量便叫做**矢**(vecteur)或向量。本書的第一篇是關於矢的理論，將分究下列三項，以爲讀者研究運動學和動靜力學的準備：

(a) 矢的運算。

(b) 由有限個矢的聯合而成的**矢組** (systèmes de vecteurs)。

(c) 由無限連續的矢集合而成的**矢場** (champs de vecteurs)。

（二）在幾何學中，圖形的變位和形成都和時間沒有關係。運動學便要計及時間以研究圖形的運動，但是不問到運動的成因，像動靜力學所設的力一樣。本書的第二篇是運動學，將分究下列三項：

(a) **點的運動學** (cinématique du point)。

(b) **剛體的運動學** (cinématique du corps solide)。

(c) 運動學在幾何學的應用如平面圖形在它的面上的運動和 Frenet 三面角的運動等，都是幾何的重要結果。

（三）本書各章末尾，附有習題，讓讀者解答，希望他們對於運動學、微分幾何、高等微積分等科目，得養成熟練運用而融會貫通的能力。

（四）倘若沒有特別聲明，則本書所用的坐標軸都是正交坐標軸，射影也都是正射影。希望讀者留意。

（五）學海無涯，很難得自己認爲滿足。恐怕有些說得不完善的地方，希望高明有以指正。

目　　次

第一篇　關於矢的理論

第二篇 運動學

第一篇　關於矢的理論

第一章　矢和矢組

1. 矢的定義　矢是向線 AB 的一部分，我們用 $\overline{AB}$ 或 V（圖 1）來做標記。

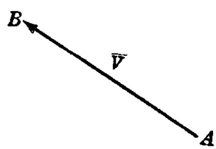

圖　1

矢 $\overline{AB}$ 的特徵有：

(1) **原點** (origine) A;

(2) **方位** (direction)，即載矢的直線 AB;

(3) **指向** (sens)，即動點從原點 A 走到終點 B 的方向；

(4) **度量** (grandeur)，即兩點 A 和 B 間的距離。我們用符號 AB 或 V 表示 $\overline{AB}$ 的度量。

若將度量和**方向**（方位和指向）固定，而變更原點，便得**自由矢** (vecteur libre)。更將載矢的直線固定，便得**滑動矢**(vecteur glissant)。若固定上述的四個原素，便得**一定矢** (vecteur fixe)。

2. 矢的相等　當兩矢有相同的方向和度量，便說這兩矢相等。藉

平移 (translation) 的方法以使原點相重，可將兩矢重叠。同在一直線上兩矢相等的，叫做**直接相等** (directement égaux)。當兩矢有相同的方位和度量，而指向反對的，便說這兩矢**反對** (opposés)。同在一直線上兩矢的反對，叫做**直接反對**。

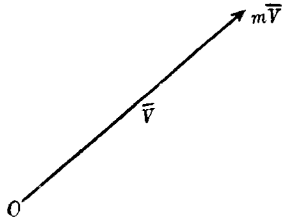

圖 2

設有一矢 $\overline{V}$。若以 $m\overline{V}$ 表示另一矢，它的原點和方位都和 $\overline{V}$ 相同，它的指向和 $\overline{V}$ 相同或相反，便要看 m 是正數還是負數來決定。如 m 爲正，則 $\overline{mV}$ 與 $\overline{V}$ 同向(圖2)，它的度量用 $|mV|$ 表示。

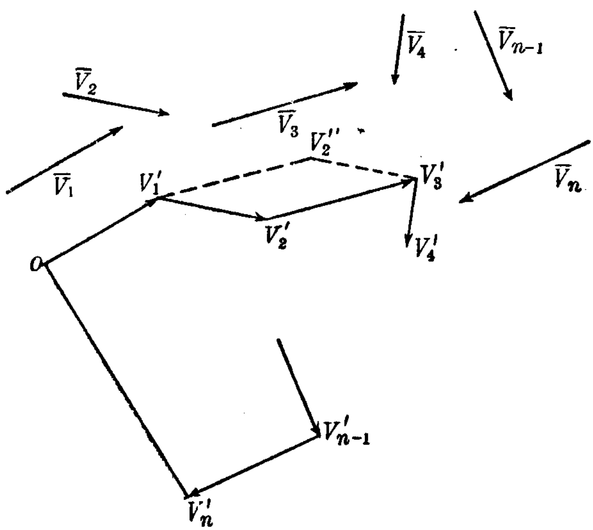

圖 3

3. 矢的加法　設有 n 個矢 $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \cdots, \bar{V}_n$。任取一點 O 做原點，作一個多邊形，它的邊 $\overline{OV'_1}, \overline{V'_1V'_2}, \overline{V'_2V'_3}, \cdots\cdots, \overline{V'_{n-2}V'_{n-1}}, \overline{V'_{n-1}V'_n}$ 依次等於 $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \cdots\cdots, \bar{V}_n$ 的矢，則自由矢 $\overline{OV'_n}$ 便是各矢 $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \cdots\cdots, \bar{V}_n$ 的**幾何和** (somme géométrique)(或簡稱和)，如圖 3。並且可以寫成下式：

$$\overline{OV'_n} = \bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \cdots\cdots + \bar{V}_n$$

定理一　當各矢的次序變更時，它們的幾何和不變。

設毗連的兩矢可以對調，取 $\bar{V}_2$ 與 $\bar{V}_3$ 爲例。在求幾何和的程序中，引 $\overline{V'_1V''_2}$ 平行於 $\bar{V}_3$，再引 $\overline{V''_2V'_3}$ 平行於 $\bar{V}_2$，所得的第三終點 $\bar{V}_3$ 和起初順着次序所得的一樣。依照這樣逐步變更，可將任意兩矢 $\bar{V}_i$, $\bar{V}_j$ 的次序對調，而各矢的幾何和不變，所以知道矢的次序可以任意變更。

定理二　若當中數矢用它們的幾何和代替，所有各矢的幾何和仍舊不變。

設毗連的兩矢 $\bar{V}_2, \bar{V}_3$ 可用它們的幾何和代替，即在求矢 $\bar{V}$ 的程序中可以對角線 $V'_1V'_3$ 代替折線 $V'_1\ V'_2\ V'_3$。依照前定理，我們可使任意數矢毗連，其中的最初兩矢得用它們的幾何和代替，這第一個幾何和與第三矢也得用它們的幾何和代替。仿此繼續施行，將見這幾矢可用

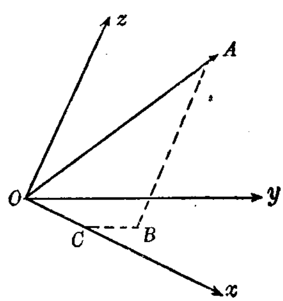

圖　4

它們的幾何和代替，不致使最終幾何和 $\overline{V}$ 的值受到什麼影響。

備考 一矢 $\overline{V}$ 投射於任意三軸 $O\text{-}xyz$（對於一軸的投射線應平行於包含他二軸的平面），它便等於它的射影三矢的幾何和。

如圖 4，
$$\overline{OA}=\overline{V}=\overline{OC}+\overline{CB}+\overline{BA}$$
$$\overline{V}=\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$$

X, Y, Z 依次表示在 Ox, Oy, Oz 量度 $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ 所得的數，可有正負之別，和以 V 表 $\overline{V}$ 的絕對值不同。這三數便是矢 $\overline{V}$ 對於 $O\text{-}xyz$ 的**分解**(composantes)。

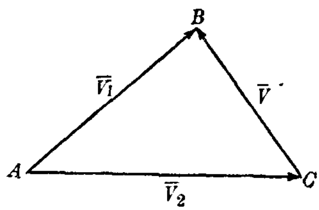

圖 5

4. 矢的減法 兩矢 $\overline{V}_1$ 與 $\overline{V}_2$ **的差**(difference)是適合下式關係的一矢 $\overline{V}$（圖 5）。

$$\overline{V}_2+\overline{V}=\overline{V}_1$$

這式可寫成：
$$\overline{V}=\overline{V}_1-\overline{V}_2$$

按照圖中表示：
$$\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}$$

這個差 $\overline{V}_1-\overline{V}_2$ 是一矢，以 $\overline{V}_2$ 的終點爲原點，以 $\overline{V}_1$ 的終點爲終點。

5. 矢性乘積(produit vectoriel) 兩矢 $\overline{V}_1$ 與 $\overline{V}_2$ 的**矢性乘積**是一自由矢 $\overline{V}$（圖 6）。欲定此矢，可先設 $\overline{V}_1$ 與 $\overline{V}_2$ 有相同的原點 O。

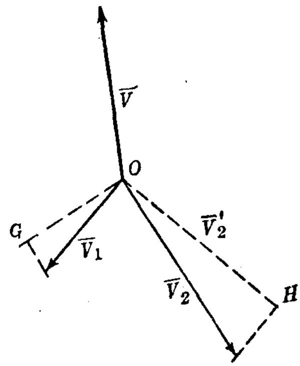

圖　6

乘積 $\overline{V}$ 的度量是以 $\overline{V}_1$ 與 $\overline{V}_2$ 作兩邊所成平行四邊形的面積。換句話說，如使 θ 表示 $\overline{V}_1$ 與 $\overline{V}_2$ 的夾角，則乘積 $\overline{V}$ 的度量等於 $V_1\ V_2 \sin\theta$。

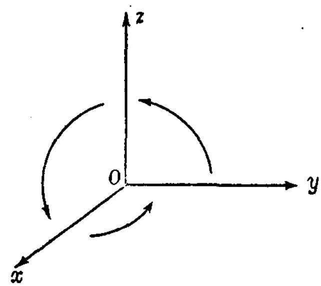

圖　7

就方位說，V 是包含兩矢的平面的法線。在這平面上，引 $\overline{OH}$ 垂直於 $\overline{V}_1$，使 $\overline{OH}$ 與 $\overline{V}_2$ 在載 $\overline{V}_1$ 的直線的同側。

$\overline{V}$ 的指向的選定（圖 7），為使三面角 $O-V_1\ HV$ 與參考三面角（trièdre de référence 指坐標三面角）$O\text{-}xyz$ 有相同的向 [sens 或作佈置 (disposition)]。

$\bar{V}_1$ 與 $\bar{V}_2$ 的矢性乘積用符號 $\bar{V}_1\times\bar{V}_2$ 表示。

若 $\bar{V}_1$ 與 $\bar{V}_2$ 不同原點,則任取一點 O 為原點,作矢 $\bar{W}_1$ 等於 $\bar{V}_1$,作矢 $\bar{W}_2$ 等於 $\bar{V}_2$。依照定義 $\bar{W}_1\times\bar{W}_2$, 便等於 $\bar{V}_1\times\bar{V}_2$。

由上所述,當兩矢中的一矢為零,或兩矢平行,則它們的矢性乘積為零。按照指向選定的規則,$\bar{V}=\bar{V}_1\times\bar{V}_2$ 和 $\bar{V}'=\bar{V}_2\times\bar{V}_1$ 是互相反對的兩矢,後者是將前者兩因子的次序互易所得的結果。所以普通乘法的交換律不適用於矢性乘積。如以 $\bar{V}_2$ 在 OH 方向的分矢(即在該方向分解的矢)$\bar{V}'_2$ 代替 $\bar{V}_2$,它們的矢性乘積仍舊不變,因為由此運算所得的結果對於 $\bar{V}$ 方向與度量仍舊不會變更的。依同理 $\bar{V}=\overline{OG}\times\bar{V}_2$,其中 $\overline{OG}$ 表示 $\bar{V}_1$ 在垂直於 $\bar{V}_2$ 的方向的分矢。

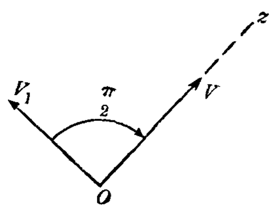

圖 8

總而言之,
$$\begin{aligned}\bar{V}&=\bar{V}_1\times\bar{V}_2\\&=\bar{V}_1\times\overline{OH}\\&=\overline{OG}\times\bar{V}_2\end{aligned}$$

但是
$$\bar{V}_2\times\bar{V}_1=-\bar{V}=-\bar{V}_1\times\bar{V}_2$$

於平面上取矢 $\bar{V}_1$(圖 8),又取矢 $\bar{V}'_2$ 垂直於這平面,則它們的矢性乘積 $\bar{V}$ 當然在這平面上,以 $\bar{V}_1$ 的垂直線 Oz 為載線。所以欲得 $\bar{V}_1$ 與 $\bar{V}_2$ 的矢性乘積,這兩矢的位置是互相垂直的,那末在含一矢而垂直於他矢的平面上,將第一矢轉一直角,再施以比 $\bar{V}'_2$ 的**心放變換** (homothétique) 便得了。

用這方法可以證明普通乘法的分配律可適用於矢性乘積。例如有三矢 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$,則有

$$(\overline{b+c})\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{a}$$

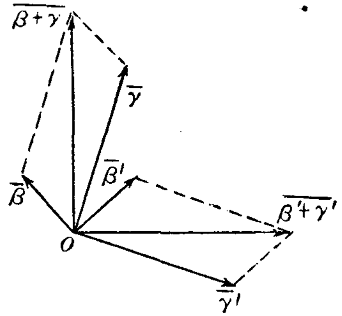

圖 9

先取矢 $\bar{a}$ 垂直於圖的平面(圖 9)。次將 $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\overline{b+c}$ 各以其在圖平面上的射影 $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\overline{\beta+\gamma}$ 代替,並且假設矢 $\bar{a}$ 的度量為 1, 則作各矢 $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\overline{\beta+\gamma}$ 與 $\bar{a}$ 的矢性乘積,是卽將各矢轉一直角,而達至 $\bar{\beta}'$,$\bar{\gamma}'$, $\overline{\beta'+\gamma'}$ 的位置, 全部都轉一直角,可見

$$\overline{\beta'+\gamma'}=\bar{\beta}'+\bar{\gamma}'$$

這式便表明上一等式能夠成立。若 a 不是 1,則於旋轉後,可作一心放變換,以 O 為中心,以 a 為比,上一等式仍舊能夠成立。 因子顛倒,又得

$$\bar{a}\times(\overline{b+c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$$

等式兩邊的符號同時改變,等式仍舊是等式。

數矢和與數矢和的乘積,或者數矢的乘積,都可依照上述方法逐步推出,不過要注意因子的先後次序。

兩矢乘積的分解　設有兩矢 $\bar{V}$ 與 $\bar{V}'$, 它們在坐標軸 O-xyz 的分解,用下列等式表示:

$$\overline{V}=\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z} \quad \overline{V}'=\overline{X}'+\overline{Y}'+\overline{Z}'$$

則
$$\begin{aligned}\overline{V}\times\overline{V}'&=(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})\times(\overline{X}'+\overline{Y}'+\overline{Z}')\\&=\overline{X}\times\overline{X}'+\overline{Y}\times\overline{Y}'+\overline{Z}\times\overline{Z}'\\&\quad+\overline{Y}\times\overline{Z}'+\overline{Z}\times\overline{Y}'\\&\quad+\overline{Z}\times\overline{X}'+\overline{X}\times\overline{Z}'\\&\quad+\overline{X}\times\overline{Y}'+\overline{Y}\times\overline{X}'\end{aligned}$$

矢 $\overline{X}$ 與 $\overline{X}'$ 平行，所以 $\overline{X}\times\overline{X}'=0$

同理得 $\overline{Y}\times\overline{Y}'=0$

$$\overline{Z}\times\overline{Z}'=0$$

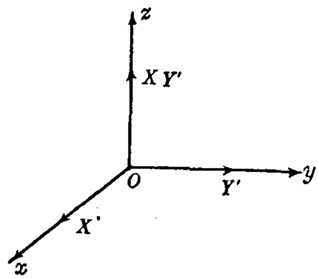

圖 10

依照兩矢的矢性乘積的定義，便可以知道矢 $\overline{X}\times\overline{Y}'$ 在 Oz 上(圖 10)，它的代數量是 $\overline{X}\overline{Y}'$。矢 $\overline{Y}\times\overline{X}'$ 也在 Oz 上，它的代數量是 $-\overline{Y}\overline{X}'$。矢 $\overline{Y}\times\overline{Z}'$ 和 $\overline{Z}\times\overline{Y}'$ 都在 Ox 上，它們的代數量是 YZ' 和 $-ZY'$。矢 $\overline{Z}\times\overline{X}'$ 和 $\overline{X}\times\overline{Z}'$ 都在 Oy 上，它們的代數量是 ZX' 和 $-XZ'$。所以乘積 $\overline{V}\times\overline{V}'$ 在 $O\text{-}xyz$ 的分解是

$$L=YZ'-ZY'$$

$$M=ZX'-XZ'$$

$$N=XY'-YX'$$

6. 數性乘積(produit scalaire)　兩矢 $\bar{V}$ 與 $\bar{V}'$ 的數性乘積,用一句話說,便是一個數 $VV'\cos\theta$,式中 θ 表這兩矢的夾角。當其中一矢為零,或兩矢垂直,則這乘積為零。我們用 $\bar{V}\cdot\bar{V}'$ 或 $\bar{V}\bar{V}'$ 表數性乘積,而有

$$VV'\cos\theta=V\cdot\mathrm{proj}_v\,\bar{V}'=\bar{V}'\cdot\mathrm{proj}_{v'}\,\bar{V},$$

其中 $\mathrm{proj}_v\,V'$ 表示 V' 在 V 的截線上的射影。

所以
$$\begin{aligned}(\overline{b+c})\,\bar{a}&=\bar{a}\cdot\mathrm{proj}_a\,(\overline{b+c})\\&=\bar{a}\cdot\mathrm{proj}_a\,\bar{b}+\mathrm{proj}_a\,\bar{c})\\&=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot c\end{aligned}$$

由此可以知道普通乘法的分配律和交換律都適用於矢的數性乘積。

取坐標軸 $O\text{-}xyz$,設 X,Y,Z 是 $\bar{V}$ 的分解,X',Y',Z' 是 $\bar{V}'$ 的分解
$$\bar{V}=\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z}\qquad \bar{V}'=\bar{X}'+\bar{Y}'+\bar{Z}'$$

則有
$$\begin{aligned}\bar{V}\cdot\bar{V}'&=(\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z})\cdot(\bar{X}'+\bar{Y}'+\bar{Z}')\\&=\bar{X}\cdot\bar{X}'+\bar{Y}\cdot\bar{Y}'+\bar{Z}\cdot\bar{Z}'\\&\quad+\bar{Y}\cdot\bar{Z}'+\bar{Z}\cdot\bar{Y}'+\bar{Z}\cdot\bar{X}'+\bar{X}\cdot\bar{Z}'+\bar{X}\cdot\bar{Y}'+\bar{Y}\cdot\bar{X}'\end{aligned}$$

式中最後六個數性乘積都等於零,因為它們相乘的因子都是垂直的兩矢。又 $\bar{X}\cdot\bar{X}'=X\cdot X'$,使 $|X|$ 與 $|X'|$ 表 X 與 X' 的絕對值,則當 X 與 X' 同號,$\theta=0$,$\bar{X}\cdot\bar{X}'=|X|\cdot|X'|=XX'$。當 X 與 X' 異號,$\theta=\pi$,$\bar{X}\cdot\bar{X}'=|X|\cdot|X'|(-1)=-|X|\cdot|X'|=XX'$。所以

$$\bar{V}\cdot\bar{V}'=XX'+YY'+ZZ'$$

當
$$XX'+YY'+ZZ'=0$$

則 $\bar{V}$ 與 $\bar{V}'$ 成直角。

備考　因為
$$L=M=N=0$$

則
$$LX+MY+NZ=0$$
$$LX'+MY'+NZ'=0$$

便是說兩矢的矢性乘積和兩矢都成直角,這和矢性乘積的定義相符。

7. 導矢 (vecteur dérivé) 設有一矢 $\overline{V}(t)$ 是隨着參變數 t 而變動，它對於任意坐標軸 $O\text{-}xyz$ 的分解是

$$X(t)\quad Y(t)\quad Z(t)$$

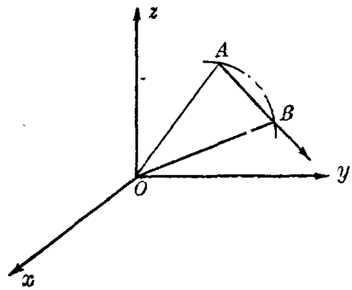

圖 11

由原點 O 作一矢 $\overline{OA}$ 等於 $\overline{V}$ (圖 11)。當 t 變更，則點 A 畫曲線:

$$X=X(t)\quad Y=Y(t)\quad Z=Z(t)$$

若 t 增加 Δt，則矢 $\overline{OA}$ 抵 $\overline{OB}$，便得 $\overline{OB}=\overline{V+\Delta V}$。兩矢 $\overline{OB}$ 與 $\overline{OA}$ 的差是 $\overline{AB}=\overline{\Delta V}$。當 Δt 趨近於零，則矢 $\dfrac{\overline{\Delta V}}{\Delta t}$ 的極限矢叫做 $\overline{V}$ 的**導矢**。$\overline{V}$ 的導矢便在曲線的切線上。若 t 代表時間，這極限矢叫做 A 的**速度矢** (vecteur vitesse)，它的分解便是:

$$\frac{dX}{dt}\qquad\frac{dY}{dt}\qquad\frac{dZ}{dt}.$$

導矢用符號 $\dfrac{\overline{dV}}{dt}$ 表示。若一矢爲常矢，則它的導矢等於零。反過來說，若某矢有常爲零的導矢，則這矢是一常矢，因爲它的分解 X, Y, Z 都是常數。

8. 和的導數 仿傚關於計算函數和的導數的方法，假設

$$\overline{V}=\overline{V}_1+\overline{V}_2+\overline{V}_3$$