青年数学叢書

# 高次方程解法

## (施篤姆法)

沙法列維奇著



中国青年出版社

青年数学叢書

# 高次方程解法

(施篤姆法)

沙法列維奇著
程乃椺譯

中国青年出版社
一九五八年·北京

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

# О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ (МЕТОД ШТУРМА)

ГИЗТЕХ, МОСКВА, 1954

# 高次方程解法

(施篤姆法)

〔苏〕沙法列維奇著

程乃株譯

*

中国青年出版社出版

(北京东四12条老君堂11号)

北京市書刊出版業營業許可証出字第036号

北京五三五工厂印刷

新华書店总經售

*

787×1092 1/32 7/8印張 15,000字

1956年1月北京第1版 1958年6月北京第5次印刷

印数97,001—101,500 定价(8)0.10元

## 內 容 提 要

三次以及更高次的方程式，在科学上的应用很廣。它們不像二次方程式那样有求解公式，要討論它們的性質，往往涉及到比較高深的數学理論．这本小册子却採用了帶有餘式的代數除法和幾何圖形，只运用一般的代數和幾何見解，來進行討論．它介紹了高次方程式的某些重要性質，但並沒有涉及到虛根．所以讀者只要具备一般的代數和幾何知識，就可以順利地閱讀．

# 目 次

# 前　　言

在中学的代數教程裏曾經引出了二次方程的求解公式，而从物理教程中便可以看到，这个公式对於很多物理問題(例如和匀加速运動有關的問題等)的解决是何等需要了.

可是三次以及更高次的方程在數学和它的应用中所起的作用並不次於二次方程．人們差不多像研究二次方程一样，很早就開始研究高次方程了．大家知道，在巴比倫的楔形表裏就有解某些三次方程的．虽然对这个問題已經研究了这样久，但是關於高次方程的基本性質，直到十九世紀才被發現．这本小册子就是來概括的談一談關於高次方程的某些基本性質．

我們討論高次方程性質所採用的方法，跟中学代數教程裏用來討論二次方程性質的方法是完全不同的．二次方程的一切性質，差不多都可以由它們的求解公式中推出來，現在我們却並不引出高次方程的求解公式，只是由某些一般的代數和幾何的見解去得出高次方程的性質來．

問題就在，对於大多數的高次方程並不存在像二次方程那样的公式．而且即使在某些情况有这样的公式，这公式也非常複雜，不可能从它推出方程的任何性質來．而且除此以外，我們的方法还具有一个优點：它可以使得那些要被証明的事实的真正理由顯得格外清楚．

在这本小册子裏引出的所有討論，是对於任何次方程都適合的．它們往往都敍述成一般形式．在某些情形，如果討論到一般情况原則上虽完全相同而計算却嫌冗長的話，那末我們就僅用三次方程來討論，並且只敍述一下在一般情况所得的結果．很希望讀者独立地把所有討論引到一般情况中去．

最後，我們完全略去和下面相類似的問題的証明：多項式的圖形若在 $X$ 軸的兩側都有點，那末它必和 $X$ 軸相交．大概有些讀者会感到並不需要去証明類似的命題．誰要是希望作出这些証明，請參考任何一本数学分析教程的前幾章，就可以知道連續函數的最簡單性質，这样就很容易証明上面説的那个命題了．

在这本小册子裏，我們只研究方程的实根的性質，因此，讀者並不需要有複數性質的知識．但是，我們要指出，方程的複根的性質也可以用同样的方法推出來，不过要略微複雜一些罢了．

## 一 根的界限

我們要提出的第一个問題，便是：对於每一个方程要去確定它的各个根分佈在那一个界限裏面．

假設我們的方程是三次的，並且具有

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1}$$

的形式．

我們現在來指出，如何求出这样的正數 $N$，假使 $x$ 的絕对值超过了 $N$，方程的左边就不再等於零．这時候，根就一定位

於 $-N$ 和 $N$ 之間．为此，我們設法來选擇这样的 $N$，假使 $x$ 的絕对值大於 $N$，那末首項的絶对值便超过其餘三項的和的絕对值．这時候，首項便不可能被其他那些項的和所抵消，因而整个式子也就不会等於零了．

如果首項的絶对值的三分之一大於其餘三項中每一項的絶对值，也就是

$$\frac{1}{3}|a||x|^3>|b||x|^2,\ \frac{1}{3}|a||x|^3>|c||x|,$$

$$\frac{1}{3}|a||x|^3>|d|.$$

那末，便顯然可以達到我們的目的．解这些不等式，得到

$$|x|>3\frac{|b|}{|a|},\ |x|>\sqrt{3\frac{|c|}{|a|}},\ |x|>\sqrt[3]{3\frac{|d|}{|a|}}.$$

取三个數 $3\frac{|b|}{|a|}$，$\sqrt{3\frac{|c|}{|a|}}$，$\sqrt[3]{3\frac{|d|}{|a|}}$ 中較大的一个作为 $N$，我們便得到了具有我們所需要的性質的數．事实上，当 $|x|$ 大於 $N$ 時，所有三个不等式都是成立的；因此，方程(1)的左边便不会变为零．

对於 $n$ 次方程

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+kx+l=0, \qquad (2)$$

我們只需要取下列諸數

$$n\frac{|b|}{|a|},\ \sqrt{n\frac{|c|}{|a|}},\ \sqrt[3]{n\frac{|d|}{|a|}},\cdots\cdots,\ \sqrt[n-1]{n\frac{|k|}{|a|}},\ \sqrt[n]{n\frac{|l|}{|a|}}$$

中最大的一个作为 $N$，就行了．

注意，我們已經証明的比上面原來要証明的还稍稍多一

些．因为方程(1)左边首項的絶对値大於其餘各項的和的絶对値，所以，整个式子的符号要由首項的符号來決定．这样一來，我們不僅知道方程(1)的左边当 $x$ 的絶对値超过 $N$ 時是一个不等於零的數，而且还可以指明这个數的符号是和首項的符号相同的．

从这些簡單的推想，我們已經能够引出關於方程的根的重要結果．为此需要用到函數

$$y=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots+kx+l \tag{3}$$

的圖形．假設在平面上选好了座标軸，並且描出函數(3)的圖形(圖 1)．根据作圖的一般法則，圖形上 $M$ 點的縱座标 $u$ 就等於在式(3)中以橫座标 $v$ 代替 $x$ 得出來的那个數．特别是，当橫座标是方程(2)的根時，縱座标便变为零．这就是說，方程的根在幾何上可以用函數圖形和 $X$ 軸的交點表示出來．

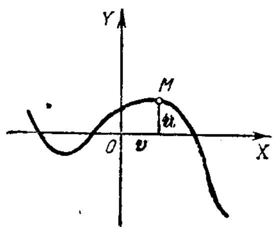

圖 1.

假設我們的方程是三次的．我們用首項的係數 $a$ 來除它的二端，而把它寫成

$$x^3+px^2+qx+r=0 \tag{4}$$

的形式．

我們來看，所求得的具有前面所說性質的數 $N$ 的幾何意义．方程(4)所有的根位於 $-N$ 和 $N$ 之間，这就表明函數

$$y=x^3+px^2+qx+r \tag{5}$$

的圖形，只有在它們的橫座标 $x$ 位於 $-N$ 和 $N$ 之間的點处，才

可能和 $X$ 軸相交. 可是函數的圖形是否一定和 $X$ 軸相交呢? 回顧一下前面所說, 如果 $x$ 的絶对值大於 $N$, 那末函數(5)的符号和它的首項的符号相同. 可是我們已經知道, 首項的符号是和 $x$ 的符号一致的. 因此, 如果 $x$ 大於 $N$, 那末多項式是正的, 这就表示: 这部分圖形位於 $X$ 軸的上方. 如果 $x$ 小於 $-N$, 那末多項式是負的, 也就是这部分圖形位於 $X$ 軸的下方. 这样一來, 我們便知道了圖形的大致形狀如圖 2. 由圖可以淸楚地看到, 函數的圖形至少应該和 $X$ 軸相交一次, 也就是說, 三次方程至少有一个根. 对於高次方程, 也有類似的情形: 奇次方程至少有一个根. 顯然, 对於偶次方程, 这个定理並不成立, 像我們已經指出的二次方程就可能根本沒有根㊀.

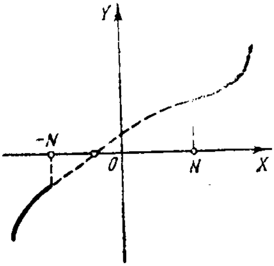


圖 2.

## 二 多項式的公根和等根

我們下面要用到的一个基本的代數方法, 便是帶有餘式的多項式除法. 如果有兩个多項式 $f$ 和 $g$, 我們就可以用其中次數較低的一个多項式去除(用一般的"長除法")另一个多項式, 而得到商的整式部分 $q$ 和餘式 $h$, 餘式的次數已經比除式低了. 这可以寫成公式

---

㊀ 記住: 我們这裏所說的根總是指实根, 因此, 例如方程 $x^2+1=0$, 从我們的观點來看, 便沒有根.

$$f=g\cdot q+h \tag{6}$$

的形式．帶有餘式的除法——这是一般的方法，所以把“多項式对”$f$ 和 $g$ 的研究轉变成具有較低次數的“多項式对”$g$ 和 $h$ 的研究．正是由於这种情形，常常使得“多項式对”的性質有可能比一个多項式的性質容易研究些．

例如，我們來考慮如何去求兩个多項式 $f$ 和 $g$ 的公根．如果 $\alpha$ 是多項式 $f$ 以及多項式 $g$ 的根，那末在關係式(6)中令 $x=\alpha$，我們便得到 $h$ 等於零，也就是它具有根 $\alpha$．这样，多項式 $f$ 和 $g$ 的公根也就是多項式 $g$ 和 $h$ 的公根．反之，仍然由關係式(6)，我們可以看出：如果 $\alpha$ 是多項式 $g$ 和 $h$ 的公根，那末它就也是 $f$ 的根，卽多項式 $f$ 和 $g$ 的公根．總之，这兩个断言表明，多項式 $f$ 和 $g$ 的公根，必定是 $g$ 和 $h$ 的公根，反过來說也对．在这裏，它的用处便在於多項式 $g$ 和 $h$ 的次數比 $f$ 和 $g$ 要低．对於 $g$ 和 $h$，我們可以重複这种討論，用 $h$ 除 $g$ 而帶有餘式．用这种方法，我們便可以得到次數越來越低的“多項式对”，而且所有这些“多項式对”的公根和原來“多項式对”的公根相同．我們有必要來講一講，当給出的“多項式对”$u$ 和 $v$ 之中，有一个，例如 $v$ 是零的情形．但是在这种情形，多項式 $u$ 的所有的根都是 $u$ 和 $v$ 的公根，因 $v$ 恆等于零，故任何數都可作为它的根．

这样一來，求多項式 $f$ 和 $g$ 的公根的問題就变为去求一般說來次數是很低的多項式 $u$ 的根的問題了．

我們來看一个例題．試求多項式 $x^4+x^2+3x+1$ 和 $x^3+x+2$ 的公根．

我們用第二个多項式去除第一个多項式而帶餘式:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+x^2+3x+1 & x^3+x+2 \\ \cline{2-2}
x^4+x^2+2x\phantom{+1} & x \\ \cline{1-1}
x+1 &
\end{array}
$$

餘式是 $x+1$. 因此, 原來那"多項式对"和多項式 $x^3+x+2$ 及 $x+1$, 有相同的公根.

再用第二个除第一个而帶有餘式:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2\phantom{+x+2} & x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
-x^2+x+2 & \\
-x^2-x\phantom{+2} & \\ \cline{1-1}
2x+2 & \\
2x+2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

餘式是 0. 因此, 多項式 $x+1$ 及 0 也具有相同的公根, 也就是僅有的一个公根 $-1$.

我們現在应用目前所得結果來解决另一个問題: 確定一个給定的多項式的一些根裏面有沒有等根. 並且求出这些等根來. 我們仍然打算就三次多項式(5)來討論. 設这个多項式有一个根 $\alpha$, 那末它便可以被 $x-\alpha$ 除尽. 这可由貝塞定理⊖推得, 但是我們現在用簡單的除法來驗証这个事实:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+px^2+qx+r & x-\alpha \\ \cline{2-2}
x^3-\alpha x^2\phantom{+qx+r} & x^2+(p+\alpha)x+(\alpha^2+p\alpha+q) \\ \cline{1-1}
(p+\alpha)x^2+qx+r & \\
(p+\alpha)x^2-\alpha(p+\alpha)x & \\ \cline{1-1}
(\alpha^2+p\alpha+q)x+r & \\
(\alpha^2+p\alpha+q)x-\alpha(\alpha^2+p\alpha+q) & \\ \cline{1-1}
\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r &
\end{array}
$$

---

⊖ 貝塞定理即餘式定理。——譯者註

餘式$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r$等於零，因为我們原來假定$\alpha$是方程(4)的根。我們順便得到这个除法的商是

$$x^2+(p+\alpha)x+(\alpha^2+p\alpha+q) \tag{7}$$

如果方程(4)还有一个根等於$\alpha$，那末它就应該是多項式(7)的根。在(7)中用$\alpha$代替$x$，我們便得$3\alpha^2+2p\alpha+q=0$。

於是，我們証明了多項式(5)的等根就是这个多項式和多項式$3x^2+2px+q$的公根。後面这个多項式叫做多項式(5)的**導來多項式**。这样一來，問題就变成去求多項式和它的導來多項式的公根了。而这个問題我們已經能够解決。

对於$n$次多項式(2)，完全類似的定理也是成立的。在这裏，多項式$nax^{n-1}+(n-1)bx^{n-2}+(n-2)cx^{n-3}+\cdots\cdots+k$起着多項式$3x^2+2px+q$的作用。而这个多項式也被称为多項式(2)的導來多項式。

## 三 "多項式对"的特徵數

現在轉到我們的主題上來。它可以这样來敍述：設給定一个多項式$f$和兩个數$a, b$，並且$a<b$；要想知道多項式$f$有多少个根介於$a$和$b$之間，也就是有多少个根小於$b$而大於$a$。後面我們会看到，由於这个問題的解決，就可以推引出許多關於多項式根的問題的答案，例如：根的个數，根的分佈，甚至於它們的計算方法等等。

在解決这个問題時，我們將同前節一样來着手，也就是首先考察"多項式对"的性質。在这裏我們还是运用我們已經遇見过的兩种方法：代數的方法——帶有餘式的除法，和幾何的

方法——作圖.

設給定了兩个多項式,这裏它們所給定的順序对我們來說也是重要的. 用 $f_1$ 表示第一个多項式, $f_2$ 表示第二个多項式. 再假設 $f_1$ 和 $f_2$ 沒有公根,因为它們的公根我們可以按前節的方法找出而約去. 作出多項式 $f_1$ 和 $f_2$ 的圖形(我們把 $f_1$ 的圖形画成实線,而把 $f_2$ 的圖形画成虛線;如圖3).

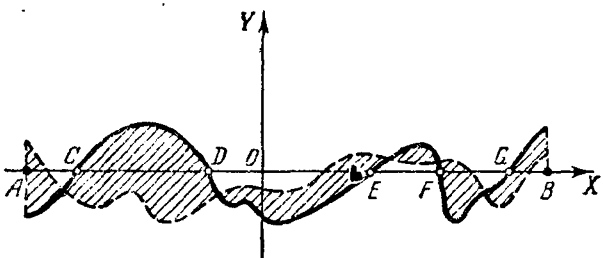


圖 3.

它們將把整个平面分成三个部分:第一是位於兩个圖形下面的部分;第二是位於兩个圖形上面的部分;第三是位於兩个圖形之間的部分. 第三个部分便是我們今後要注意的部分. 我們在圖上特別把这部分加上陰影,而称它为陰影域. 在 $X$ 軸上作横座标等於 $a$ 和 $b$ 的兩點,並且記作 $A$ 和 $B$. 我們將點 $A$ 沿 $X$ 軸向點 $B$ 移動. 这時候,我們便和多項式 $f_1$ 和 $f_2$ 的圖形在表示它們的根的那些點处通过. 在这些通过的點裏面,在某些點处我們將

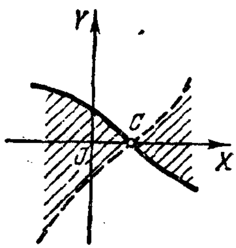


圖 4.

从陰影域中出來，而在另一些點处却是進入陰影域裏．我們把第一种點称为“出點”，把第二种點称为“入點”．必須指出：一點不可能既是入點又是出點（像圖4上的$C$點那样），因为这样的點表示了多項式$f_1$和$f_2$的公根，而我們原來假定公根是不存在的．

現在我們來引進一个新的概念．

屬於多項式$f_1$的圖形並且位於$A$、$B$兩點間出點的个數和入點的个數的差，叫做多項式$f_1$、$f_2$的**特徵數**．

例如，圖3上的點$D$和$E$是屬於$f_1$的圖形的出點，而$C$、$F$和$G$是同一圖形上的入點．在这种情形下，特徵數等於$2-3=-1$．特徵數是一个整數，用記号$(f_1, f_2)$來表示它．当然，它除了跟多項式$f_1$和$f_2$有關係以外，还跟限制着多項式圖形的考慮範圍的點$A$和$B$有關係．

十分明顯，多項式$f_1$和$f_2$的特徵數和我們取定哪个多項式作第一式也是有關係的，因为当計算特徵數時我們只注意到第一个多項式圖形上的出點和入點．所以还需要把下面这一點來說明一下：如果我們取定的第一个多項式不是$f_1$而是$f_2$，这時候特徵數將引起怎样的改变，或者換句話說，就是$(f_1, f_2)$和$(f_2, f_1)$兩數之間有怎样的關係．

我們用下面的实物情况來設想一下，是有好处的．比如有一間房間，一个人可以走進去，也可以从它裏面走出來．我們用$P$來表示在給定的時間內人从房間裏走出來的次數，而用$Q$來表示人走進去的次數．顯然，因为除了最後一次以外在每一次進去之後都跟着要出來，而在每一次出來之後跟着

要進去，所以進去的次數和出來的次數在任何一边相差都不可能大於1．我們可以把它寫成：

$$P=Q+e. \quad e=0,\ 1,\ 或\ -1. \tag{8}$$

$e$ 的更精確的數值可由下表確定：

*1*—假設開始時这个人在裏面，而終了時他是在外面．

*−1*—假設開始時他在外面，而終了時在裏面．

*0*—假設開始和終了時他同是在裏面或同是在外面（圖5）．

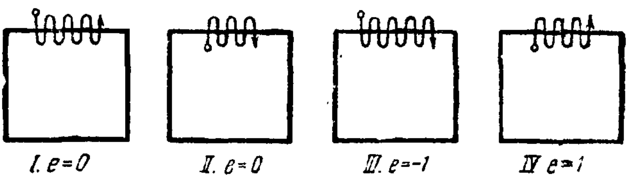



圖 5.

現在我們把問題想得更複雜一些：房間裏有兩扇門—*I*和*II*，而分別計算通过每一扇門的進去和出來的次數．我們用 $P_1$ 和 $Q_1$ 分别表示通过門 *I* 的出來和進去的次數，通过門 *II* 的是用 $P_2$ 和 $Q_2$ 來表示．顯然，通过兩扇門的進去和出來的總數是滿足關係式(8)的，也就是

$$P_1+P_2=Q_1+Q_2+e,$$

从而我們便得到：

$$P_1-Q_1=-(P_2-Q_2)+e,$$

这就表明了，通过門 *I* 的出來次數和進去次數的差跟通过門 *II* 的出來次數和進去次數的差相互間的簡單联系．

顯然，这和我們的多項式很有關係．房間好比陰影域，門

$I$好比多項式 $f_1$ 的圖形,門 $II$ 好比 $f_2$ 的圖形,出來和進去好比出點和入點,$P_1-Q_1$ 不是别的,正是特徵數 $(f_1, f_2)$,$P_2-Q_2$ 正是特徵數$(f_2, f_1)$。我們便得到關係式

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_1) + e,$$

而剩下來的只須說明在我們的情形下 $e$ 是什麼意义.

我們開始是在陰影域(房間)裏面还是在它外面,依賴於多項式 $f_1$ 和 $f_2$ 在 $x=a$ 時的值是同号还是異号. 完全一样,我們最後是在陰影域裏面还是外面,依賴於 $f_1$ 和 $f_2$ 在 $x=b$ 時的值是同号还是異号. 我們規定,如果一个"數对"是同号的,便說它們之間沒有变号,如果一个"數对"是異号的,便說它們之間有一个变号. 用 $a_1$ 和 $a_2$ 表示 $f_1$ 和 $f_2$ 在 $x=a$ 時的值,$b_1, b_2$ 表示它們在 $x=b$ 時的值. 这样便容易驗証,$e$ 將等於數对 $a_1$, $a_2$ 的变号數和數对 $b_1$, $b_2$ 的变号數之間的差。若用 $m_1$ 表第一數,而用 $n_1$ 表第二數,那末 $e=m_1-n_1$。

直到現在为止,我們还沒有方法去求兩个多項式的特徵數,因为要想利用特徵數的定义,必須知道它們的根. 現在我們就可以引出这样的方法了. 帶有餘式的除法正好在这裏發生效力. 我们用 $f_2$ 來除 $f_1$ 而帶有餘式:

$$f_1 = f_2 q + f_3 \quad (f_3\text{是餘式}), \tag{9}$$

並且我們提出一个問題:特徵數$(f_1, f_2)$ 和 $(f_2, f_3)$是怎样联系着的. 問題的这样提出,啓示我們应用上一節的結果,在那裏我們已經看到多項式对 $f_1$, $f_2$ 的公根和多項式对 $f_2$, $f_3$ 的公根相同. 首先我們有:

$$(f_1, f_2) = -(f_2, f_1) + e. \tag{10}$$