研究生入学考试数学试题精选

详　解

（下）

研究生入学考试数学

试题精选详解

（下）

吉林大学高等数学教研室　编

吉林科学技术出版社

研究生入学考试数学试题精选详解

（下）

吉林大学高等数学教研室　编

●

吉林科学技术出版社出版　吉林省新华书店发行

磐石县印刷厂印刷

●

787×1092毫米16开本　16.75印张　411,000字

1986年8月第1版　1987年6月第2次印刷

印数：3540—10720册

统一书号：13376.49　　　定价：3.50元

ISBN 7-5384-0031-1/N·3

目　　录

第八部分　级　　数

1　数值级数

1　证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$$收敛并求其和。

（北京邮电学院　1979年）

解　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 的前 n 项的部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$

由级数收敛的定义即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 收敛，其和为 $\frac{1}{3}$。

2　已知某级数的部分和为

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}$$

（1）求证此级数收敛；（2）求此级数的和。　　（武汉测绘学院　1980年）

解　（1）此级数的分子所构成的数列为

$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\cdots$

是优选法中常用的一个数列，通常称非波那契数列，它的通项为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

考虑 $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

因为$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n=0$。

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

设 $u_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{2a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}<1$$

故所给级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

(2) 由下列递推公式：

$$u_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2^n}=\frac{1}{2}\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{4}\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}}=\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{4}u_{n-2}$$

得 $u_3=\dfrac{1}{2}u_2+\dfrac{1}{4}u_1$，$u_4=\dfrac{1}{2}u_3+\dfrac{1}{4}u_2$，…，$u_n=\dfrac{1}{2}u_{n-1}+\dfrac{1}{4}u_{n-2}$

将上述各等式两端分别相加，得

$$S_n-u_1-u_2=\frac{1}{2}(S_{n-1}-u_1)+\frac{1}{4}S_{n-2}$$

其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$。

前已证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在。设$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则当$n\to+\infty$时，由①式，有

$$S-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}S$$

所以，$S=2$。

3 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛吗？若收敛，试求其和。 (华中工学院 1982年)

解 利用正项级数的比值判别法易知题给级数收敛。现按定义来证明所给级数收敛，并求和，设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$$

则 $2S_n=\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}$。

后式减前式，得

$$S_n=1+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n}{2^n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$．故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，且其和为2．

4　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$收敛，并求其和。　　　　（山东矿业学院　1982年）

证　用正项级数的达朗贝尔判别法易知所给级数是收敛的．下面用收敛定义证明并求和。

设　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3k+5}{3^k}=\frac{3\cdot1+5}{3}+\frac{3\cdot2+5}{3^2}+\frac{3\cdot3+5}{3^3}\cdots\frac{3(n-1)+5}{3^{n-1}}+\frac{3n+5}{3^n}$

$\frac{1}{3}S_n=\frac{3\cdot1+5}{3^2}+\frac{3\cdot2+5}{3^3}+\cdots+\frac{3(n-1)+5}{3^{n-1}}+\frac{3n+5}{3^{n+1}}$

两式相减，得

$\frac{2}{3}S_n=\frac{3\cdot1+5}{3}+3(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})-\frac{3n+5}{3^{n+1}}$

即　$S_n=4+\frac{3}{2}\cdot3\cdot\frac{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3n+5}{3^{n+1}}=4+\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^{n-2}})-\frac{3}{2}\cdot\frac{3n+5}{3^{n+1}}$

于是　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=4+\frac{3}{4}=\frac{19}{4}$

故所给级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}$收敛且其和为$\frac{19}{4}$.

5　证明级数

$\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot2^2}+\cdots+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\cdots$收敛并求其和。

（清华大学　1983年）

证　考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}$的前$n$项的部分和

$S_n=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot2^2}+\cdots+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}$　　$(n=1,2,3,\cdots)$

由反正切公式

$\mathrm{arctg}\alpha+\mathrm{arctg}\beta=\mathrm{arctg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\cdot\beta}$

得　$S_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot2^2}=\mathrm{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2^2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot2^2}}=\mathrm{arctg}\frac{2}{3}=\mathrm{arctg}\frac{2}{1+2}$

$S_3=S_2+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot3^2}=\mathrm{arctg}\frac{2}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2\cdot3^2}=\mathrm{arctg}\frac{3}{4}=\mathrm{arctg}\frac{3}{1+3}$

现用数学归纳法证明

$S_n=\mathrm{arctg}\frac{n}{1+n}$

设 $S_{k-1}=\operatorname{arctg}\dfrac{k-1}{1+(k-1)}$

其中 k 为自然数且 $k\geqslant2$。于是

$$S_k=S_{k-1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot k^2}=\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot k^2}=\operatorname{arctg}\frac{k(2k^2-2k+1)}{2k^3-k+1}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{k}{1+k}$$

所以，对一切自然数n，有

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{1+n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{n}{1+n}=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}$。

按定义级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot n^2}$ 收敛，且其和为$\dfrac{\pi}{4}$。

6 已知$a_n=\int_0^1x^2(1-x)^n dx$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求这个级数的和。

（华南工学院 1984年）

解 经积分

$$a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}=2$

按极限形式的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}a_n=\sum_{n=1}^{m}\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{m+3}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\dfrac{1}{6}$。

7 试用级数的积分判别法判别调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的发散性，并证明下述极限存在

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]$$

（合肥工业大学 1981年）

解 调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$的通项$a_n=\frac{1}{n}$，取$f(x)=\frac{1}{x}$。则有

$$a_1>\int_1^2\frac{1}{x}dx,\quad a_2>\int_2^3\frac{1}{x}dx,\quad\cdots,\quad a_n>\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

于是 $$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\left(\int_1^2+\int_2^3+\cdots+\int_n^{n+1}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和$S_n$无界(单调的)，故调和级数发散。

现证上面提到的极限存在。

当$x>0$时，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots>1+x$。

当$0<x<1$时，$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots<1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$。故当$0<x<1$时，有

$$1+x<e^x<\frac{1}{1-x}$$

因而 $$\ln(1+x)<x<-\ln(1-x)\qquad(0<x<1)\tag{①}$$

取$x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n}$，得

$$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}<-\ln\frac{1}{2},\quad \ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3}<-\ln\frac{2}{3},$$

$$\ln\frac{5}{4}<\frac{1}{4}<-\ln\frac{3}{4},\cdots,\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<-\ln\frac{n-1}{n}$$

相加并化简，得

$$\ln\frac{n+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n$$

从而 $$1+\ln\frac{n+1}{2n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1\tag{②}$$

设 $$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

由不等式②知，数列$\{S_n\}$是有界的。又由不等式①及

$$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

知$S_{n+1}-S_n<0$，即数列$\{S_n\}$是单调下降的。据单调有界原理，$\{S_n\}$有极限，设为S，则

$$S=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right\}$$

结论得证。

8 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n\right)=1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛，试证明之。

（华中工学院 1979年）

证 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}=1$

按极限的定义，对任给的$\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n\geqslant N_1$时，有

$$\left|\frac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}-1\right|<\varepsilon$$

从而有 $a_n<(1+\varepsilon)n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n\sin\dfrac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=2$

故对上述的$\varepsilon>0$，存在$N_2>0$，当$n\geqslant N_2$时，有

$$\left|2n\sin\frac{1}{n}-2\right|<\varepsilon$$

从而有 $2n\sin\dfrac{1}{n}>2-\varepsilon\geqslant\dfrac{3}{2}$

取$N=\max(N_1,N_2)$，于是当$n\geqslant N$时，有

$$a_n<(1+\varepsilon)n^{-2n\sin\frac{1}{n}}\leqslant(1+\varepsilon)n^{-\frac{3}{2}}=\frac{1+\varepsilon}{n^{\frac{3}{2}}}$$

因为 $p=\dfrac{3}{2}>1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，按正项级数比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，并且$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\sigma,(\sigma>0),n=1,2,3\cdots$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性。 （复旦大学 1981年）

解 因为$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\sigma$，即$\ln\dfrac{1}{a_n}\geqslant(1+\sigma)\ln n=\ln n^{1+\sigma}$。由对数函数的单调性，有$\dfrac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\sigma}$，即$a_n\leqslant\dfrac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$。由p—级数在$p=1+\sigma>1$时收敛知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\sigma}}$收敛。按正项级数比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

10 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n\right]=1\ (p>1)$，讨论正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性。

（湖南大学 1981年

解 因$\lim\limits_{n\to\infty}[n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1$，由极限定义知，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，当$n\geqslant N_1$时有

$$1-\varepsilon<n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n<1+\varepsilon \quad ①$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$。故对$\varepsilon>0$，存在

$N_2>0$，当$n\geqslant N_2$时，有

$$1-\varepsilon<n(e^{\frac{1}{n}}-1)<1+\varepsilon \qquad ②$$

记$N=\max(N_1,N_2)$，则当$n\geqslant N$时，由不等式①、②

得 $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}<\dfrac{1-\varepsilon}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}<n^{p-1}a_n<\dfrac{1+\varepsilon}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}<\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$

即 $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\dfrac{1}{n^{p-1}}<a_n<\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{n^{p-1}}$

当$p-1\leqslant1$，即$p\leqslant2$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\dfrac{1}{n^{p-1}}=\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$发散．据正项级数比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散．当$p-1>1$，即$p>2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\dfrac{1}{n^{p-1}}=\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$收敛，由正项级数比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛．综上所述，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，当$p\leqslant2$时发散；当$p>2$时，收敛．

11 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{\pi}{n})$的敛散性． （长沙铁道学院 1981年）

解 因为 $1-\cos\dfrac{\pi}{n}=2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}\leqslant2(\dfrac{\pi}{2n})^2=\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$是$p=2$的$p$级数，它是收敛的．因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$也收敛．据正项级数比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{\pi}{n})$收敛．

12 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，利用不等式$(x-y)^2\geqslant0$证明：正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot b_n}$与正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$也收敛． （西安交通大学 1982年）

证 由$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2\geqslant0$，得

$$x\cdot y\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

则有 $\sqrt{a_n\cdot b_n}=\sqrt{a_n}\cdot\sqrt{b_n}\leqslant\dfrac{1}{2}(a_n+b_n$

按设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，于是级数$\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也收敛，据正项级数比较判别法知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot b_n}$收敛．

令$b_n=\dfrac{1}{n^2}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛．于是由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛及已证得的结论知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}\sqrt{\frac{1}{n^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}\sqrt{b}$$

收敛．

13　判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}$的敛散性。　　（哈尔滨工业大学　1982年）

解　考虑级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}$．令$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$由广义积分

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}[\ln\ln x]_2^b=\lim_{b\to\infty}[\ln\ln b-\ln\ln 2]=+\infty$$

知　级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散。又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

据正项级数极限形式的比较判别法推出级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}$发散。

14　讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$的敛散性。　　（安徽工学院　1982年）

解　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$的一般项

$$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx\geqslant 0$$

且　$0\leqslant a_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=b_n$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$是收敛的，从而级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$收敛。

15　证明：若有$\alpha>0$，使当$n\geqslant n_0$时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；若$n\geqslant n_0$时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散（其中$a_n>0$）．　　（哈尔滨工业大学　1983年）

证　当$n\geqslant n_0$时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$成立，

于是　$\ln\frac{1}{a_n}\geqslant(1+\alpha)\ln n=\ln n^{(1+\alpha)}$

由对数函数的单调性，得

$$\frac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\alpha}$$

即　　$a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}}$　　（当$n\geqslant n_0$）

因为$\alpha>0$，$1+\alpha=p>1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$收敛，由正项级数的比较判别法知，级数

$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$收敛，进而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

若$n\geqslant n_0$时，$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$，则有

$$\ln\frac{1}{a_n}\leqslant\ln n$$

即 $$a_n\geqslant n^{-1}$$

由调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知，级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$发散，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

16 试证：若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$也收敛；

反之，若$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$收敛，问$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否也收敛？

又若诸项a_n是单调的，且$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$收敛，问级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛？

（华中工学院 1983年）

证 因为$0\leqslant\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$。

又由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$收敛，按正项级数比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$也收敛。

反过来，由$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$收敛，推不出级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$必收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛、发散都可能！一个发散的例子：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$，简单说明问题，只是数值为0的项太多了。

稍复杂一点的例子：如级数

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\cdots$是发散的。用极限形式的比较判别法可以证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n\cdot a_{n+1}}$是收敛的。

当a_n单调且$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$必然收敛。

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$收敛，故有$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}=0$，即$\lim_{n\to\infty}a_n a_{n+1}=0$。故$a_n$必为单调

不增的，于是 $a_{n+1}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}\ (n=1,2,\cdots)$。又由假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛，按比较判别法有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

17 设$a>0$，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a_n)}$的敛散性。

（上海交通大学 1983年）

解 设级数的一般项为b_n，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0, & 当\ a<1\\ \dfrac{1}{2}, & 当\ a=1\\ 1, & 当\ a>1\end{cases}$$

于是由达朗贝尔判别法知，当$a\leqslant1$时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛。下面考察$a>1$的情形。

$$b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)}，其中0<a_1=\frac{1}{a}<1.$$

令$c_n=(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)$ $(n=1,2,\cdots)$

显然$\{c_n\}$是单调递增的。现证它也是有界的，由$x>0$时，$e^x>1+x$，可推出

$$c_n=(1+a_1)(1+a_1^2)\cdots(1+a_1^n)<e^{a_1}\cdot e^{a_1^2}\cdot\cdots\cdot e^{a_1^n}$$

$$=e^{a_1+a_1^2+\cdots+a_1^n}=e^{\frac{a_1-a_1^{n+1}}{1-a_1}}<e^{\frac{a_1}{1-a_1}}$$

于是，由单调有界原理知，$\{c_n\}$是收敛即$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$存在，且介于 1 与$e^{\frac{a_1}{1-a_1}}$之间，进而$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，且大于 0，故原级数发散。

综合以上情况，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 当$0<a\leqslant1$时收敛；当$a>1$时发散。

18 证明：如果$a_n>0$，$a_n>a_{n+1}$。则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^ka_{2^k}$收敛。

（天津大学 1984年）

证 记 $S_n=\sum\limits_{m=1}^{n}a_m$，$t_k=\sum\limits_{i=0}^{k}2^ia_{2^i}$

(1) 证 充分性。由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^ka_{2^k}$收敛 $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

由设$a_n>0$，$a_n>a_{n+1}$，及

对于任一正整数n，总存在整数k，使$2^{k-1}<n\leqslant 2^k$，

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \\
&< a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+\cdots+a_n+\cdots+a_{2^k} \\
&< a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{2^{k-1}}+\cdots+a_{2^k-1}) \\
&\quad +(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1}) \\
&\leqslant a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^{k-1}}+2^k\cdot a_{2^k}=t_k
\end{aligned}
$$

由于正项级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$收敛，故其部分和序列$\{t_k\}$有界，从而数列$\{S_n\}$有界，故正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。充分性得证。

(2) 证必要性。由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Longrightarrow\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$收敛

对于任何自然数k，总存在自然数m，使$2^k<m<2^{k+1}$，于是有

$$
\begin{aligned}
S_m &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k}+\cdots+a_m \\
&> a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^k} \\
&= a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+a_{2^{k-1}+2}+\cdots+a_{2^k}) \\
&\geqslant a_1+a_2+2a_4+4a_8+\cdots+2^{k-1}\cdot a_{2^k} \\
&> \frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_4+2^3a_8+\cdots+2^k a_{2^k})=\frac{1}{2}t_k
\end{aligned}
$$

由于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故其部分和序列$\{S_n\}$有界，从而$\{2S_n\}$有界，它的子序列$\{2S_m\}$同样有界，故数列$\{t_k\}$有界，因此正项级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$收敛。必要性得证。

19　已经n充分大时，$a_n>0$，$b_n>0$，且$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$

求证：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散。

（华东工程学院　1984年）

证　因为当n充分大时，$a_n>0$，$b_n>0$，且$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$，于是$\dfrac{a_n}{b_n}\geqslant\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>0$。所以当$n$充分大时，数列$\{\dfrac{a_n}{b_n}\}$单调递减，下方有界，据单调有界原理，此数列有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\qquad(0\leqslant k<+\infty)$$

按极限定义，对任给的$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n\geqslant N$时，有

$$-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-k<\varepsilon$$

即　　$b_n(k-\varepsilon)<a_n<b_n(k+\varepsilon)\qquad(n\geqslant N)$

于是，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，$\sum\limits_{n=N}^{\infty}(k+\varepsilon)b_n$也收敛，由正项级数比较原理知正项级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$收敛，进

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．若级数 $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=N}^{\infty}(k-\varepsilon)b_n$ 亦发散，由正项级数比较判别法知级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 发散，导致级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

20　代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论，请选择一个．

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性：

(A)因为 $1+\frac{1}{n}>1$，所以级数收敛；

(B)因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=0$，所以级数收敛；

(C)因为 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}<\frac{1}{n}$，所以级数收敛；

(D) A,B,C 都不是。　　　　（上海交通大学　1984年）

解　(D)。

21　设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散，$a_k>0$，$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$。试证：级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{S_k}$ 也发散．

（哈尔滨工业大学　1984年）

证　改写级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{S_k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}}$．对于固定的 m，由于正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散，总存在 n，使 $S_{n+1}>2S_m$。于是，由 S_k 的单调性有

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}}\geqslant\sum_{k=m}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_m}{S_{n+1}}$$

$$=1-\frac{S_m}{S_{n+1}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

据级数收敛的Cauchy判别准则知，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}}$，从而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{S_k}$ 发散。

22　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性，$u_n=\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^2}\,dx}$．　（西北电讯工程学院　1984年）

解　由于 $0<u_n\leqslant\frac{1}{\int_0^n x\,dx}=\frac{2}{n^2}$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．

23　证明：若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上二次可微，且连续．$n\in N$，$a_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$，$b_n=\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx\,dx$，$f(-\pi)=f(\pi)$，$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right)$$

（东北师范大学　1984年）

证 由分部积分知，$a_n=-\frac{1}{n^2}b_n$，于是

$$\sqrt{|a_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|b_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n|\right)$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<2$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right)$$

24 判别级数

$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{9}+\frac{2!}{3^2}\left(\frac{19}{9}\right)^2+\frac{3!}{4^3}\left(\frac{19}{9}\right)^3+\frac{4!}{5^4}\left(\frac{19}{9}\right)^4+\cdots$ 的敛散性。

（上海交通大学　1984年）

解 所给级数的一般项 $a_n=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\left(\frac{19}{9}\right)^{n-1}$。

$$\text{因为}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{(n+1)^n}\left(\frac{19}{9}\right)^n}{\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\left(\frac{19}{9}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{19}{9}=\frac{19}{9e}<1$$

据正项级数的达朗贝尔判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

25 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$ 的收敛性。　（华中工学院　1984年）

解 依据极限式　$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$，及

$$\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)=e^{\frac{1}{n^2+1}\ln n}-1=\frac{\ln n}{n^2+1}+o\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)$$

可知，当n大到一定程度之后，有 $0<n^{\frac{1}{n^2+1}}-1<2\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}<2\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故根据比较原理得知所论级数也收敛。

26 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性。　（华东师范大学　1984年）

解 由 $a_n=2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\leqslant2^n\cdot\frac{\pi}{3^n}=\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n=b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 是公比 $r=\frac{2}{3}<1$ 的几何级数，收敛。按正项级数的比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

27 判别下列级数的收敛性