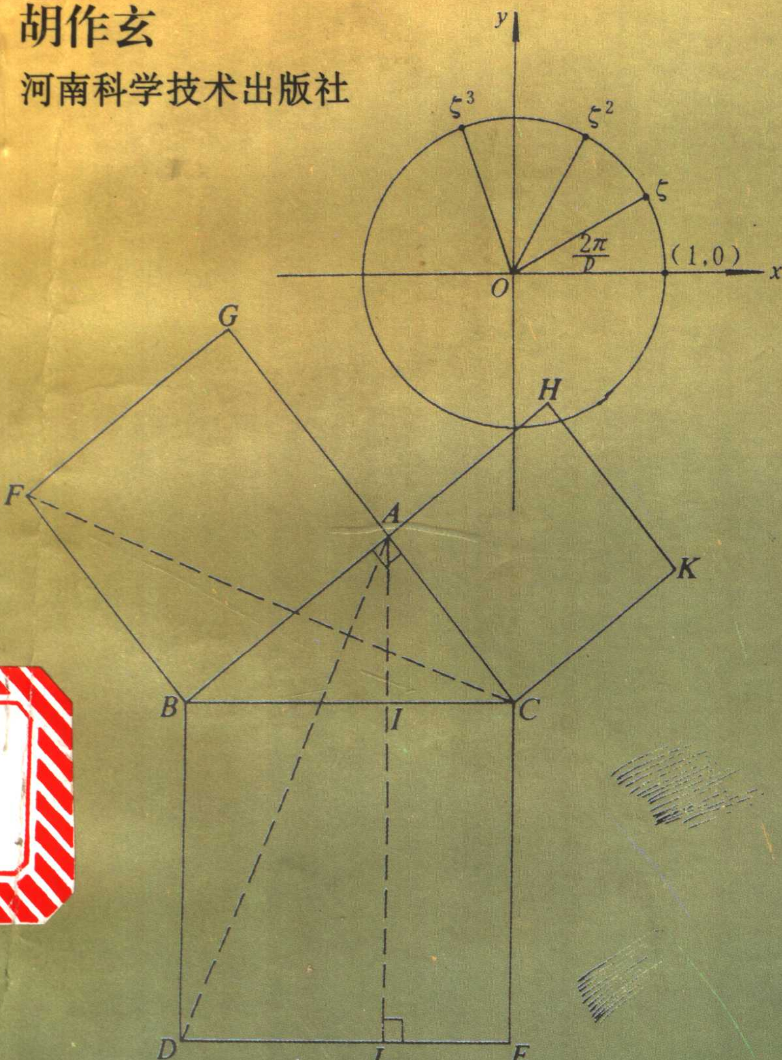
从毕达哥拉斯到费尔马

胡作玄

河南科学技术出版社

让你开窍的数学



让你开窍的数学

从毕达哥拉斯到费尔马

胡作玄

河南科学技术出版社

内 容 提 要

许多数论问题讲起来很简单,但解起来很难.哥德巴赫猜想就是这千千万万个问题中的一个.本书从西方数论的远祖毕达哥拉斯讲起,介绍了古代数论至今尚未解决的三大难题,其中莫德尔方程和同余数问题在国内从来没有介绍过.本书下半部分主要介绍近代数论之父费尔马和他的大定理350多年的历史,以及该定理被证明后遗留下来的大量没有解决的不定方程问题.本书内容丰富、由浅入深,许多结果介绍到最新纪录.可供中学师生以及对数论问题(特别是费尔马大定理)有兴趣的各界人士阅读.

让你开窍的数学

从毕达哥拉斯到费尔马

胡作玄

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

(郑州市农业路73号)

河南第一新华印刷厂印刷

全 国 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米 32开本 8印张 156千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数:4 001—7 000册

ISBN 7-5349-1934-7/G·505

定 价:8.80元

序

如果我们打开科学史,研究一些卓越人物成功的经验,就会发现一个重要的事实:他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳,但热爱生物,结果他成为最伟大的生物学家.反之,如果强迫他研究数学,他未必能如此成功.由此可见,兴趣与工作一致,二者形成良性循环,是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关,但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生

不仅知其然，而且知其所以然，不仅看到定理的结论，而且了解它的演变过程，不仅看到逻辑之美，而且欣赏到形象之美、直观之美，这才是难能可贵的．在许多情况下，直观走在逻辑思维的前面，起了领路作用．直觉思维大都是顿悟的，很难把握，却极富兴趣，正是精华所在．M．克莱因写了一部大书《古今数学思想》，对数学发展的主导思想有精彩的论述，可惜篇幅太大，内容过深，不易为中学生所接受．

真正要对数学入迷，必须深入数学本身：不仅是学者，而且是作者；不仅是观众，而且是演员．他必须克服一个又一个的困难，不断地有新的发现、新的创造．其入也愈深，所见也愈奇，观前人所未观，发前人所未发，这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界．为此，他应具备很强的研究能力；而这种能力，必须从中学时代起便开始锻炼，经过长期积累，方可成为巨匠．

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用．近年来我国出版了多种数学课外读物，包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解．这套《让你开窍的数学》丛书与众有所不同，其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”，风格近似于美国数学教育家 G．Polya（波利亚）的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》，但更切合我国的实际．本丛书共 8 本，可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广．作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平，而且大都出版过多种数学著作．因此，他们必能得心应手，写得趣味盎然，富于启发性．这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学,我们希望它能收到宗旨中确定的效果,为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996.7.

前言

算术、代数、几何是数学中最基本的课程，但是把它们结合在一起——算术代数几何，却是数学的前沿领域，其中的主要问题是不定方程. 中学甚至小学数学中的方程大都是确定方程（即方程中未知数的数目与方程的数目一样多），它们都有一定的求解方法. 但是，对于不定方程（即方程中未知数的数目大于方程的数目）来说，求解它们的难度相差极大：有的比较容易，如勾股方程，三四千年前已知道它的一些解；而有的非常之难，如 1995 年才最终证明的费尔马大定理. 每位中学生，只要他对数学有兴趣，都能找到适合本人程度的问题.

其实，当你在小学一年级一接触到数，就已经有一些有趣的问题，例如高斯的求

$$1+2+3+\cdots+100$$

的和的问题和三阶幻方的问题. 只要你有兴趣

和钻研精神，就不难进一步考虑其他的问题，

例如

$$1+3+5+\cdots+99$$

和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$$

以及四阶幻方的问题．可见，问题就在你的身边，只要你有兴趣去搜寻．

遗憾的是，这些数学兴趣的萌芽，往往很快就被升学的题海战术和“奥校”的题海战术所淹没．再有就是片面的宣传所导致的证明哥德巴赫猜想和费尔马大定理的妄想狂．他们不了解数学，也不了解问题的产生、发展和历史，其后果只能是自生自灭，最终烟消云散．结果学生们从这些“课外书”中，再也找不到学数学的乐趣，也看不到就在身边的问题．而这些问题要比偏题、怪题有意思得多．许多问题有着千年的历史，甚至到今天还没有完全解决，例如同余数问题．所谓同余数是这样的正整数，它等于某个直角三角形的面积，且这个直角三角形三边之长都是有理数．显然 6 是同余数，因为勾 3 股 4 弦 5 的直角三角形的面积是 6．你想想看，1，2，3，4，5 是不是同余数？据我所知，还没有一本中文书讲过这个问题．甚至更一般的问题：有理三角形（即三边都是有理数且面积也是有理数的三角形）有哪些？似乎也没有人讲过．

袁元先生提出出版这套《让你开窍的数学》丛书的倡议，我非常赞成．为此，我为那些还对数学有兴趣的读者写了这本书，为的是使读者对数论问题有一个比较全面的认识和理解，

并且能找一些适合自己程度的问题想一想，做一做．读者不必一定从头到尾读完，不懂的地方可以跳过去．各章的体例也不尽相同．总之，笔者希望这本书能使你保持一些对数学的兴趣，同时也向你提示一些考虑数学问题的方法．希望你能从这本书中获益．

本书的写作得到中国数学会数学传播委员会的支持，谨致谢意．

胡作玄

1996 年 7 月

目录

1

形形色色的数论问题

当人类同外星人通讯时，当一个人到国外而又不通当地语言时，他们有什么能相互理解呢？除了图形、手势之外，恐怕只有“数”是大家都能懂的仅有的抽象语言了，也只有数可以作为沟通不同文明的手段.未来的任何通信，看来都要以数字通信为基础，也就是说，所有信息最终都要翻译成数码.在陌生的地方，你认识的也只有各种数码：电话号码、邮政编码、门牌号码、汽车牌照号码、时间表以及商品服务价格、银行的利率、汇率等等，这已经为你提供相当多的信息了.在日常生活中，数的表示和计算更是必不可少的，这是小学学习的内容，但这还不是“正正经经”的数学，这只是一种常识或实用技术，而关于数的神秘海洋还大着呢.你也许知道最

简单的数学练习题，也知道有个哥德巴赫问题，不过在数学或数论的汪洋大海中，它们不过是沧海一粟，有意思的问题可多啦！

自然数一出现，人们对于数的性质的研究就没有间断过．不过，开始时人们总是研究特殊的数的特殊性质，而且往往带有强烈的神秘色彩．在同算术的平行发展中，逐步从特殊到一般，得出一些普遍性的定理和猜想．你不要小看这些小整数的演算，正是从这里面归纳出了后来大数学家也证不出的猜想．

1.1 数字的特征

我们先从 1 开始，看看小的数有什么唯我独有的特征．

(1)1 在各个民族的文化中，都代表着至高无上的地位，在数学中，1 有许多独一无二的性质：

1)1 是乘法的单位，也就是 1 乘上任何数后，那个数都不变．

2)两个不同的正整数，它们的差最小为 1，这件事看起来稀松平常，可是极为有用．例如用有理数逼近无理数时，使两个整数相差 1 时所得到的有理数近似值在同一分母的所有分数中是最佳的．

(2)在不同的文化中，2 的意义不同，中国人喜欢成双成对，比较看重偶数，特别是 2 的方幂，西方人则不在乎这一点．从数学上讲，2 是第一个偶数，也是唯一的偶素数．

(3)在许多文化中，3 是一个稳定的象征，例如三足鼎立，

龙有三爪等等.在数学上,3 是第一个奇素数,也是第一个真图形数,即三角形数"∴"(除去后来往往补进来的非真图形数 1).3 在空间表示上也很重要,如我们的空间是三维的,一般物体都有长、宽、高等等.

(4)4 是一个完成的数,我们往往一分为二,二分为四,这样出现四季、四个方向东西南北等等.大多数文化看重 4,只有日本人讨厌 4,他们的 4 与"死"同音,被认为不吉利.

4 是除 1 以外第一个平方数.

4 是满足 $2+2=2\times2$ 的数,除了 4 之外,方程 $n+n=n\times n$ 没有解.

4 是第一个立体图形数,即正四面体数.

(5)中国文化中,5 用得很多:五金,五行,五谷,五内等等.毕达哥拉斯认为,2 代表女性,3 代表男性,因此 $5=3+2$ 代表男女结婚.我们还看重 5 的几何意义:人体的头和四肢构成一个五边形,许多花瓣也是五边形;另外黄金分割和无理数的出现最早都是从正五边形来的.5 在数论上也是至关重要的,由它产生出许多经典数论问题,例如:

1)$5=1^2+2^2$,5 是第一个表为两个不同的平方数之和的数.一般问题是,哪些数可表示为两个平方数之和,其中哪些又可以表示为两个不同的平方数之和?这个问题在数论历史上是非常有意义的问题.

2)$5!+1=11^2$,5! 表示 5 的阶乘,即

$$5!=5\times4\times3\times2\times1=120.$$

一个自然的问题是,是否还有其他的 n 使得

$$n!\ +1=m^2.$$

除了 $n=5$ 之外，现在还知道 $n=4,7$，请你算一下

$$4!\ +1=?$$

$$7!\ +1=?$$

看看它们是不是平方数.

(6)6 是美丽的几何的数，请想想正六边形和雪花. 因此毕达哥拉斯把它看做完美的数，它是第一个完全数(即等于其真因数之和的数)：

$$6=1+2+3,$$

同时它的三个因数也是不定方程

$$x+y+z=xyz$$

的唯一解.

(7)7 在西方是一个吉利的数，象征胜利和繁荣，但是正七边形却是第一个不能用圆规直尺作图的正多边形. 于是古代人从作图实践中提出了数学历史上极有意义的问题：哪些正 n 边形可用尺规作图？这个有两千多年历史的难题最终为大数学家高斯所解决.

(8)8 是现代中国人最喜欢的数码，人人向钱看，人人都想"发". 可是西方数秘学把 8 看成一个凶数，表示战争和破坏.

8 是除 1 以外第一个立方数，对于一个三维立方体，每个方向上都一分为二，就得到 8 个立方体.

(9)9 在中国是受尊敬的数，皇帝是"九五之尊"，在西方则是无限广阔天地的代号，象征富足和繁荣.

9 作为一个平方数，满足

$$1!+2!+3!=n^2,$$

由此产生出一般问题：求不定方程

$$1!+2!+3!+\cdots+m!=n^2$$

的解.

从上面最小的一些整数就可以得出一些有趣的数论问题，而且从中得到一些重要的概念和性质. 下面我们再举一些例子：

(1)12 是第一个丰数，也就是它的真因数之和大于它本身. 12 的因数为 1,2,3,4,6,12，而

$$1+2+3+4+6=16>12.$$

作为练习，读者可以继续求 12 以后的丰数.

(2)当三个相继整数为三角形的三边长时，面积未必是一个整数. 这样的三角形称为整数三角形. 显然，唯一的整数直角三角形是(3,4,5)，而下一个整数三角形是(13,14,15)，其面积是 84.

(3)最早的数论问题之一是幻方. 三阶幻方是指把 1,2,3,…,9 这九个数放在三行三列的方格中，使得每行每列及对角线上的三个数的和都相等(洛书中的三阶幻方如图 1.1 所示)，三阶幻方的和数=15，四阶幻方呢?

(4)可以表示为两个不同的数的 4 次方之和的最小的整数是 17.

(5)$17^3=4913$，而 $17=4+9+1+3$；

$18^3=5832$，而 $18=5+8+3+2$；