

工科数学的内容、方法与技巧丛书

复变函数

内容、方法与技巧

► 孙清华 孙昊



华中科技大学出版社

工科数学的内容、方法与技巧丛书

复变函数

内容、方法与技巧

孙清华 孙 昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数 内容、方法与技巧/孙清华 孙 昊
武汉:华中科技大学出版社,2003年7月
ISBN 7-5609-2951-6

I. 复…

II. ①孙… ②孙…

III. 复变函数-高等学校-教学参考资料

IV. O174.5

复变函数 内容、方法与技巧

孙清华 孙 昊

责任编辑:徐正达 李立鹏

封面设计:刘 卉

责任校对:朱 霞

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室

印 刷:湖北恒吉印务有限公司

开本:850×1168 1/32 印张:13.125

字数:313 000

版次:2003年7月第1版 印次:2003年7月第1次印刷

定价:15.00元

ISBN 7-5609-2951-6/O·280

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是工科数学的内容、方法与技巧丛书之一,内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等,按章节对各个问题的内容、方法与技巧进行了归纳提高、释疑解难、分析演绎,利用大量的例题,对问题分析、数据计算作了充分的介绍和必要的比较,以帮助读者理解概念,掌握方法,熟悉技巧.

本书是大学生学习复变函数的优秀辅导书,希望它能成为读者的良师益友.

前 言

复变函数是高等学校的一门重要的数学基础课,也是自然科学与工程技术中常用的数学工具.它是微分方程、奇异积分方程、计算数学和概率论等数学分支的主要解析方法,又是空气动力学、流体力学、弹性力学、电磁学和热力学等学科的重要的几何定性研究方法.因此,学好复变函数课程对于在校大学生和科学技术工作者是十分重要的.本书就是为了帮助广大读者学好复变函数而编写的.

复变函数的许多基本概念,如函数、极限、连续、导数和积分在形式上与微积分几乎相同,但复变函数却有本质上的深化,尤其是在方法和技巧上,更有着显著的不同.读者在学习时要特别注意它们之间的联系、发展和变化,理解概念、掌握方法、熟悉技巧.

本书按照《复变函数课程教学大纲》要求编写,在概念与例题选编上都略有提高.为了使读者学习和使用起来更加方便,采用了以章节为序的编写方式.每节分三个部分:主要内容部分对概念和方法进行了归纳和凝练,强调了读者应该注意的问题;疑难解析部分针对读者在理解概念和掌握方法中可能出现的问题进行了解剖分析、比较论证,尽可能使读者消除疑惑、解决困难;方法、技巧与典型例题分析部分利用了大量的例题,对分析问题、研究问题、计算数据、求取结果的方法作了大量的介绍和必要的比较,给读者掌握方法、熟悉技巧创造了很好的条件.缺憾的是,限于篇幅的原因,许多可以一题多解的问题我们只能列出一二种方法.希望读者在学习本书之后,作为练习,自己来补足这一点.编者相信本书能给读者以帮助和启发,使读者有较大的受益.

本书是工科数学的内容、方法与技巧丛书之一,欢迎读者选用本套丛书.本书在编写和出版中得到华中科技大学出版社编辑和领导的热心支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限,错漏之处在所难免,热忱欢迎读者批评指正.

孙清华 孙昊

2003 年 5 月

目 录

第一章 复数与复变函数	(1)
第一节 复数的概念与几何表示	(1)
主要内容	(1)
疑难解析	(3)
方法、技巧与典型例题分析	(6)
一、复数的概念	(6)
二、复数的代数运算	(10)
三、复数的等式与不等式的证明	(14)
四、平面几何问题的复数方法	(19)
第二节 复球面与平面区域	(28)
主要内容	(28)
疑难解析	(29)
方法、技巧与典型例题分析	(30)
第三节 复变函数、极限与连续性	(39)
主要内容	(39)
疑难解析	(41)
方法、技巧与典型例题分析	(43)
一、复变函数概念	(43)
二、复变函数的极限	(48)
三、复变函数的连续性	(51)
第二章 解析函数	(56)
第一节 函数解析的充要条件	(56)
主要内容	(56)
疑难解析	(58)
方法、技巧与典型例题分析	(60)
一、复变函数的导数与微分	(60)
二、函数解析性的判定及其运算	(67)

第二节 初等解析函数	(77)
主要内容	(77)
疑难解析	(80)
方法、技巧与典型例题分析	(82)
一、初等解析函数的计算	(82)
二、初等解析函数方程的求解	(89)
三、初等解析函数的证明	(93)
第三节 平面场的复势	(99)
主要内容	(99)
疑难解析	(101)
方法、技巧与典型例题分析	(102)
第三章 复变函数的积分	(110)
第一节 复变函数积分的概念	(110)
主要内容	(110)
疑难解析	(112)
方法、技巧与典型例题分析	(113)
第二节 柯西-古萨定理与复合闭路定理	(121)
主要内容	(121)
疑难解析	(121)
方法、技巧与典型例题分析	(123)
一、柯西-古萨定理的应用	(123)
二、复合闭路定理的应用	(131)
第三节 原函数与不定积分	(139)
主要内容	(139)
疑难解析	(140)
方法、技巧与典型例题分析	(141)
第四节 柯西积分公式与高阶导数公式	(145)
主要内容	(145)
疑难解析	(147)
方法、技巧与典型例题分析	(148)
一、柯西积分公式及其应用	(148)
二、高阶导数公式及其应用	(158)

第五节 解析函数与调和函数	(169)
主要内容	(169)
疑难解析	(169)
方法、技巧与典型例题分析	(171)
第四章 级数	(186)
第一节 复数项级数	(186)
主要内容	(186)
疑难解析	(187)
方法、技巧与典型例题分析	(189)
第二节 幂级数	(195)
主要内容	(195)
疑难解析	(198)
方法、技巧与典型例题分析	(200)
一、幂级数敛散性的讨论	(200)
二、关于幂级数收敛性的证明	(209)
第三节 泰勒级数	(216)
主要内容	(216)
疑难解析	(217)
方法、技巧与典型例题分析	(219)
一、直接展开法的运用	(219)
二、间接展开法的运用	(223)
三、利用幂级数展开式证明问题	(234)
第四节 洛朗级数	(240)
主要内容	(240)
疑难解析	(241)
方法、技巧与典型例题分析	(244)
一、直接展开法的运用	(244)
二、间接展开法的运用	(246)
三、关于洛朗级数的证明题	(257)
第五章 留数	(260)
第一节 孤立奇点	(260)
主要内容	(260)

疑难解析	(263)
方法、技巧与典型例题分析	(265)
第二节 留数定理与留数计算	(273)
主要内容	(273)
疑难解析	(275)
方法、技巧与典型例题分析	(276)
一、计算函数在孤立奇点处的留数	(276)
二、利用留数计算复变函数的积分	(287)
三、利用留数与留数定理证明命题	(294)
第三节 留数在定积分计算上的应用	(298)
主要内容	(298)
疑难解析	(299)
方法、技巧与典型例题分析	(300)
第四节 对数留数与辐角原理	(318)
主要内容	(318)
疑难解析	(320)
方法、技巧与典型例题分析	(321)
一、对数留数与对数留数定理的应用	(321)
二、辐角原理与路西定理的应用	(323)
第六章 共形映射	(331)
第一节 共形映射的概念	(331)
主要内容	(331)
疑难解析	(332)
方法、技巧与典型例题分析	(334)
第二节 分式线性映射	(340)
主要内容	(340)
疑难解析	(344)
方法、技巧与典型例题分析	(347)
一、分式线性映射的概念	(347)
二、分式线性映射的确定与映射的图形	(353)
第三节 几个初等函数构成的映射	(373)
主要内容	(373)

疑难解析	(375)
方法、技巧与典型例题分析	(377)
第四节 共形映射定理与多角形映射	(393)
主要内容	(393)
疑难解析	(394)
方法、技巧与典型例题分析	(394)

第一章 复数与复变函数

本章主要讨论复数的概念、性质及运算,并引入平面点集、复变函数及其极限与连续性的概念,为以后各章的学习奠定基础.

第一节 复数的概念与几何表示

主要内容

一、复数的概念

形如 $z = x + iy$ 的数称为复数,其中 x, y 为任意实数, $i = \sqrt{-1}$ 称为虚单位. 又记 $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z)$, 分别称为 z 的实部与虚部.

二、复数的各种表示法

1. 复数的复平面表示

复数 $z = x + iy$ 与坐标平面上的点 (x, y) 构成一一对应的关系,如图 1.1 所示. 用点 (x, y) 表示复数 $z = x + iy$ 的方法,称为复数的复平面表示法. 此时,直角坐标平面称为复平面或 z 平面, x 轴称为实轴, y 轴称为虚轴,点 $z(x, y)$ 即复数 z .

2. 复数的向量表示

在复平面上,复数 z 又与从原点指向点 $z = x + iy$ 的向量构成一一对应,所以复数 z 可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示. 向量的长度称为 z 的模;当 $z \neq 0$ 时,以 x 轴正向为始边,以 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角

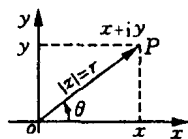


图 1.1

(弧度)称为 z 的辐角.分别记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arg} z = \theta \left(\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x} \right).$$

辐角有无穷多个,其中满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$. $\operatorname{Arg} z = \theta_1 + 2k\pi$, θ_1 为任一辐角. $z = 0$ 时,辐角任取.

3. 复数的极坐标表示

利用直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) 之间的关系,将复数 z 表示为三角函数表示式:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

其中 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

4. 复数的指数表示式

应用欧拉公式,将复数 z 表示为 $z = re^{i\theta}$.

复数在不同的运算中可选择不同的表示式进行运算.

三、复数的运算

1. 相等. 两个复数 z_1 和 z_2 , 当且仅当实部与虚部分别相等时才相等.

2. 对于两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 有

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

z 分别称为 z_1 和 z_2 的和、差、积、商. 在商中, $z_2 \neq 0$.

3. 实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数, 它有如下运算性质:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{\bar{z}} = z;$$

$$z\bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2;$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z).$$

4. 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积, 两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和. 即若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\text{则} \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

若 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

5. 两个复数的商的模等于它们的模的商, 两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差. 即若

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

$$\text{则} \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)] = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}.$$

若 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 则

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

这里 $k = 0, 1, \dots, n-1$. w 的 n 个值恰为以原点为中心、 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周的内接正 n 边形的顶点. 当 $k = 0$ 时, w_0 称为主值.

疑难解析

1. 复数为什么不能比较大小?

答 实数能比较大小, 是因为实数是有序的; 而复数是无序的, 所以不能比较大小.

因为复数是实数的推广, 则若复数有大小, 其大小关系应与实数中大小关系保持一致. 不妨取复数 0 和 i 加以讨论:

因为 $i \neq 0$, 设 $i > 0$, 则 $i \cdot i > i \cdot 0 = 0$, 得 $-1 > 0$, 显然不成立; 设 $i < 0$, 则 $i \cdot i > i \cdot 0 = 0$ (不等式两边同乘以小于零的数,

不等号反向), 也有 $-1 > 0$, 所以, i 与 0 无法比较大小. 从而知, 两个复数是不能比较大小的.

然而, 复数的模、实部和虚部都是实数, 辐角也是实数, 是有序的. 因此, 可以比较两个复数的模、实部、虚部和辐角的大小. 在这个意义上, 也称复数是部分有序的.

2. 怎样确定辐角的主值 $\arg z$?

答 因为复数 z 的辐角 $\text{Arg} z = \theta$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$. 而 $-\pi < \arg z = \theta_0 \leq \pi$. 所以, θ_0 (见图 1.2) 按下列关系式来确定:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & z \text{ 在第一象限,} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & z \text{ 在第二象限,} \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & z \text{ 在第三象限,} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & z \text{ 在第四象限.} \end{cases}$$

除 0 以外的复数都有确定的辐角. 0 的辐角可以是任意的.

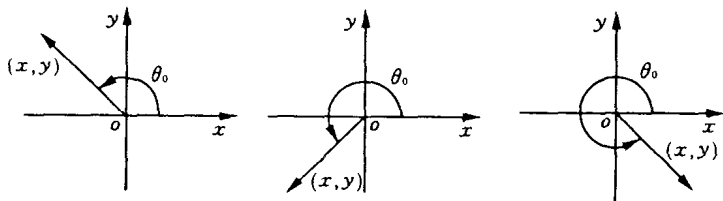


图 1.2

3. 复数可以用向量表示, 是否就此可以认为复数的运算与向量的运算相同?

答 不能. 复数的运算与向量的运算有相同之处也有不同之处.

如复数运算与向量运算有相同的加法运算和数乘运算, 但向

量运算有数量积、向量积和混合积,复数则没有;复数运算有乘、除、乘幂和方根,向量也没有.复数相乘的几何意义是将复数 z_1 放大 $|z_2|$ 倍,再将其辐角按逆时针方向旋转角度 $\text{Arg} z_2$,即先作一个相似变换,再作一个旋转变换,而向量的数量积与向量积都不是这样的.

4. 怎样理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式?

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2, \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2.$$

答 由于上述两个公式两边的辐角都有无穷多个值,因此等式的意义是:任意给定一个等式右边两个多值函数一对可能取的值,右边多值函数也必有一个值使这个等式成立.反之也是这样.

也就是说,等式的值是在全体意义上的相等,而不是某一组值的相等.例如,若 θ_1 和 θ_2 为 $\text{Arg} z_1$ 和 $\text{Arg} z_2$ 的任一对选定值,则 $\text{Arg}(z_1 z_2)$ 中一定有一个 θ 存在,使 $\cos \theta = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $\sin \theta = \sin(\theta_1 + \theta_2)$. θ 不一定是 $\theta_1 + \theta_2$,而可以是使 $\theta + 2k\pi = \theta_1 + \theta_2$ 中的一个.反之也是这样.

5. 复数所具有的运算性质是否使复数集合成为复数域?

答 是.复数的运算具有以下规律:

- (1) 若 z_1, z_2 是复数,则 $z_1 + z_2$ 也是复数.
- (2) 满足对加法的结合律与交换律,即对于复数 z_1, z_2, z_3 ,有 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- (3) 关于加法存在零元素,对于任意复数 z ,有

$$0 + z = z + 0 = z.$$

- (4) 关于加法存在逆元素.对于任意复数 z ,存在复数 $-z$,使 $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

- (5) 若 z_1, z_2 是复数,则 $z_1 z_2$ 也是复数.

- (6) 满足对乘法的结合律与交换律,即对于复数 z_1, z_2, z_3 ,有

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

- (7) 关于乘法存在单位元素 1,对于任意复数 z ,有

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z.$$

(8) 关于乘法存在逆元素. 对于任意复数 $z \neq 0$, 存在复数 $\frac{1}{z}$, 使

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1.$$

(9) 满足对加法与乘法的分配律, 即对于任意复数 z_1, z_2 和 z_3 , 有

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

所以, 全体复数构成一个复数域.

方法、技巧与典型例题分析

首先, 作为基本概念, 要熟悉复数的各种表示形式及相互转换, 特别是辐角主值的确定. 其次, 复数运算必须遵循复数的运算规律, 注意复数运算与实数运算的不同点.

一、复数的概念

例 1 求下列复数的模与辐角:

$$(1) \sqrt{3} + i; \quad (2) \frac{1}{3 + 2i};$$

$$(3) \frac{(3 + 4i)(2 - 5i)}{2i}; \quad (4) \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n;$$

$$(5) i^8 - 4i^{21} + i; \quad (6) \frac{(3 + i)(2 - i)}{(3 - i)(2 + i)}.$$

解 (1) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2,$

$$\arg z = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \frac{1}{3 + 2i} = \frac{3 - 2i}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3}{13} + \left(\frac{-2}{13} \right) i,$$