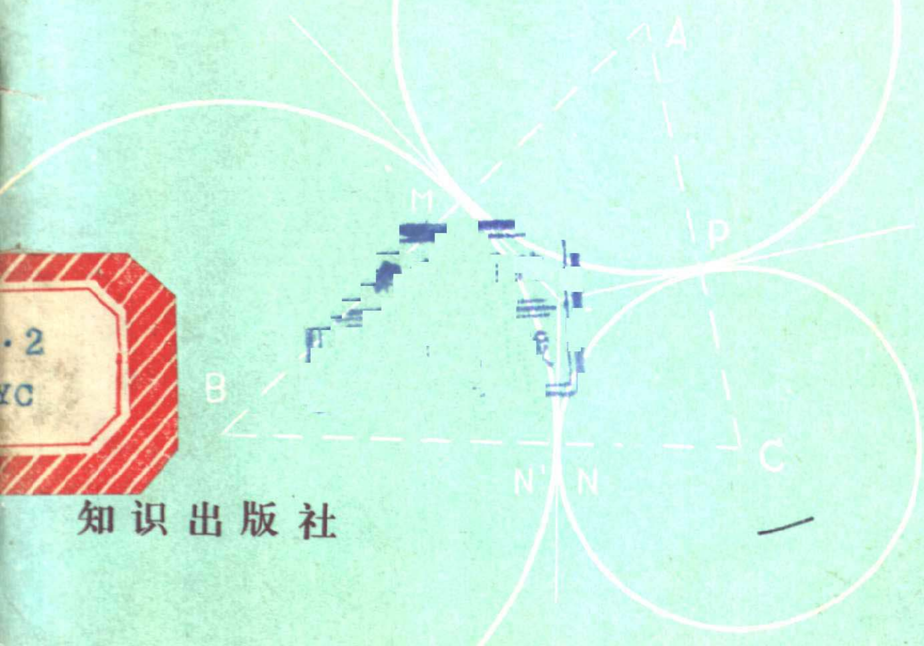
HONGXUE SHUXUE ZONGHETI XUANJIANG

中学数学综合题

选讲

朱尧辰著



知识出版社

中学数学综合题选讲

朱 尧 辰 著

知 识 出 版 社

内 容 提 要

数学综合题是培养中学生综合运用数学知识的一种练习题。这种题由于灵活多变，解题难度较大。作者根据多年教学经验，选择各种典型的例题，介绍一些解题的常用技巧。读者通过这些解题方法可以提高综合运用数学知识的能力。全书安排例题和练习题 221 则，对难度大的例题有提示题解。

中学数学综合题选讲

朱尧辰　著

知识出版社 出版

总社：北京安外外馆东街甲一号

中国青年出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32　印张 2.75　字数 57,000

印数：100,001—600,000　　定价 0.24 元

1980 年 3 月北京第一版　　1980 年 5 月北京第二次印刷

书号：7214·3

目　　录

一、引　　言

§1. 什么是数学综合题

学数学，要做到概念清楚、计算熟练、推理正确，不做一定数量的题是不行的。我们在学习中会遇到各种各样的题。总的说来，不外乎计算和论证两大类或两者兼而有之。从题的目的和复杂程度来看，又大致可分为三种类型：

（1）概念性的思考题。其主要目的是帮助我们理解新接触到的或较难理解的定义、定理及其他命题。

（2）基本训练题。主要是比较单一的或不复杂的计算题、证明题（包括简易几何作图题）。它们通常是为了使学习者巩固基本数学知识和掌握解题的基本技能。这种题是大量的，经常出现在各种数学教科书中。

（3）综合题。这种题常常涉及数学的不同分支或同一分支的多个方面的知识，要应用多方面的知识和技巧才能解决，其难度远远超过基本训练题。这种题有助于我们将所学的数学知识融会贯通，起到复习、提高的作用，也有利于培养综合运用知识的能力。

下面是三个常见的综合题的例子。

（问题1）　四个整数组成算术数列，其中第一数与第四数的积等于方程

$$x^{1+\lg x}=0.001^{-\frac{2}{3}}$$

的大根；第二数与第三数的平方和是

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+x^{\frac{1}{6}}\right)^{20}$$

展开式中不含 x 的项的项序数之5倍。求这四个数。

这种问题具有比较明显的“人为”的痕迹，往往容易想出解题的途径。

（问题2） 如果方程（x是未知数）

$$x^4+2x^2\cos\theta+\sin^2\theta=0$$

有相异的四个根，求 θ 的范围。

这种问题要比问题1显得“自然”些，而且解题的途径也不太明显。

（问题3） △ABC中，$\angle B=k\angle C$，$k>1$，求证 $AC<k\cdot AB$。

这是一种“隐蔽”的综合题，因为它的综合性表现在解法之中。一般说，这种题难度较大。

§2. 怎样着手解数学综合题

解数学题本来就没有一定之规，综合题千变万化，解法灵活，更不能墨守成规。值得注意的是下列几点：

（1）要弄清题目涉及的有关概念，熟悉它涉及的数学分支的常用定理、公式、方法、技巧。也就是说，必须以一定的基本训练为基础。

（2）要剖析综合题的结构，找出题目的主要环节和次要环节，弄清它们之间的相互关系。

（3）推测、尝试可能的解题途径。若题中条件隐晦、迂回因而看不清解题途径时，应设法创造条件、化暗为明。

（4）必要时，可揣摩范例，比较范例与题目的异同，

以收触类旁通之效。

另外，还应注意积累点滴经验，及时总结心得，这样，天长日久，自然熟能生巧。

二、综合题技巧方法选讲

§1 凑项与配方

凑项与配方是因式分解中常用的技巧。配方技巧不仅在因式分解中有用，而且用于许多其他问题（见例4,9,10,12,15,等）。

〔例1〕 在有理数范围内分解a^5+a+1的因式。

〔解〕 a^5+a+1

$$
\begin{aligned}
&=a^5+a^4+a^3\\
&\qquad -a^4-a^3-a^2\\
&\qquad\qquad +a^2+a+1\\
&=a^3(a^2+a+1)-a^2(a^2+a+1)+(a^2+a+1)\\
&=(a^3-a^2+1)(a^2+a+1)
\end{aligned}
$$

由因式定理可知最后这两个因式在有理数范围内都不能分解。

〔例2〕 在有理数范围内分解因式：

$$x^4+y^4+(x+y)^4$$

〔解〕 因为

$$
\begin{aligned}
x^4+y^4&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\
&=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2\\
&=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2
\end{aligned}
$$

所以 $x^4+y^4+(x+y)^4$

$$=2\left[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2\right]$$

$$=2(x^2+xy+y^2)^2$$

【练习题】

1. 因式分解：

① $(x+y)^5-x^5-y^5$

② $x^6-2x^4y-11x^2y^2+12y^3$

③ $\{a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2\}^2$
$-4abc(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2)$

④ $x^2+2(a+b)x-(3a^2-10ab+3b^2)$

⑤ $(2x-7)(2x+5)(x^2-9)-91$

⑥ x^5+x^4+1

⑦ $x^3+y^3+z^3-3xyz$

§2 根式的化简

有理函数的一些运算技巧常常可应用于根式运算。

〔例3〕 设 $|x|\geq 2$， 化简

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

$$+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

〔分析〕 右边两个三次根号下的式子之和是有理式，乘积是1。应用公式

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

可使计算简化。

〔解〕 因为 $y^3 = x^3 - 3x + 3y$ 所以

$$(x-y)\left[\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(x^2-4)\right]=0$$

若 $|x|>2$，则中括号里的项 >0，所以得 $y=x$；若 $|x|=2$，则直接计算可得 $y=x$。合起来便知 $y=x$。

【练习题】

2. 证明 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$

3. 解方程 $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

〔例 4〕 证明

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$$

〔解〕 由配方知

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

同理

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$$

故得结果。

【练习题】

4． 化简：

① $\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$

② $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

5． x等于什么，下面的等式才能成立？

$$\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}-\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$$

〔例5〕 证明

$$\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$$

〔解〕 令$\alpha=\sqrt[4]{5}$ 于是$\alpha^4=5$

$$\frac{(\alpha+1)^4}{(\alpha-1)^4}=\frac{1+4\alpha+6\alpha^2+4\alpha^3+\alpha^4}{1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4}=\frac{3+2\alpha+3\alpha^2+2\alpha^3}{3-2\alpha+3\alpha^2-2\alpha^3}$$

$$=\frac{3+2\alpha+\alpha^2(3+2\alpha)}{3-2\alpha+\alpha^2(3-2\alpha)}=\frac{(3+2\alpha)(1+\alpha^2)}{(3-2\alpha)(1+\alpha^2)}=\frac{3+2\alpha}{3-2\alpha}$$

故得结论。

【练习题】

6． 证明 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

7． 证明

$$\left(\sqrt[5]{\frac{32}{5}}-\sqrt[5]{\frac{27}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[5]{\frac{1}{25}}+\sqrt[5]{\frac{3}{25}}-\sqrt[5]{\frac{9}{25}}$$

8． 设 $m\neq n$，$mn\neq 0$，$a>1$。

设 $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$ 求

$$y=\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

的值。

§3 单位根的应用

记 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，那么$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$。1，$\omega$，$\omega^2$是方程

$$x^3=1$$

的三个根。ω有下列基本性质：

$$1+\omega+\omega^2=0,\quad \omega^{3n}=1,\omega^{3n+1}=\omega,\omega^{3n+2}=\omega^2,$$

其中n为任意整数。利用这些性质可使某些计算简化。

〔例6〕 计算

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6-\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^6$$

〔解〕

$$原式=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^6-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^6=\frac{1}{i^6}\omega^6-\frac{1}{i^6}(-\omega^2)^6$$

$$=0$$

【练习题】

9． 计算

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{\sqrt{3}i-1}$$

10． 证明

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega y)$$

11． 如果

$$x=a+b,\ y=a\omega+b\omega^2,\ z=a\omega^2+b\omega,$$

求证

$$xyz=a^3+b^3, x^2+y^2+z^2=6ab, x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$$

〔例7〕 设

$$(1+x+x^2)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{2n}x^{2n}$$

则 $c_0+c_3+c_6+\cdots=c_1+c_4+c_7+\cdots=c_2+c_5+c_8+\cdots$

$$=3^{n-1}$$

〔分析〕 $x=\omega$时，$(1+x+x^2)^n=0$.因而由ω^n的周期性，可得$c_0+c_3+c_6+\cdots$，$c_1+c_4+c_7+\cdots$与$c_2+c_5+c_8+\cdots$间的关系式。

〔证明〕 记$f(x)=(1+x+x^2)^n$

1） 因$f(\omega)=0$，又$f(\omega)=A+B\omega+C\omega^2$，其中

$A=c_0+c_3+c_6+\cdots$，$B=c_1+c_4+c_7+\cdots$，

$C=c_2+c_5+c_8+\cdots$

于是$A+B\omega+C\omega^2=0$。利用$\omega^2=-1-\omega$，它化成

$$(A-C)+(B-C)\omega=0$$

若$B-C\neq 0$，则$\omega=-\dfrac{A-C}{B-C}$，此不可能。所以$B-C=0$从而$A=B=C$。

2） 因$f(1)=3^n$，即$A+B+C=3^n$，于是

$$A=B=C=\frac{1}{3}f(1)=3^{n-1}$$

【练习题】

12． 设

$$(1+x)^{3n}=c_0+c_1x+\cdots+c_{3n}x^{3n}$$

则

$$c_1+c_4+c_7+\cdots=c_2+c_5+c_8+\cdots=$$
$$(-1)^{3n+1}+c_0+c_3+\cdots=\frac{1}{3}[2^{3n}+(-1)^{3n+1}]$$

〔例8〕 设$1,\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda$是$x^n=1$的n个根，则

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots(1-\lambda)=n$$

〔证明〕 因为

$$x^n-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda)$$

所以

$$(x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

令$x=1$ 即得欲证。

【练习题】

13. $\alpha,\beta,\cdots,\lambda$之意义同例8，求

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\beta}+\cdots+\frac{1}{1-\lambda}$$

14. 如$a,b,\cdots,k$是方程

$$x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

的全部根，求证

$$(1+a^2)(1+b^2)\cdots(1+k^2)=(1-p_2+p_4-\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5--\cdots)^2$$

§4 巧设辅助元

解方程中常用的一种技巧是适当的设辅助元。下面的例子和练习题表明因式分解和比例性质常常用来发现辅助元。

〔例9〕 解方程

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$$

〔分析〕 注意到 $\sqrt{x^2+7x}=\sqrt{x(x+7)}$，所以想到要凑出$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})^2$。

〔解〕 方程本身给出$x\geq 0$，$x+7\geq 0$。将方程改写为

三

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x+7})+(x+2\sqrt{x}\sqrt{x+7}+x+7)-42=0$$

令$y=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$，则得

$$y^2+y-42=0$$

由此容易求出方程的一切根。(其余部分从略)

【练习题】

15. 解方程

$$32x^4-48x^3-10x^2+21x+5=0$$

16. 解方程

$$x^4-12x+323=0$$

〔例10〕 解方程组

$$\begin{cases} x^4+y^4=272 \\ x-y=2 \end{cases}$$

〔分析〕 直接代入会导致高次方程，因此联想起用例2的方法。

〔解〕 令$x-y=u, xy=v$,则原方程组化为

$$\begin{cases} (u^2+2v)^2-2v^2=272 \\ u=2 \end{cases}$$

(其余部分从略)

〔注〕 另一种解法：设$x=u+v, y=u-v$,则有

$$x^4+y^4=2(u^4+6u^2v^2+v^4)$$

【练习题】

17. 解方程组：

① $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ y^2+2xy-8y+1=0 \end{cases}$

② $\begin{cases} y+z=5 \\ x+yz=10 \\ xyz=24 \end{cases}$

〔例11〕解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=13 \end{cases}$$

〔分析〕　方程本身决定了x,y必须同号。为消去根号，令$x=\lambda^2 y$，于是从（1）可求出λ。

（具体解法从略）

〔注〕　另外几种解法：

1）把原方程组化为

$$\begin{cases} (9x-4y)\ (4x-9y)\ =0 \\ x+y=13 \end{cases}$$

2）从方程本身知$x>0,y>0$。从（1）可求得

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{13}{6}$$

故可求出xy。

【练习题】

18．解方程组

① $\begin{cases} \dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{y+z}{a} \\ \dfrac{y-z}{y+z}=\dfrac{a-b}{a+b} \\ x+y+z=a+b \end{cases}$　　② $\begin{cases} 9x+y-8z=0 \\ 4x-8y+7z=0 \\ xy+yz+zx=47 \end{cases}$

③ $\begin{cases} (x+2y+3z)\ (3x-y+z)=56 \\ (2x-3y+5z)\ (3x-y+z)=44 \\ (3x+4y-2z)\ (3x-y+z)=20 \end{cases}$

④ $\begin{cases} yz=a\ (x+y+z) \\ zx=b\ (x+y+z) \\ xy=c\ (x+y+z) \end{cases}$

19．解方程

① $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$

② $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

③ $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$

④ $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$（n为正整数）

⑤ $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{3}{x-5}=0$

〔例12〕解方程组

$$\begin{cases} x+\sqrt{x}\ \sqrt{y}+y=1 & (3) \\ 7x+4\sqrt{x}\ \sqrt{y}-y=2 & (4) \end{cases}$$

〔解〕 $(4)+k\times(3)$ 得

$$(7x+4\sqrt{x}\ \sqrt{y}-y)+k\ (x+\sqrt{x}\sqrt{y}+y)$$
$$=2+k$$
$$(7+k)x+(4+k)\ \sqrt{x}\ \sqrt{y}+(k-1)y$$
$$=2+k \qquad (5)$$

选取参数k，使上式左边成为$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$ 的完全平方，为此只须它的判别式

$$\triangle=(4+k)^2-4(7+k)(k-1)=0$$

由此得 $k=2$，$-\dfrac{22}{3}$，将它们代入（5），得等价方程组

$$\begin{cases} 9x+6\sqrt{x}\ \sqrt{y}+y=4 \\ -\dfrac{x}{3}-\dfrac{10}{3}\sqrt{x}\ \sqrt{y}-\dfrac{25}{3}y=-\dfrac{16}{3} \end{cases}$$