2004年 高考第二轮复习丛书

名校名社倾力合作 · 权威老师亲自撰写

数学

商务印书馆教育图书研究出版中心 编
储瑞年 撰

一线教学的实践积累
全国讲学的经验总结

- 把握高考方向
- 解析考试说明
- 强化重点内容
- 构建知识网络
- 总结答题规律
- 提升应试水平

商务印书馆

2004年高考第二轮复习丛书

数　　学

商务印书馆教育图书研究出版中心　编
储瑞年　撰

商　务　印　书　馆
2003年·北京

图书在版编目(CIP)数据

2004年高考第二轮复习丛书.数学/商务印书馆教育图书研究出版中心编;储瑞年撰. —北京:商务印书馆,2003

ISBN 7-100-03981-9

Ⅰ.2… Ⅱ.①商…②储… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第096362号

2004年高考第二轮复习丛书

数 学

商务印书馆教育图书研究出版中心 编

储瑞年 撰

商 务 印 书 馆 出 版

(北京王府井大街36号 邮政编码 100710)

商 务 印 书 馆 发 行

北 京 冠 中 印 刷 厂 印 刷

ISBN 7-100-03981-9/G·610

2003年12月第1版　　开本 787×1092 1/16

2003年12月北京第1次印刷　　印张 $15\frac{3}{4}$

印数:10 000册

定价:20.00元

编者序言

创建于1897年的商务印书馆是我国历史最悠久的现代出版社。创建之初,就以编辑出版教科书为主业。近年来,商务印书馆在大力发展优势出版方向的同时积极恢复教育图书出版传统,组建了“商务印书馆教育图书研究出版中心”和教育图书编辑室,并延请一批专家学者作为特聘研究员。去年我们推出了由特聘研究员精心编撰的“2003年高考第二轮复习丛书”,面市后得到广大读者的厚爱,在此基础上我们编写了这套“2004年高考第二轮复习丛书”。

丛书共5册,包括语文、数学、英语、文科综合和理科综合。除文综和理综特别注重学科内及学科间的综合外,语、数、外各册也都强调学科知识的综合,充分体现《考试说明》所强调的在学科知识交汇点出题的高考命题方向。各册均着眼于归纳学科重点知识,构建学科及学科间的知识网络,重在探讨典型问题,力求通过分析一系列考试的重点、难点,总结复习应考的策略。全书讲、练结合,例题典型性强,练习题设题新颖,题目解析简明扼要,重在拓宽考生解题思路,增加解题技巧,全面提升思维、理解与综合运用所学知识的能力,在讲和练中把握答题规律,进而提高应试能力。书后附有四套模拟试题及答案。

鉴于上述编写思路,丛书有三大特色:

方向性——紧扣命题思路与原则,预测命题指向与规律;

针对性——体现高考的改革要求,兼顾考生的实际情况;

时效性——关注2004年高考热点问题,注重考生能力与素质训练。

参加丛书编写的专家,都是北京市有关重点中学的特、高级教师,多数曾参与过教育部考试中心有关高考课题的研究工作,是教育部新课程标准及教材研制人员,《考试》杂志编委,中央教育电视台《高考辅导》栏目主讲教师,清华同方教育科学院特聘专家。不仅多年在教学一线负责高三把关,而且长期在全国巡回讲学,具有辅导高考的实践积累和经验。尤为重要的是丛书全部由专家亲自撰稿,是作者本人几十年教学的研究与总结,具有较高的水平。

丛书是2003年高考结束后根据最新材料开始撰写的,尽管我们字斟句酌地精心编稿,但由于时间仓促,其中不尽人意之处仍在所难免,希望读者不吝赐教,以待再版时修改。

商务印书馆

教育图书研究出版中心

2003年10月

前　言

1999 年 2 月教育部颁布《关于进一步深化普通高等学校招生考试改革的意见》，确定高考改革的指导思想是在改革中始终坚持有助于高等学校选拔人才，有助于中学实施素质教育、有助于高等学校扩大办学自主权的三项原则，开始“$3+x$”的改革试验。

几年来，高考内容进行了一系列的改革。首先是命题的指导思想，转变传统的以知识立意的命题指导思想，确立“以能力立意”的命题指导思想，更加注重考查考生进入高等学校继续学习的潜能，注重考查考生的基础文化素质和创新能力。同时增加综合性、应用性内容，注意知识的互相交叉和渗透，不过分强调学科知识内容的覆盖率，创设一些相对新颖的情境，考查考生在不同情境下利用已有知识的创新能力。

数学是中学的基础学科，数学高考强调数学的基础性，通用性和工具性，突出综合能力和素质要求。2000 年教育部考试中心对《数学科考试说明》作了重要的修订，提出了体现高考改革的指导思想的命题原则。

1. 对数学基础知识的考查，要求全面又突出重点，注重学科的内在联系和知识的综合。重点知识是支撑学科知识体系的主要内容，考查时要保持较高的比例，并达到必要的深度，构成数学试题的主体。学科的内在联系，包括代数、立体几何、平面解析几何三个分科之间的相互联系及在各自发展过程中，各部分知识间的纵向联系。知识的综合性，则是从学科的整体高度考虑问题，在知识网络交汇点设计试题。

2. 数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括，它蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中。因此，对于数学思想和方法的考查必然要与数学知识的考查结合进行，通过数学知识的考查，反映考生对数学思想和方法的理解和掌握程度。考查时，要从学科整体意义和思想含义上立意，注意通性通法，淡化特殊技巧，有效地检测考生对中学数学知识中所蕴涵的数学思想和方法的掌握程度。

3. 对能力的考查，是以思维能力为核心，全面考查各种能力，强调探究性、综合性、应用性，切合考生实际。运算能力是思维能力和运算技能的结合，它不仅包括数的运算，还包括式的运算，对考生运算能力的考查主要是以含字母的式的运算为主，同时要兼顾对算理和逻辑推理的考查。空间想象能力是对空间形式的观察、分析和抽象的能力，图形的处理和图形的变换都要注意与推理相结合。解决实际问题的能力是上述三种基本数学能力的综合体现。对数学能力的考查要以数学基础知识、数学思想方法为基础，加强思维品质的考查。对数学应用问题，要把握好提出问题所涉及的数学知识和方法的深度和广度，切合中学数学教学实际。

4. 数学科的命题，在考查基础知识的基础上，注意数学思想和方法的考查，注重对数学能力的考查，在强调综合性的同时，重视试题的层次性，合理调控综合程度，坚持多角度、多层次的考查。

如何提高高中数学总复习的针对性和实效性，是广大师生十分关注的问题。根据各地组织高中数学总复习的实践，大体分为三个阶段：第一轮是全面、系统复习；第二轮是构建知识网络和进行专题研究；第三轮是组织模拟考试。

为给高考备考的考生和教师提供在全面、系统复习高中教学知识的基础上，进行专题复习、构建知识网络以及复习数学高考中的重点问题和热点问题，更好把握分析和解决数学问题中的思维方法，并进行有效的针对性训练，本书2003年版在知识网络篇中选择了函数、方程、不等式；函数与数列；平面向量、函数图像、方程曲线；空间图形与平面图形；三角函数与三角变换等五个专题。在专题研究篇中选择了代数证明题；最值问题与定值问题；应用问题；参数问题；探究性问题等五个专题。2004年的数学高考，全国将有25个省份使用新课程卷，为此我们对2003年版进行了较大的修订与补充，将向量、概率与统计、导数的相关内容增补到各个专题之中，使之涵盖新课程卷的全部内容，更加贴近新课程卷的考查要求。在模拟试题篇中编选了三套模拟试题。

本书的编写原则是：释析考试说明，强化重点知识，构建知识网络，探索思维规律，提升能力水平，培养数学素养。

本书力求体现高考改革的精神和要求，体现数学高考的命题思路和原则；针对数学高考的各项要求，针对考生的实际情况；内容精选，题量适当，注重克服"题海战术"和"大运动量重复训练"的弊端。

本书在编写过程中得到了著名特级教师王人伟先生的支持，他为本书精心编撰了数学高考模拟试题，在此谨表衷心感谢。编写中还得到了我的同事谢谨、王江慈、徐娅、李青霞、黄晖等老师的大力帮助，也在此表示诚挚的感谢。

由于编写时间比较紧促，作者水平有限，难免有许多不妥之处，望得到读者的批评指正。

北京师范大学附属实验中学
储 瑞 年
2003.8

《语文》撰稿人

王大绩（北京市陈经纶中学语文特级教师）

《数学》撰稿人

储瑞年（北师大附属实验中学数学特级教师）

《英语》撰稿人

范存智（北大附中英语高级教师）

《文科综合》撰稿人

王　旭（北师大附属实验中学地理高级教师）

王富友（北京市东城区教研中心历史特级教师）

王　斌（北师大附属实验中学政治高级教师）

王　韬（北师大附属实验中学地理高级教师）

《理科综合》撰稿人

王永惠（北京八中生物特级教师）

王　勇（人大附中生物特级教师）

刘千捷（北京八中物理特级教师）

郑忠斌（北京八中化学特级教师）

扈之霖（北京市陈经纶中学物理特级教师）

目　录

第一篇　知识网络篇

第二篇　专题研究篇

第三篇　模拟试卷篇

第一篇　知识网络篇

对数学基础知识的考查，要求全面又突出重点，注重学科的内在联系和知识的综合．重点知识是支撑学科知识体系的主要内容，考查时要保持较高的比例，并达到必要的深度，构成数学试题的主体．学科的内在联系，包括代数、立体几何、平面解析几何三个分科之间的相互联系及在各自发展过程中，各部分知识间的纵向联系．知识的综合性，则是从学科的整体高度考虑问题，在知识网络交汇点设计试题．

——摘自普通高等学校招生全国统一考试数学科考试说明

第一讲　函数、导数、方程、不等式

概　述

函数、导数、方程、不等式都是高中数学的重要内容，也是历年数学高考的考查重点．函数、导数、方程、不等式的知识和方法相互联系、相互交叉、相互渗透、相互为用，网络的结构特征十分明显．

高中数学中，方程一般都可以表示为 $f(x)=0$，或 $f(x)=g(x)$ 的形式，不等式一般都可以表示为 $f(x)>0$ 与 $f(x)<0$，或 $f(x)>g(x)$ 与 $f(x)<g(x)$ 的形式，其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 x 的函数．方程与不等式的归类取决于函数的归类；方程与不等式的变换、求解以及分类讨论的过程，不等式证明的过程，都需要正确应用函数的概念和性质；需要借助于函数的图像及其变换，对方程的解集、不等式的解集作出有效的几何解释．由此可见，函数的知识和方法是分析和解决有关方程和不等式问题的基础．反之，方程和不等式的知识和方法在分析和解决有关函数的问题中，也发挥着重要的工具作用，求函数的解析表达式常采用的待定系数法，实际上就是布列方程并解方程的过程．函数的通性之一是单调性，函数的单调性的判定和证明，方法之一就是从 $x_1<x_2$ 这一不等式出发，判定或证明 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）这一不等式一定成立．

导数是对函数理论的进一步充实与提高，导数用以研究函数的变化率，进而解决函数的单调性，极值与最值的有关问题．对于可导函数 $f(x)$，判断其单调性就是判断不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$；求函数的极值就需解方程 $f'(x)=0$，可见导数与函数、方程，不等式的关系也是十分密切的．

基于函数、导数、方程、不等式形成知识网络，近几年的数学高考试题中，有关函数、导数、方程、不等式的综合题出现的频率很高，需认真研究，寻求对策，提高思维能力和解题水平．

例题分析

一、函数的三“要素”与方程、不等式的关系十分密切

函数的三要素是对应法则、定义域和值域．函数 $y=f(x)$ 中，x 与 y 的对应关系可采用解析法、列表法、图像法等表示形式，其中解析法应用最普遍，函数的解析表达式的确定常采用待定系数法——布列各系数的方程（组）并求解．函数的定义域的确定，常采用解不等式（组）的方法；而函数的值域的确定的基本方法是由自变量 x 所满足的不等式，通过变换，导出因变量 y 所满足的不等式．

例 1　求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-x^2)$ 的定义域和值域．

【解】 解不等式 $4x-x^2>0$，得 $0<x<4$.

当 $0<x<4$ 时，$u=4x-x^2=-(x-2)^2+4\leqslant 4$（当且仅当 $x=2$ 时取等号），可知 $0<u\leqslant 4$.

由于函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 是 $(0,4]$ 上的减函数，因此，$-2=\log_{\frac{1}{2}}4\leqslant y<+\infty$.

综上可知，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-x^2)$ 的定义域是区间 $(0,4)$，值域是 $[-2,+\infty)$.

【点评】 解关于 x 的不等式是求函数 $y=f(x)$ 的定义域的基本方法，而通过不等式的变换，是由定义域求值域的基本途径.

例 2 已知 $y=f(x)$ 是 x 的二次函数，$f\left(-\dfrac{3}{2}+x\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}-x\right)$，$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=49$，且方程 $f(x)=0$ 的两实根之差等于 7，求此二次函数的解析式.

【分析】 二次函数的解析式有三种表示形式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；$f(x)=a(x-m)^2+n\ (a\neq 0)$，其中 (m,n) 是其图像——抛物线的顶点坐标；$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$，其中 x_1，x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两根. 求二次函数的解析式，就要用待定系数法，分别求 a、b、c，或 a、m、n，或 a、x_1、x_2 的值.

【解法一】 设 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

由 $f\left(-\dfrac{3}{2}+x\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}-x\right)$ 知，$y=f(x)$ 的图像对称轴是直线 $x=-\dfrac{3}{2}$，即 $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2}$ ①

这时 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ 的值就是图像顶点纵坐标，即 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=49$ ②

又方程 $f(x)=0$ 两根之差 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$，依题意 $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=7$ ③

∵ 方程 $f(x)=0$ 有两实根，$b^2-4ac>0$.

∴ 由②知 $a<0$，由①，②，③联立的方程组可化简为

$$\begin{cases} b=3a \\ b^2-4ac=-196a \\ \sqrt{b^2-4ac}=-7a \end{cases}$$

解得 $a=-4$，$b=-12$，$c=40$.

∴ 所求二次函数解析式是 $y=f(x)=-4x^2-12x+40$.

【解法二】 由 $f\left(-\dfrac{3}{2}+x\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}-x\right)$ 知，$y=f(x)$ 的图像对称轴是直线 $x=-\dfrac{3}{2}$，即抛物线 $y=f(x)$ 的顶点横坐标为 $-\dfrac{3}{2}$；又由 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=49$ 知此抛物线顶点纵坐标为 49. 据此，设 $y=f(x)=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+49\ (a\neq 0)$.

解方程 $a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+49=0$ 得 $x_{1,2}=-\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{49}{a}}$

依题意 $|x_2-x_1|=2\sqrt{-\dfrac{49}{a}}=7$，解得 $a=-4$.

∴ 所求二次函数解析式是 $y=f(x)=-4\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+49=-4x^2-12x+40$.

【解法三】 由 $f\left(-\dfrac{3}{2}+x\right)=f\left(-\dfrac{3}{2}-x\right)$ 知，$y=f(x)$ 的图像的对称轴是 $x=-\dfrac{3}{2}$.

∵ 抛物线 $y=f(x)$ 与 x 轴两交点关于其对称轴对称，

∴　由方程 $f(x)=0$ 两根之差等于 7，可知两根是

$$x_1=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-5,\ x_2=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=2.$$

据此，设 $y=f(x)=a(x+5)(x-2)$.

由 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=49$，解得 $a=-4$.

∴　所求二次函数解析式是 $y=f(x)=-4(x+5)(x-2)=-4x^2-12x+40$.

【点评】　三种解法都是通过布列方程(组)，求得解析式中各项系数的值，从而得出结果. 由于解法二与解法三较为充分地利用了函数图像的特征，只需布列关于 a 的一元方程，便可求得结果，简化了运算过程，而解法一需布列关于 a,b,c 的三元方程组求解，运算量较大.

例 3　已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

【分析】　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，是指对一切 $x\in R$，$u=ax^2+2x+1$ 恒为正数，函数 $f(x)$ 都有意义.

函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，是指 $y=f(x)$ 可以取到一切实数值，其充要条件是 $u=ax^2+2x+1$ 可以取到一切正实数值(在一定条件下).

【解】　(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，即关于 x 的不等式 $ax^2+2x+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

若 $a=0$，不等式 $2x+1>0$ 的解集不是 $\mathbf{R}$，不合题意.

当 $a\neq 0$ 时，由二次函数的性质可知：不等式 $ax^2+2x+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件是

$$\begin{cases}a>0\\ \Delta=4-4a<0.\end{cases}\qquad 解得\ a>1.$$

∴　a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

(2) $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 的充要条件是 $u=ax^2+2x+1$ 中，u 的取值范围为 $\mathbf{R}^+$.

若 $a=0$，则 $u=2x+1$，当 x 的取值范围为 $\left(-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$ 时，u 的取值范围为 $\mathbf{R}^+$(如图 1-1).

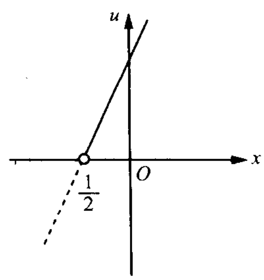

图 1-1

若 $a\neq 0$，则 $u=ax^2+2x+1$ 是 x 的二次函数，如图 1-2，u 的取值范围为 $\mathbf{R}^+$ 的充要条件是 $a>0$，取 $\Delta=4-4a\geqslant 0$. 解得 $0<a\leqslant 1$.

∴　a 的取值范围是 $(0,1]$.

【点评】　本题中函数 $f(x)$ 是整式函数 $u=ax^2+2x+1$ 与对数函数 $y=\lg u$ 的复合函数，依据一次(二次)函数与对数函数的性质沟通 $f(x)$ 的定义域、值域与参数 a 之间的联系，并通过列不等式和解不等式求解，体现了函数与不等式的交叉和渗透，以及相互为用的内在联系.

二、函数的性质与导数、方程、不等式相互交叉、相互渗透

函数的奇偶性是函数值所满足的一个特定的等量关系，函数的单调性或是不等式 $x_1<x_2$ 与 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$ 的转换关系；或是不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ 成立与否. 函数的性质的判定与证明，有赖于等式与不等式的判定与变换；反之，函数的性质又为等式与不等式的内容提供素材，相互交叉、相互渗透在相关的数学问题中十分

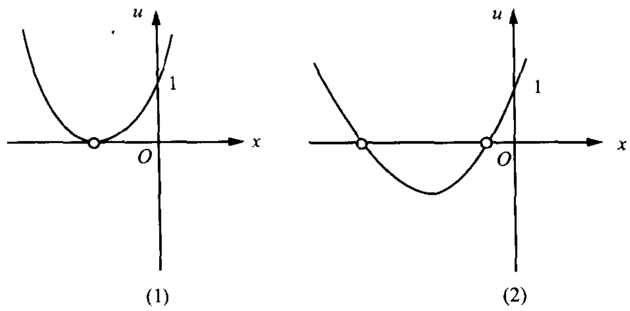

图 1-2

普遍.

例 4 设 $f(x)$是定义域为 **R** 的函数,$f(x+y)=f(x)+f(y)$对一切 x, $y\in$ **R** 都成立. 且当 $x>0$ 时,$f(x)<0$,则 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值是_________。

【分析】 题设条件中未给出函数 $f(x)$的解析表达式,因此需要由题设条件出发,探究函数$f(x)$的性质.

【解】 $\because$ 对一切 x, $y\in R$,$f(x+y)=f(x)+f(y)$恒成立.

$\therefore$ 令 $x=y=0$,可得 $f(0)=2f(0)$,即 $f(0)=0$.

由此可知 $f(x)+f(-x)=f(x-x)=f(0)=0$,即 $f(-x)=-f(x)$ $(x\in R)$恒成立. 函数 $f(x)$是奇函数.

任取 x_1, $x_2\in R$,且 $x_1<x_2$,则由 $x_2-x_1>0$,$f(x_2-x_1)<0$ 得

$f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2)-f(x_1)<0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$. 因此,$f(x)$是 R 上的减函数,$f(x)$在$[a, b]$上的最大值是 $f(a)$.

【点评】 由题设条件中的等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$导出函数 $f(x)$的奇偶性;又由题设条件中的不等关系导出函数 $f(x)$的单调性,是求解过程中的两个关键步骤. 体现了等式与不等式变换的解决函数问题的工具作用.

例 5 设 $a>0$,求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)(x\in(0,+\infty))$的单调区间.

【分析】 若依据函数单调性的定义,从 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$ 出发,推断 $f(x_1)<f(x_2)$或 $f(x_1)>f(x_2)$成立的条件,则需处理根式与对数式的混合运算,既繁又难. 而从求导数入手,则由$f'(x)$的解析式只含根式与分式,进一步推求 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ 成立的条件,就会比较简单.

【解】 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)(a>0,x>0)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x+a}(a>0,x>0),$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x^2+2(a-2)x+a^2>0,\ f'(x)<0\Leftrightarrow x^2+2(a-2)x+a^2<0.$$

(1) 当 $a>1$ 时,对所有 $x>0$,恒有 $x^2+2(a-2)x+a^2>0$,即 $f'(x)>0$,此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增.

(2) 当 $a=1$ 时,对 $x\neq1$,有 $x^2+2(a-2)x+a^2>0$,即 $f'(x)>0$,可知 $f(x)$在$(0,1)$内单调递增,在$(1,+\infty)$内也单调递增.

又知函数 $f(x)$在 $x=1$ 连续,因此 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增.

(3) 当 $0<a<1$ 时,令 $f'(x)>0$,即 $x^2+2(a-2)x+a^2>0$,解得

$$x<2-a-2\sqrt{1-a},\text{或 } x>2-a+2\sqrt{1-a},$$

因此函数 $f(x)$在区间$(0,2-a-2\sqrt{1-a})$内单调递增,在区间$(2-a+2\sqrt{1-a},+\infty)$内单调递

增.

令 $f'(x)<0$,即 $x^2+2(a-2)x+a^2<0$,解得 $2-a-2\sqrt{1-a}<x<2-a+2\sqrt{1-a}$,

因此,函数 $f(x)$在区间$(2-a-2\sqrt{1-a},2-a+2\sqrt{1-a})$内单调递减.

【点评】 这是一个用导数的方法判定函数的单调区间的问题,解不等式 $f'(x)>0$ 与 $f'(x)<0$ 是求解的主要步骤,函数、导数、不等式的内在联系体现得清楚、突出,导数方法的优点也十分明显.

例 6 设 $a>0$,$f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,求 a 的值,并证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

【分析】 应先利用奇偶性提供的等式,布列关于 a 的方程,解方程求 a. 再依据函数单调性的定义,或导数的性质,证明 $f(x)$的单调性.

【解】 $\because$ $f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$\therefore$ $f(-x)=f(x)$,即$\dfrac{1}{ae^x}+ae^x=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$ $(x\in\mathbf{R})$.

整理得$\dfrac{(a^2-1)(e^{2x}-1)}{ae^x}=0$ $(x\in\mathbf{R})$,

解得 $a^2-1=0$

由于 $a>0$,因此 $a=1$.

由此可得 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}$.

证法一 任取 x_1, $x_2\in\mathbf{R}^+$,且 $x_1<x_2$,

可得 $f(x_2)-f(x_1)=\left(e^{x_2}+\dfrac{1}{e^{x_2}}\right)-\left(e^{x_1}+\dfrac{1}{e^{x_1}}\right)=(e^{x_2}-e^{x_1})\left(1-\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)$

$\because$ $e\approx2.71828>1,0<x_1<x_2$,

$\therefore$ $e^{x_2}-e^{x_1}>0$, $1-\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}>0$,可知 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore$ $f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}$在$(0,+\infty)$上是增函数.

证法二 由 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}(x>0)$,得 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$.

当 $x\in(0,+\infty)$时,有 $e^x>0,e^{2x}-1>0$,此时 $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上时增函数.

【点评】 解方程求 a,利用指数函数的性质及不等式的变换,证明 $f(x)$的单调性,是本题的两个主要步骤,体现了在分析和解决函数单调性问题的过程中,不等式的性质和不等式的变换以及导数都是不可缺少的基础知识和基本方法.

三、含字母系数的方程与不等式、函数及导数的知识与方法的相互联系与相互为用

含字母系数的方程与不等式的求解或解的讨论,函数式的大小比较,求函数的最大(小)值等,都是高中数学中常见的问题. 这些问题的思考、分析、求解都充分体现了函数及导数的知识与方法与不等式、方程的知识与方法的相互联系与相互为用.

例 7 关于 x 的方程 $\lg(ax)=2\lg(x-1)$,试求使方程有解的实数 a 的取值范围,并求方程的解.

【分析】 将关于 x 的对数方程转化为代数方程,并注意转化的等价性,是求解的基本思路.

【解】 原方程 $\Leftrightarrow\begin{cases}ax>0\\x-1>0\\ax=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0 & ①\\x>1 & ②\\x^2-(a+2)x+1=0 & ③\end{cases}$

$\because$ $a>0$,

$\therefore$ 方程③的判别式 $\Delta=(a+2)^2-4=a^2+4a>0$.

$\therefore$ 方程③有两个实根:

$$x_1=\frac{1}{2}(a+2-\sqrt{a^2+4a}),\ x_2=\frac{1}{2}(a+2+\sqrt{a^2+4a}).$$

$\because$ $a>0,\sqrt{a^2+4a}>\sqrt{a^2}=a$,

$\therefore$ $x_1<1,\ x_2>1$.

$\therefore$ 当 $a>0$ 时,原方程有惟一解:$x=\frac{1}{2}(a+2+\sqrt{a^2+4a})$.

【点评】 将 $\begin{cases}ax>0\\x-1>0\end{cases}$ 转化为与之等价的 $\begin{cases}a>0\\x>1\end{cases}$,对二次方程③的求解及解的取舍起了重要的作用.说明注意一个方程、不等式的混合组中,各方程与不等式的相互联结、相互制约十分必要,十分有效.

利用函数图像,可对方程有解的条件及解的惟一性作出有效的直观解释:原方程有解对应着函数 $y=ax(y>0)$ 与 $y=(x-1)^2(x>1)$ 的图像有交点.函数 $y=ax(y>0)$ 的图像是过原点的直线位于上半平面的部分,函数 $y=(x-1)^2(x>1)$ 的图像是顶点为 $(1,0)$ 的抛物线的右半支(不含顶点),如图 1-3,两图像有交点的充要条件是 $a>0$,这时交点惟一.

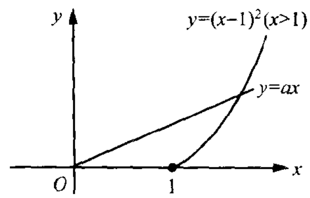

图 1-3

例 8 关于 x 的不等式 $x^2-\log_a x<0(a>0,\ a\neq1)$ 对满足 $0<x<\frac{1}{2}$ 的 x 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

【分析】 从解不等式 $x^2-\log_a x<0$ 入手是难以完成的,借助于图像的直观,有可能找到 $x^2-\log_a x<0$ 与 $0<x<\frac{1}{2}$ 的联系.

【解】 设 $f(x)=x^2,g(x)=\log_a x$. 依题意,当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 的图像应位于 $g(x)$ 图像的下方. 如图 1-4,$a>1$ 是不合题意的,若 $0<a<1$,则函数 $g(x)$ 的图像与直线 $x=\frac{1}{2}$ 的交点 A 应在函数 $f(x)$ 的图像与直线 $x=\frac{1}{2}$ 的交点 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 的上方或重合,即 $\log_a\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4}$.

解不等式组 $\begin{cases}0<a<1\\\log_a\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4}\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{16}\leqslant a<1$.

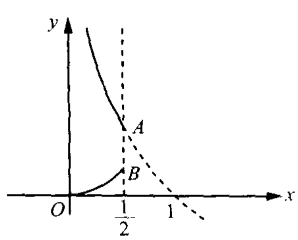

图 1-4

$\therefore$ a 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{16},1\right)$.

【点评】 作为一道填空题，用图像法对不等关系作出几何解释，可有助于题意的理解，有助于思路和方法的寻求，或直接求解.

例 9 设$0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，试比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

【分析】 由于当$0<x<1$时，在$0<a<1$与$a>1$的不同条件下，两个对数会取不同符号，采用求差比较法比较两绝对值的大小时，要注意分类讨论. 由于当$0<x<1$时，$1-x\neq 1$，$1+x\neq 1$，两对数值不为0，其绝对值必为正数，也可考虑选用求商比较法.

【解法一】（求差比较法）

由$0<x<1$可知，$0<1-x<1$，$1+x>1$.

当$0<a<1$时，$\log_a(1-x)>0$，$\log_a(1+x)<0$，

可得 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$.

$\because$ $0<1-x^2<1$.

$\therefore$ $\log_a(1-x^2)>0$，可知$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

当$a>1$时，$\log_a(1-x)<0$，$\log_a(1+x)>0$，

可得 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)$.

$\because$ $0<1-x^2<1$，

$\therefore$ $-\log_a(1-x^2)>0$，可知$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

综上可知：当$0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$时，$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

【解法二】（求商比较法）

由$0<x<1$可知，$0<1-x<1$，$1+x>1$，$\log_a(1-x)\neq 0$，$\log_a(1+x)\neq 0$.

可得 $\dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\dfrac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{1+x}(1-x)|=-\log_{1+x}(1-x)=-\log_{1+x}\dfrac{1-x^2}{1+x}=1-\log_{1+x}(1-x^2)$.

$\because$ $0<1-x^2<1$，$1+x>1$，

$\therefore$ $\log_{1+x}(1-x^2)<0$，可知$\dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}>1$

$\therefore$ $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

【点评】 比较函数值的大小是一类常见的问题，函数的性质是依据，不等式的变换是手段，求差（商）比较法是基本方法，需合理应用.

例10 已知a，b，$c\in\mathbf{R}^+$，且$a+b>c$，试比较$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$与$\dfrac{c}{1+c}$的大小.

【分析】 若将$\dfrac{a}{1+a}$与$\dfrac{b}{1+b}$通分求和，则和式的结构比较复杂，难以与$\dfrac{c}{1+c}$比出大小. 注意到$\dfrac{a}{1+a}$，$\dfrac{b}{1+b}$，$\dfrac{c}{1+c}$的结构相同，引入函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$并判定其单调性，就可由$a+b>c$，判断$f(a+b)$与$f(c)$的大小.

【解】 设函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}(x\in\mathbf{R}^+)$，则由$f(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+1}(x\in\mathbf{R}^+)$，又$y=\dfrac{1}{x}(x\in\mathbf{R}^+)$是减函数，且$y>0$，可知函数$f(x)$是$\mathbf{R}^+$上的增函数.

由$a+b>c$可知，$f(a+b)>f(c)$，即$\dfrac{a+b}{1+a+b}>\dfrac{c}{1+c}$.

$\because\ a,b\in\mathbf{R}^+,\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{a}{1+a+b}+\dfrac{b}{1+a+b}=\dfrac{a+b}{1+a+b}$,

$\therefore\ \dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}>\dfrac{c}{1+c}$.

【点评】 引入函数 $f(x)$，借助于 $f(x)$ 的单调性，由 $a+b>c$ 导出比较大小的结论，显示了函数与不等式的相互联系与相互为用．函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}(x\in\mathbf{R}^+)$ 的单调性出可用求导的方法加以判断：$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0(x\in\mathbf{R}^+)$ 恒成立．

例11 设 $a>0,a\neq1,\ b\in\mathbf{R}$，解关于 x 的方程 $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=b$.

【分析】 这是一个关于 x 的指数方程，应注意指数函数的定义域与值域的制约作用．

【解】 由于 $a>0,\ a\neq1$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$a^x+a^{-x}>0$ 恒成立

原方程 $\Leftrightarrow a^x-a^{-x}=b(a^x+a^{-x})\Leftrightarrow(1-b)a^x=(1+b)a^{-x}\Leftrightarrow(1-b)a^{2x}=1+b$ ①

当 $b=1$ 时，方程①无解；

当 $b\neq1$ 时，方程① $\Leftrightarrow a^{2x}=\dfrac{1+b}{1-b}$ ②

由于 $\dfrac{1+b}{1-b}=a^{2x}>0\Leftrightarrow-1<b<1$，于是

当 $-1<b<1$ 时，由②得 $x=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1+b}{1-b}$；

当 $b\leqslant-1$ 或 $b\geqslant1$ 时，方程②无解．

综上可知，当 $-1<b<1$ 时，原方程的解是 $x=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1+b}{1-b}$；当 $b\leqslant-1$ 或 $b\geqslant1$ 时，原方程无解．

【点评】 这是一个含字母系数 b 的指数方程，应按照分类讨论的要求，回答方程有解或无解的条件，并在有解时求出它的解．判断方程是否有解的依据恰是函数的性质．

例12 设 $a>1$，解关于 x 的不等式 $\log_2(x-1)>\log_4[a(x-2)+1]$.

【分析】 这是一个关于 x 的对数不等式，实施不等式的变换时，应注意对数函数的定义域和值域的制约作用．

【解】 由 $a>1$ 知：$0<\dfrac{1}{a}<1,\dfrac{2a-1}{a}=2-\dfrac{1}{a}>1$：

原不等式 $\Leftrightarrow\log_2(x-1)>\dfrac{1}{2}\log_2[a(x-2)+1]\Leftrightarrow2\log_2(x-1)>\log_2(ax+1-2a)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x>\dfrac{2a-1}{a}\\(x-1)^2>ax+1-2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2-\dfrac{1}{a}\\x^2-(2+a)x+2a>0\end{cases}\Leftrightarrow(\mathrm{I})\begin{cases}x>2-\dfrac{1}{a}\\(x-2)(x-a)>0\end{cases}$$

当 $1<a<2$ 时，不等式组 $(\mathrm{I})\Leftrightarrow(\mathrm{II})\begin{cases}x>2-\dfrac{1}{a}\\x<a\text{ 或 }x>2\end{cases}$

$\because\ 2-\dfrac{1}{a}-a=\dfrac{2a-1-a^2}{a}=-\dfrac{(a-1)^2}{a}<0$,

$\therefore\ 2-\dfrac{1}{a}<a$,

$\therefore$ 解不等式组(Ⅱ)得 $2-\dfrac{1}{a}<x<a$，或 $x>2$；