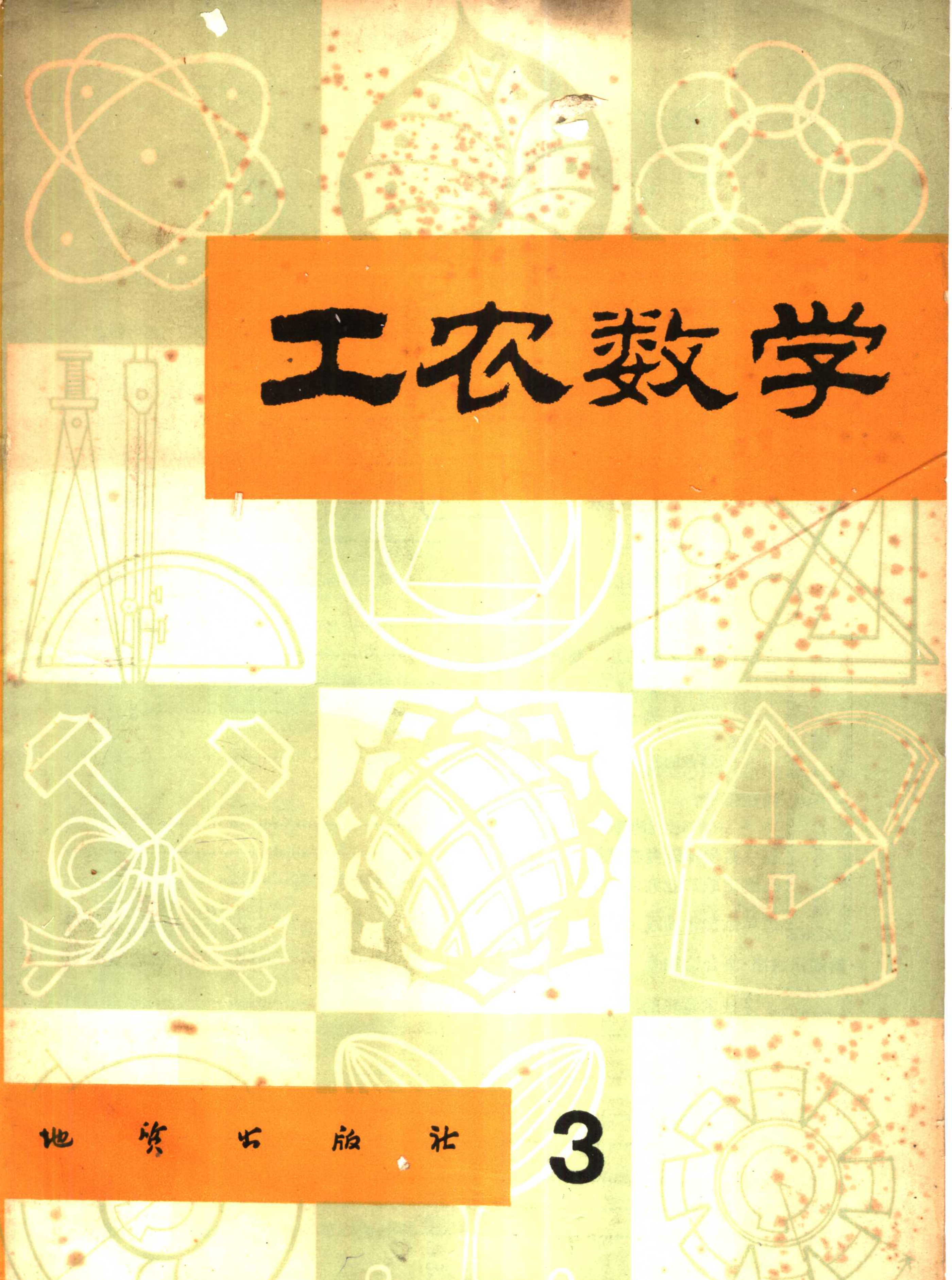


工农数学

地质出版社

3

封面题字　刘炳森
封面设计　关　明

欲知天下科学事请看《科学大观园》

本刊博采群芳，荟萃精华，主要是从全国科普报刊上精选较优秀的科普文章，去粗取精，摘要综合而成。内容丰富多彩，能启迪智慧，增进学科学的兴趣；文章短小精悍，新颖实用，使读者读起来省时省力，并能在短时间内获得较多的科学知识。本刊老少咸宜。所设主要栏目有："科学趣谈"、"科学与生活"、"健康顾问"、"病人之友"、"电子世界"、"科学实验"、"家庭小百科"、"农村园地"、"父母必读"、自然博物馆"、"食品集锦"、"金钥匙"和"科海珍奇"等，可常年翻阅，具有一定保存价值。本刊为双月刊(刊号2—267)，每逢单月出版，从1982年起，改为邮局征订、发行。印数有限，订阅从速。如一时向隅，订阅不到，可汇款到北京学院路西口魏公村大慧寺街1号科学普及出版社邮购部。

工农数学

第 3 辑

编　辑	工农数学编辑委员会 (北京西四地质出版社内)
出　版	地质出版社
印　刷	地质印刷厂
发　行	新华书店北京发行所发行 全国各地新华书店经售

书号：7038·新20　1981年12月20日出版　定价：0.20元

工农数学 3

目 录

刊头栏目设计 ……李培真 郭彦军 梁新民 关 明 李丽菡

"以旧引新"与"防旧扰新"

北京教育学院东城分院　　韩家渠

一、"以旧引新"

有经验的教师在数学教学中，常常善于让学员凭借他们已有的知识与技能来学习和掌握新的知识和技能，培养学员的能力和发展他们的智力．例如，通过复习一元一次方程的解法和二次三项式的因式分解，学员便能很自然、主动地学到一元二次方程的因式分解求根法，而无需老师多作讲解．

教学实践证明，如果老师能采用这种"温旧知新"、"以旧引新"的教法，往往能收到较好的效果．

一般说来，新旧知识的联系是多种多样的．在中学数学教学中，经常采用的"联系"有下列五种：

1．对比：按照某些本质的特征，对于两种不同的事物进行对比，往往能收到"以旧探新"，"以旧记新"的效果．在教法安排上，一般是先复习已学过的旧知识，然后再进行对比，学习新知识，并着重弄清它们的联系与区别．特别是"区别"，一定要搞透，因为正是这种"区别"，才标志着所学的知识是"新"知识．

例如，通过复习全等三角形的判定定理来学习相似三角形的判定定理，这两个定理的结构类似，对应角相等的条件是相同的，它们的主要区别在于对应边相等的条件变成了对应边成比例了．

在中学数学的教学中，运用"对比"进行"以旧引新"的内容是很多的．如，等式与不等式性质的对比；等差数列与等比数列的对比；排列与组合的对比；根式分母有理化与复数除法的对比；概率的加法与乘法的对比；直角坐标与极坐标的对比；数列的极限与函数的极限的对比，等等．

2．逆反：对于完全相反的问题，若将它们联系起来学习，就能达到加深理解数学知识和领会运用对立统一规律的目的．在教法安排上，一般先复习原来问题的解法，同时做反问题的练习，最后再针对反问题，提出一般概念，进行深入研究．

例如，在学习"不定积分"前，要先复习已知函数和求其导函数的问题，同时做反问题的练习，即给出较简单的函数式，要找出某个函数，使已知函数式是它的导函数．在此基础上，就可以引出一般的"原函数"概念来，进而学习"不定积分"的新知识．

在中学数学教学中，运用"逆反"进行"以旧引新"的内容也是很多的．如，乘方与开方；指数与对数；指数函数与对数函数；三角函数与反三角函数；已知方程画图象的问题与已知图形求方程的问题，等等．

3．推广：概念是发展的，所以，对于一个数学概念，注意它在前后阶段之间的联系，将有利于学习和掌握这个概念．在教法安排上，一般是先复习前一阶段的概念定义，并指出在新情况下这个定义的局限性，从而需要将原有概念加以扩充或推广．

例如，多项式的因式分解，怎样就算分解完毕了？随着数的范围的逐步扩大，前后就有三个不同的要求．举例来说，

$$a^4-4b^4=(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)\qquad\text{（在有理数范围）}$$

$$=(a^2+2b^2)(a+\sqrt{2}\,b)(a-\sqrt{2}\,b)\qquad\text{（在实数范围）}$$

$$=(a+\sqrt{2}\,bi)(a-\sqrt{2}\,bi)(a+\sqrt{2}\,b)(a-\sqrt{2}\,b).\qquad\text{（在复数范围）}$$

在中学数学教学中，运用推广进行"以旧引新"的内容也不在少数．如，角的概念的扩充；三角函数概念的推广；指数概念的普遍化等．

4．特例："推广"是从特殊到一般的联系，"特例"则是从一般到特殊的联系．在教法安排上，一般先做习题，然后指出某类题目在理论或实践上有特别的重要性，从而需要进行深入研究．

例如，在学会一般对数的概念和性质，掌握了换底公式之后，为了计算上的方便，就需要对以10为底的常用对数进行深入研究，直到学会查表计算为止．

在中学数学教学中，运用特例进行"以旧引新"的内容，除上面谈到的常用对数之外，在学完导数的一般概念和性质之后，还需要对初等函数进行深入研究，求出基本初等函数的导数，并列成公式表等．

5．转化：前面四种联系都是根据新知识的某方面特点去寻找单一的旧知识，从而实现"以旧引新"的

教法安排．在中学数学教学中．还有许多情形是运用几种旧知识来解决一个新问题的．我们将这种做法称为“转化”．在教法安排上，一般是一步接一步地来实现这个“转化”的全过程．例如，可以化成一元二次方程的分式方程求根问题，一般分成两步来实现“转化”：第一步，运用去分母的旧知识将分式方程转化为整式方程；第二步，求解这个一元二次方程并进行检验，从而求得原分式方程的根．

二、“防旧扰新”

在采用“以旧引新”的教法，提高教学效果的同时，应充分重视“防旧扰新”，否则已有的旧知识可能会对学习新知识产生消极影响．

1．名称类似或相同造成的干扰

有些概念的名称，不仅在日常生活中使用，在数学教学中也常使用．如果日常用语的含义和数学概念一致，就会有利于数学概念的学习；若不一致，则往往有碍于对数学概念的正确理解．例如，人们在日常生活中对“相反”的理解是两用的．象大与小，高与低，长与短，我们说它们表示的意义相反；象等边三角形与非等边三角形，正弦与非正弦，我们也说它们是相反的关系，后者是矛盾关系．在学习数学时，学员不懂得这种差别，往往认为“非正即负”，“不是大于就是小于”，此种错误认识，就是上述“干扰”造成的．

2．式子类似或相同造成的干扰

人们在思维过程中，经常运用演绎推理、归纳推理和类比推理这样一些推理形式，作为一个学员，他们往往会觉得类比推理比较简单，乐于接受和运用这种形式．但是，他们不懂得，类比推理得出的结论是否正确，还有待证明．因此，从式子的类似或相同出发，就容易造成错误的类比联想．

例如，$(a+b)^2=a^2+b^2$ 是由 $(ab)^2=a^2b^2$ 进行错误的类比联想得来的；$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ 和 $\lg(x+y)=\lg x+\lg y$ 则是由 $m(a+b)=ma+mb$ 进行错误的类比联想得来的．总之，都是滥用了数学中的分配律．

3．前阶段内容的共性对于后阶段学习的干扰

数学教材一般都是按照知识体系分阶段安排的，某些地方是传统的难点，不管哪位老师去教，或者哪个学员来学，这些地方都是“难点”．究其原因，一方面是这部分新知识本身的难度大；另一方面则是前阶段旧知识的某些共性对于后阶段学习新知识的干扰．“字母表示数”是教学中传统的难点之一．分析原因，一方面是问题本身的抽象性造成的；另一方面就是前阶段学习算术时的一些共性，在引进字母表示数以后就起了变化，不再是共性，而是个性了．如果学员的思想仍停留在算术阶段，就会出问题．例如，对于计算的结果，学员总习惯于答案是“得几”，对带字母的式子就觉得“不放心”．又如，学员往往认为 $-a$ 是一个负数．原因就在于引进字母表示数以前，学员从数的表达式的经验出发，总是将数的符号与数的绝对值分开考虑的，总是将数的“正”与“负”与它的表达式前的“+”与“-”号固定地联系在一起，因此，$-a$ 自然应当是一个负数了．

4．前阶段的教学措施对后阶段学习的干扰

这种情形一般都是由教师自己造成的，而不是出于知识本身的原因．比如，在前阶段教学中，教员为了简化，有时使用了一些省略术语或符号．如对一元二次方程的根，常常说，判别式大于零时有两个根；判别式等于零时有一个根；判别式小于零时没有根．在后来学习复数和代数基本定理时，这种说法就会造成干扰和障碍．

（上接第12页）

它与 Y 轴的交点到 X 轴的距离等于6，它与 X 轴的两交点间的距离等于2，且顶点在直线 $y=-x$ 上，求二次函数的表达式．

解：已知抛物线与 X 轴两交点间的距离为2，则这两交点的坐标可设为 $(m-1,\ 0)$，$(m+1,\ 0)$．

这样，函数的表达式为

$$y=a(x-m+1)(x-m-1),$$

即 $$y=a(x-m)^2-a.$$

$\because$ 抛物线顶点在直线 $y=-x$ 上，

$\therefore$ $-a=-m$

$$\Longrightarrow a=m.$$

故表达式化为 $y=a(x-a)^2-a$.

又它与 Y 轴的交点，根据已知应为 $(0,6)$ 或 $(0,-6)$．将 $x=0$，$y=6$ 代入上式，得

$$a^3-a=6,$$

即 $a^3-a-6=0$

$$\Longrightarrow (a-2)(a^2+2a+3)=0.$$

$\because$ $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$,

$\therefore$ $a-2=0$

$$\Longrightarrow a=2.$$

$\therefore$ 二次函数的表达为

$$y=2(x-2)^2-2,$$

即 $$y=2x^2-8x+6.$$

同理，将 $x=0$，$y=-6$ 代入上式后，还可得到另一解 $y=-2x^2-8x-6$.

二元一次方程组的教学

解法部分

北京海淀教师进修学校　　赵　大　悌

在讲解各种具体解法之前，首先应引导学员考虑一下：在已学过一元一次方程的情况下，遇到多元问题应怎么办?从而得出结论：应该“消元”，化多元为一元去解决．这样安排，不但使学员对如何解多元一次方程组有一个总的思路，而且对训练学员思考问题的方法也大有好处．

一、代入法

首先，讲清“代入”的意义，这是关键．可以结合实例先从方程组的概念和等量代换的公理去正面讲解．因为方程组中相同的未知数代表相同的数，所以可以用与一个未知数相等的式子去代替另一个方程中的同一个未知数．然后可以用形象的比喻，使学生对代入的认识更加具体化．如用$x+3y=8$表示一张五元币加上三张一元币等于八元，用$x=5y$表示一张五元币等于五张一元币，显然前者的一张五元币可以用五张一元币代替，表现在式子上就是$5y+3y=8$．最后，不妨用“挖了换”的口诀把代入的运算过程固定化．即把原来的未知数挖去，换上与它相等的式子．设计这样三步的用意是努力依照学员思维发展的规律来组织教学，使学员能较好地理解“代入”法的道理，并学会实际应用．

其次，再用“阶梯式”的题组，使学员掌握用代入法解方程组的技巧．例如，可以让学员独立解方程组：

$$\begin{cases}x+y=8,\\x=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x+2y=6,\\x=y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+4y=18,\\x=y+3;\end{cases}\quad\begin{cases}x+4y=18,\\x-y=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x+4y=18,\\2x-y=3.\end{cases}$$

学员作完后，教师应重点将最后一题作完，以使学员有一个完整的认识并掌握作题格式；同时还应总结出，为了进行代入，必须先用一个未知数表示另一个未知数．进而，再通过一组稍复杂的题目引导学员总结出，一般是先把系数比较简单的一个未知数用另一个未知数表示．最后再通过一组更复杂的题目，使学员达到基本掌握代入法的程度，并引导学员总结出代入法的一般步骤．这样安排，目的是使学员通过自己动手动脑去发现规律、概括方法，并在整个学习过程中始终处于主动和积极的思维活动之中．

在讲代入法的第一节课上，一般不出现方程组的检验问题；但作业中可留一个题要求学员检验．这样做，既有利于一节课突出一个重点，又可使学员有独立思考的余地．学员学过一元一次方程检验和方程组解的定义后，这种独立思考是完全必要和可能的．至于“检验”问题，可以在第二节课上通过讲评作业来讲述．

第二节课的教学目的应该是通过合理的教学步骤逐渐加大难度，使学员对代入法由初步掌握达到比较熟练掌握的程度．第一组练习可安排所有未知数系数均为整数但又不等于1的方程，以下依次安排涉及去分母和括号的、系数中含有分数与小数的、系数中含有字母的方程．

二、加减法

与代入法类似，应该按照知识的发展层次和学员思维的发展顺序，设计合理的教学过程，讲清加减法的道理和运用这一方法的解题步骤．这里，介绍一下我区一位老教师在教授加减法之前的一组预备性的练习题，即计算：

（1）$8+3$，$-5-6$，$8-10$，$7-8$；

（2）$6y+(-3y)$，$-8x+(-x)$，$-y-y-y$，$-x+3x$；

（3）
$$\begin{array}{r}8x+3y\\-)\ 2x+5y\\\hline\end{array},\quad\begin{array}{r}-6x+8y\\+)\ 6x-7y\\\hline\end{array},\quad\begin{array}{r}16x-6y\\-)\ 6x-7y\\\hline\end{array},$$
$$\begin{array}{r}6x-6y\\-)\ -18x-y\\\hline\end{array};$$

从这组题中可以看出，如果要消去一个字母时，它们的系数应具备什么特点?

（4）为了消去一个字母，下列各式中该用加法，还是减法?并进行计算．

$$\begin{array}{r}3x-y\\?)\ x+y\\\hline\end{array},\quad\begin{array}{r}6x-3y\\?)\ 6x-4y\\\hline\end{array},\quad\begin{array}{r}4x-y\\?)\ 5y-y\\\hline\end{array},$$
$$\begin{array}{r}5x-6y\\?)\ -5x-\ y\\\hline\end{array}.$$

有了这组练习作准备，再根据方程组中相同未知数代表相同的数，及方程组中各方程被认为是同时成

立的认识，以及“消元”的总思路，学员不难发现，可以用加减法来解三元一次方程组.

三、三元一次方程组

教材中安排这一内容是很有必要的．它不但把方程的知识从“元”的方向上再向前扩展一步，而且对于体现“消元”的方法极为有利.

教学中，最好能在学员掌握书本习题的基础上，再增加一些需要根据方程组特点找到特殊解法的三元一次方程组．如：

$$\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=5, \\ z+x=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{x+y}{2}, \\ x+y+z=18. \end{cases}$$

这些内容不但有利于培养学员的学习兴趣，更重要的是有利于提高学员的观察能力.

四、列方程组解应用问题

1．为了说明列方程组解应用题的优越性，可以把同一例题中一元一次方程、二元一次方程组的两种不同解法进行比较，从而说明，虽然后者的计算过程比较复杂，但思考方法却比较容易．体现了随着方法的发展，一部分思维过程被计算过程代替的特点．这正是方程组解法的优越性所在.明确所学知识的优点，自然会激发起学员更高的学习积极性.

2．从教材中的例题和习题来看,包括了“和倍问题”、“百分比问题”、“待定系数问题”等类型的应用题．分类型进行教学是可取的，因为同一类型问题有明显的共同特征，把它们集中讲解，更便于掌握．此外，由于特殊中包含着一般，所以掌握了一定量的类型后，更有利于掌握一般．因此，在分类教学的全过程中又应该时时抓住解应用题的一般规律——寻找等量关系，因为这是列各种方程的关键.

统编教材突出了找等量关系，是很好的，教学中应有意识地贯彻教材的意图.如工农业余中学初中《数学》第一册186页例4，可以大致按以下步骤进行教学：(1)理解题意：明确题目讲的是什么，其中已知、未知又分别是什么；(2)找等量关系：

混合前硫酸溶液的总重量 = 混合后硫酸溶液的总重量

混合前溶液中所含硫酸的重量 = 混合后溶液中所含硫酸的重量

（3）把上述等量关系由粗到细地用数学语言描述出来，就得到所需要的两个方程.(至于需要设什么未知数，该列哪些代数式，这在上述过程中可根据需要自然而然地得到解决.)将这一过程用下面的板书表示出来：

总　量 = 总　量

甲量 + 乙量 = 总量

$x \quad + \quad y \quad = \quad 300,$

总 含 量 = 总 含 量

甲含量 + 乙含量 = 总含量

$60\%x \ + \ 90\%y = 70\% \cdot 300$

这里需要说明的一点是：等量关系归根结底是逻辑学中的“同一律”，原则上任选题目中的一个量，令它“自身 = 自身”，然后从不同角度对等式两边给以解释，就可以得到一个方程．同一个问题可以列出各种各样的方程，只是有的简单，有的复杂而已．因此，解决具体问题时用什么等量关系来列方程，是应该经过一番选择的.

3．百分比问题是教学中的一个难点，其困难之处在于“看不清，摸不着”.为了克服这一困难，在教学中可做这样的演示：

（1）在盛有水的玻璃缸中放入一小段彩色粉笔，问学员其中含粉笔多少？(例如说20克．)然后往水缸内倒入一些水，再问学员其中含粉笔多少？(仍是那样多.)用以说明仅仅溶剂（水）变化时，所含溶质（粉笔）的量并没有改变，即“加水前含量 = 加水后含量”.

（2）把粉笔改为几滴蓝墨水，重复上述过程.

（3）把蓝墨水改为食盐，重复上述过程.

从后两次演示中，同样可以得出第一次的结论．这样，学员再遇到含量不变的问题时，就不会感到太抽象了.

安排以上三步演示的想法是,使学员从摸得着，看得见→摸不着，看得见→摸不着，看不见．通过这一逐步抽象的过程，使抽象问题直观化.

（上接第 5 页）

最后教师小结：

1．证明两条线段相等、互相垂直、平分，或证明两个角相等、互补的问题，要同时考虑三角形和四边形方面的知识，以便能灵活运用各种四边形的性质来解决实际问题.

2．在判定各种四边形时，应当注意从什么样的图形出发，以防止错误的发生．例如，从四边形出发，即使它的两条对角线互相垂直，也不能肯定它是菱形；同形，两条对角线相等的四边形，也不能肯定它是矩形或等腰梯形.

四边形的复习课

上海市黄浦区业余工业大学　周霖源

复习课并不等于讲课的简单重复，而是要在原有的学习基础上，对教材进行系统整理和综合概括，以突出各部分知识的内在联系．对重要的概念应抓住不放讲透讲深．经过多次反复，学员就能使已学到的知识得到巩固和提高．对工农学员来讲，由于上课次数较少，课与课之间的间隔时间较长，学完一章后，更要认真进行复习．下面就工农业余中学数学课本四边形一章的主要内容，谈谈如何上好复习课的问题．

一、整理、归纳教材，把所学知识系统化，使学员便于理解、记忆和应用．为了简明概括，可用图1的形式表示．

很明显，用集合来表示它们之间的从属关系比较直观．四边形集合包含平行四边形集合和梯形集合，而平行四边形集合又包含矩形集合和菱形集合．也可以说，后者是前者的特殊情况．例如，矩形和菱形都具有平行四边形的一切属性，但又具有各自的特殊性质，因此，它们互不从属．而矩形集合和菱形集合的相交部分表示正方形集合，即说明正方形集合从属于矩形集合和菱形集合．它是矩形和菱形特性的总和．了解各种四边形的关系以后，就可以确切地理解它们的定义，掌握它们的共性和特性了．

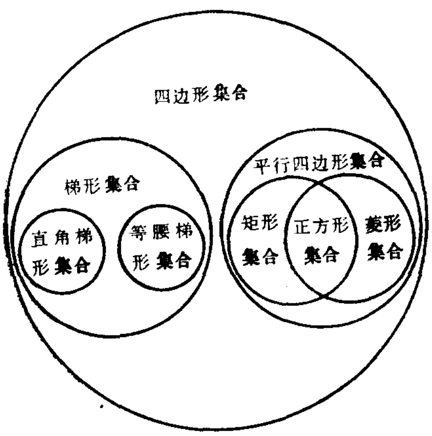


图 1

二、阐明教材的内在联系，使学员能灵活运用已有的知识去分析问题和解决问题。

例　如图2．

1．在任意四边形$ABCD$中，对边AB、CD的中点E、F与对角线AC和BD的中点G、H的连线是互相平分的；

2．如果边AD和BC相等，那么$EHFG$是什么图形？

3．如果$EHFG$是菱形，顺次连结其各边中点M、N、R、S，又构成什么图形？

讲解过程：

1．在证明两条线段互相平分时，如果应用等腰三角形或全等三角形的性质证明有困难，是否可以利用平行四边形的性质来证明呢？

启发学员分析这个问题．要证明EF、GH互相平分，只要证明$EHFG$是平行四边形就可以了．根据已知条件，能否解决这个问题？

当学员证得$EHFG$是平行四边形后，把学员的不同证法，加以比较，看哪一种方法最为简捷．在此基础上，教师与学员共同总结判定平行四边形的各种方法．

2．如果四边形$ABCD$的两边AD和BC相等，那么$EHFG$是什么图形？EF和GH有什么关系？

当学员准确地回答了这个问题后，再提出判定菱形的方法共有几种？

要求学员回答：

（1）各边相等的四边形是菱形．

（2）具有下列条件之一的平行四边形也是菱形：①相邻两条边相等；②两条对角线互相垂直．

3．如果$EHFG$是菱形，顺次联结它各边的中点，又构成什么图形？

当学员准确地回答了这个问题后，再提出判定矩形的方法共有几种？

要求学员回答：

（1）三个内角为直角的四边形是矩形．

（2）具有下列条件之一的平行四边形也是矩形：①有一个内角是直角；②两条对角线相等．

证完本题后，教师再提出判定正方形的方法有哪些？由于正方形集合是矩形集合与菱形集合的相交部分，因此它同时是矩形与菱形，要求学员回答：

（1）邻边相等的矩形是正方形；

（2）有一个内角是直角的菱形为正方形．

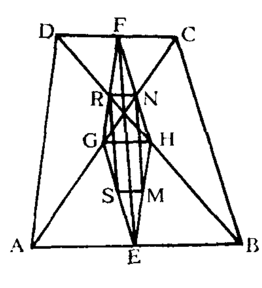


图 2

（下转第4页）

解根式方程为什么要验根

河北省教育科学研究所　程志国

解根式方程的一般方法是把方程两边同次乘方，将无理方程化为有理方程来解，最后再进行验根．这里有一个问题，就是方程经过两边平方变形后，为什么可能产生增根呢？会不会产生失根？这是需要研究的．

例 1　解方程$\sqrt{x-3}=-2$．

该方程左边是一个算术根，右边是一个负数，不必解，就可以断定方程无解．如果要解，常用的方法如下．

解：把原方程

$$\sqrt{x-3}=-2. \qquad ①$$

的两边平方，得

$$x-3=4. \qquad ②$$

移项，得　$x=7$．　③

把$x=7$代入原方程，

左边$=\sqrt{7-3}=2$，

右边$=-2$．

∴　$x=7$ 是增根．

因此，原方程无解．

题目本来是求方程①的解，直接不好求解，而把方程①变为方程②，又把方程②变为方程③．通过求方程③的解，而得到方程①的解．经过检验得知，$x=7$是增根．我们知道，移项不改变方程的解，所以②与③的解相同．因此，增根就发生在由①到②的变形中．那么，两边平方这种变形会不会产生失根呢？结论如下．

定理　如果方程

$$f(x)=\varphi(x) \qquad ①$$

的两边都二次乘方，那么，所得新方程

$$[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2 \qquad ②^*$$

的解包含原方程的解．如果有增根一定是方程

$$f(x)=-\varphi(x) \qquad ③$$

的解．

证明：设α为方程①的任一解，则有

$$f(\alpha)=\varphi(\alpha).$$

两边平方，得

$$[f(\alpha)]^2=[\varphi(\alpha)]^2,$$

即α也是方程②的解．所以②的解包含①的解，显然不会失根．

将方程②进行如下变形

$$[f(x)]^2-[\varphi(x)]^2=0,$$

$$[f(x)-\varphi(x)][f(x)+\varphi(x)]=0,$$

则有　$f(x)-\varphi(x)=0$，或　$f(x)+\varphi(x)=0$．

即　$f(x)=\varphi(x)$，或　$f(x)=-\varphi(x)$．

所以，方程②与两个方程

$$f(x)=\varphi(x)\ \text{和}\ f(x)=-\varphi(x)$$

有相同的解．即　方程②的解集是这两个方程解集的并集．

因此，把方程①变为方程②，如果有增根，就是方程③的根．

由以上定理可知，例1中求出的$x=7$，就是$\sqrt{x-3}=2$的解．

例 2　解方程　$\sqrt{2x^2+17}=x^2+1$．

解：两边平方，得

$$2x^2+17=x^4+2x^2+1.$$

移项，整理，得

$$x^4-16=0.$$

左边分解因式，得

$$(x^2-4)(x^2+4)=0.$$

所以，有

$$x^2-4=0\ \text{或}\ x^2+4=0\ (\text{无解}).$$

方程　$x^2-4=0$　的解为　$x_1=2$，$x_2=-2$．

经检验得知，2和－2都是原方程的解．

实际上，因为原方程的右边恒为正，所以方程$\sqrt{2x^2+17}=-(x^2+1)$　无解，因此，通过两边平方，不会产生增根．

例 3　解方程　$\sqrt{2x+3}=x$．

解：两边平方，得

$$2x+3=x^2.$$

移项，得　$x^2-2x-3=0$．

解之，得　$x_1=3$，$x_2=-1$．

经检验知道，$x_2=-1$是增根，它就是$\sqrt{2x+3}=-x$的解．

例4　解方程　$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=3$．

（下转第20页）

* **编者注**：把方程$[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2$变形为有理方程时，未知数的允许值集可能扩大．因此，也可能产生增根．关于这方面的定理请参阅本刊第1辑“分式方程的增根问题”一文．

几 何 证 明 的 初 步 训 练

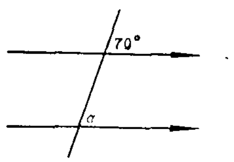
北京二十四中　丛　栋

学员初学几何时，往往对几何证明感到有困难．因为在此之前，他们未曾受过逻辑推理的训练．所以在开始教授几何证明时，一定要注意教法．要根据学员的思维方式，安排好教学程序．一般说，开始时可结合图形进行简单的计算，然后再逐步过渡到正式推理证明．现在我准备结合例题将这部分内容的教学程序简单地表述如下（假定学员刚刚学过平行线的定义和性质）．

一、计算

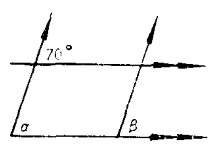
简——→繁

1．简单计算——→



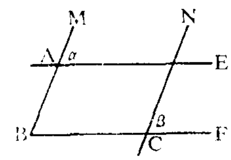
如图，问$\angle\alpha=$？
（只画简图，作问答练习）

2．复合计算——→



如图，问$\angle\beta=$？
（只画简图，作问答练习）

3．几何计算

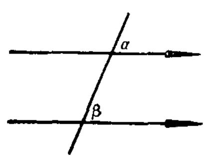


已知：$BM\parallel CN$，
$AE\parallel BF$，$\angle\alpha=70°$．
求：$\angle\beta=$？
（画图，写已知、求解．并注明理由）

↑ 同一层次 ↓　　↑ 同一层次 ↓　　↑ 同一层次 ↓

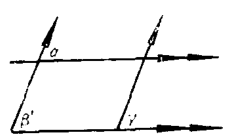
二、证明

Ⅰ、简单推理——→



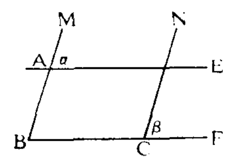
如图，$\angle\alpha$等于$\angle\beta$吗？
（只画简图，作问答练习）

Ⅱ、复合推理——→



如图，$\angle\alpha$等于$\angle\gamma$吗？
（只画简图，作问答练习）

Ⅲ、几何证明



已知：$BM\parallel CN$，$AE\parallel BF$．
求证：$\angle\alpha=\angle\beta$．
（画图，写已知、求证、证明，并注明理由）

三、提高

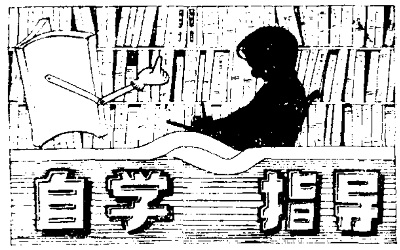
（提出适中问题）求证：如果两个角的两边互相平行，则这两个角或者相等，或者互补（要求按几何证明的格式完成）．

在教学过程中，为了便于学员接受，应对照讲解同一层次的内容．不仅要求学员理解其中逻辑推理（三段论）部分，并且要求他们能够独立进行简单的推理和较准确地表达自己的思想．练习时，可以采用先口述、后笔述的办法．在经过足够数量的练习之后，要及时将同一层次的内容过渡到下一个层次．经过这样不断将教学内容深化之后，便可达到本阶段的教学目的，使学员初步掌握几何证明的方法和步骤．

但尊重学员的特点，并不等于跟在学员的思维活动后边跑．在适当的时候要向学员提出适中问题（所谓适中问题就是学员既能回答，又能促使他们前进的难易相当的问题）．问题提得好，不但可以激发学员的学习积极性，发挥他们的主动精神，而且有利于完成下一步的教学任务．

在开始教授几何证明时，最好能适当放慢进度，给学员以充分"消化"的时间．因为，这部分内容讲授得好坏，对以后整个几何教学的质量是有直接影响的．

平 面 几 何 中 定 值 问 题 的 证 明



河北青县一中　　王家宝

平面几何中求证定值的问题，从表面上看有两种形式：一种是明确指出了要求证的定值是什么；另一种是没有指出定值是什么．后一种形式的定值问题，实质上是隐藏了推证结论的题目，和代数或三角中求值的题目很类似，但所求的值是一个定值．它较前一种形式的定值题目要难，因为题目本身并没有指出最后的结果，这样在证明过程中，与前一种题目相比就多了探究所要求的定值是什么这样一个步骤．

下面举例说明，在平面几何中一些隐藏了结论的定值问题的推证方法．

1．从已知条件出发，直接推证

有些定值问题能比较容易地看出待推证的定值与已知的定值元素间的关系，对于这类问题，可以从已知条件出发，直接推证．

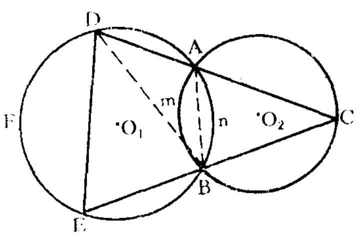


图 1

例 1　如图1．$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于A、B两点，C为$\odot O_2$中优弧AB上(不包括A、B)的任一点，直线CA、CB分别交$\odot O_1$于D、E两点，求证DE为定值．

分析：要证明DE是定值，需要证明DFE是定弧，这就需要证$\angle DBE$是定角，而$\angle DBE=\angle BDC+\angle DCB$．

因为$\overset{\frown}{AnB}$是定值，所以$\angle BDC$是定值．同理，$\angle DCB$也是定值．因此$\angle DBE$是定值是可证的．

证明：连接BD，则$\angle DBE=\angle DCB+\angle BDC$．

因为$\overset{\frown}{AmB}$、$\overset{\frown}{AnB}$为定弧，$\angle DCB$和$\angle BDC$都是定角，所以$\angle DCB+\angle BDC=\angle DBE$也是定值，故$DE$是定值．

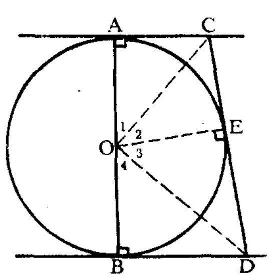


图 2

例 2　如图2．已知AC和BD是半径为R的$\odot O$的两条平行切线，A、B分别为切点．又$\odot O$的一动切线与AC交于C，与BD交于D，求证：$AC\cdot BD$为定值．

分析：设CD与圆相切于E，$AC=CE$，$BD=DE$，所以$AC\cdot BD=CE\cdot ED$，故欲证$AC\cdot BD$为定值，只要能证$CE\cdot ED$是定值即可．但已知$OE\perp CD$，如果能证得$\angle COD$是直角，就可得$CE\cdot ED=OE^2=R^2$（定值），而这是可以办到的。

证明：因AC与BD是两平行切线，A、B是两切点，故AOB是一直线．设CD与圆切于E，连结CO、DO、EO．则$OE\perp CD$于E．因为CA、CE是由C点引的二切线，所以$AC=CE$．同理可证$BD=DE$，故可得$Rt\triangle AOC\cong Rt\triangle EOC$，$\angle 1=\angle 2$．同理，$\angle 3=\angle 4$．

因此$\angle 2+\angle 3=90°$．在$Rt\triangle COD$中，$OE\perp CD$，$OE^2=CE\cdot ED$，即$AC\cdot BD=OE^2=R^2$（定值）．

2．从特殊位置，估测出定值

有些定值问题，不容易得出待求证的定值是什么，或不易找到已知定值元素与待求定值的关系．这时往往感到方向不明，难于插手进行推证．在这种情况下，常常可以先探究某些特殊位置的定值，从中受到启发，打开思路，使问题得到解决．

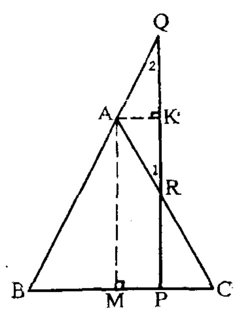


图 3

例 3　如图3．已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P是BC上任一点，过P作BC的垂线，交AC、BA或其延长线于R、Q两点，求证$PQ+RP$是一个定值．

分析：若P为BC中点这一特殊位置时，则R、Q两点重合于A点，这时$PQ+RP=2AM$，即$PQ+RP$等于2倍底边上的高．所以，欲证$PQ+RP$为定值，只要证得当P是BC上任一点时有关系式$PQ+RP=2AM$即可．

证明：作$AM\perp BC$于M，则AM是定长线段，过A作$AK\perp PQ$，K是垂足．则$AM=KP$，在$Rt\triangle AQK$和$Rt\triangle ARK$中，由于$\angle 1=\angle 2$，所以$Rt\triangle AQK\cong Rt\triangle ARK$，

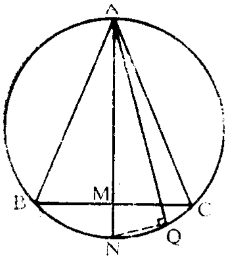


图 4

故 $QK=RK$，因此 $PQ+RP=2AM$（定值）。

例 4 如图4.自等腰$\triangle ABC$的顶点A，引直线与底边BC和$\triangle ABC$的外接圆分别交于P和Q两点，则$AP\cdot AQ$为定值。

分析：如果APQ为$\triangle ABC$外接圆直径AMN这一特殊位置时．则$AM\cdot AN$是定值，因此，欲证$AP\cdot AQ$为定值，只要证明当APQ不是圆的直径时，$AP\cdot AQ=AM\cdot AN$就行了．

证明：过点A作$\triangle ABC$外接圆的直径AMN，交BC于M，交圆于N，连接NQ.因$\triangle ABC$是已知三角形，所以AM和AN都是定值．已知$\triangle ABC$是等腰三角形，因此$AM\perp BC$，故可得$Rt\triangle APM\backsim Rt\triangle ANQ$，$AM:AP=AQ:AN$，所以$AP\cdot AQ=AM\cdot AN$（定值）.

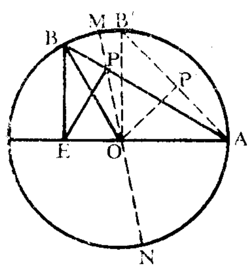


图 5

例 5 如图5.OA、OB是已知圆O的任意两条半径，由B点作$BE\perp OA$，垂足为E，过E点作$EP\perp AB$，垂足为P，求证OP^2+EP^2为定值．

分析：$\odot O$为已知圆，因此，它的半径是定值．要证OP^2+EP^2为一定值，我们可以先考虑当OA与OB互相垂直时的特殊情况，由这种特殊情况估测出它的定值来．这时E与O重合．那么，$\triangle AOB$就是等腰直角三角形，则$OP^2+EP^2=2AP^2=AO^2$，因此只要证明当OA、OB为一般情况时，$OP^2+EP^2=OA^2$就行了．

证明：延长OP与PO交圆于M、N两点，在$Rt\triangle ABE$中，$EP\perp AB$，所以$EP^2=AP\cdot BP$，又$BP\cdot AP=MP\cdot NP$.而$MP=OM-OP$，$NP=OM+OP$，所以$MP\cdot PN=(OM-OP)(OM+OP)=OM^2-OP^2$.故$OP^2+EP^2=MO^2-OP^2+OP^2=MO^2=AO^2$（定值）.

3．如果要求证一个代数式的值是定值，可以先分别求得各部分式子的值，然后再求整个代数式的值，最后证其结果是定值．

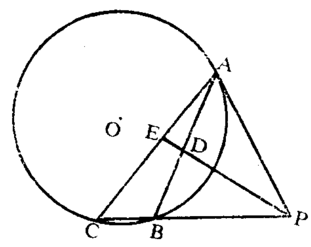


图 6

例 6 如图6.PA为$\odot O$的切线，A为切点，PBC为$\odot O$的割线，$\angle APB$的平分线交AB于D，交AC于E，求证$\frac{DB}{AB}+\frac{EC}{AC}$为定值．

分析：可先分别求$\frac{DB}{AB}$和$\frac{EC}{AC}$.

证明：因为PD是$\triangle APB$的内角$\angle APB$的平分线，

所以 $\frac{PB}{PA}=\frac{BD}{AD}$ ①

同理，PE是$\triangle APC$的内角$\angle APC$的平分线，

所以 $\frac{PC}{PA}=\frac{CE}{AE}$ ②

由①得 $\frac{BP}{PA+PB}=\frac{BD}{AD+BD}$，

即 $\frac{PB}{PA+PB}=\frac{BD}{AB}$ ③

由②得 $\frac{PC}{PC+PA}=\frac{CE}{CE+AE}$.

即 $\frac{PC}{PA+PC}=\frac{CE}{AC}$ ④

③+④得 $\frac{BD}{AB}+\frac{EC}{AC}=\frac{PB}{PA+PB}+\frac{PC}{PA+PC}$ ⑤

⑤式的右端

$$=\frac{PB(PA+PC)+PC(PA+PB)}{(PA+PB)(PA+PC)}$$

$$=\frac{PA\cdot PB+PB\cdot PC+PA\cdot PC+PB\cdot PC}{PA^2+PA\cdot PC+PA\cdot PB+PB\cdot PC}.$$

但 $PA^2=PB.PC$，

因此上式即为

$$\frac{PA\cdot PB+PB\cdot PC+PA\cdot PC+PB\cdot PC}{PB\cdot PC+PA\cdot PC+PA\cdot PB+PB\cdot PC}=1.$$

也就是 $\frac{DB}{AB}+\frac{EC}{AC}=1$（定值）.

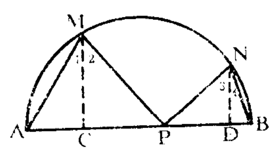


图 7

例 7 如图7.已知M、N是以AB为直径的半圆上的两定点，求证：不论P点在AB上的位置如何，$tg\angle AMP\cdot tg\angle BNP$为定值．

分析：先分别求$tg\angle AMP$与$tg\angle BNP$

$tg\angle AMP=tg(\angle 1+\angle 2)$，

$tg\angle BNP=tg(\angle 3+\angle 4)$.

这两个值是可以求出的．

证明：过点M作$MC\perp AB$，C是垂足．过点N作$ND\perp AB$，D是垂足．则$\angle 1+\angle 2=\angle AMP$，$\angle 3+\angle 4=\angle BNP$.

$$\operatorname{tg}\angle AMP=\operatorname{tg}(\angle 1+\angle 2)=\frac{\operatorname{tg}\angle 1+\operatorname{tg}\angle 2}{1-\operatorname{tg}\angle 1\cdot\operatorname{tg}\angle 2}$$

$$=\frac{\dfrac{AC}{MC}+\dfrac{CP}{MC}}{1-\dfrac{AC}{MC}\cdot\dfrac{CP}{MC}}=\frac{\dfrac{AC+CP}{MC}}{\dfrac{MC^2-AC\cdot CP}{MC^2}}$$

$$=\frac{(AC+CP)MC}{MC^2-AC\cdot CP}$$

$$=\frac{(AC+CP)MC}{AC(CP+PD+DB)-AC\cdot CP}$$

$$=\frac{(AC+CP)MC}{AC(PD+DB)},$$

同理可得 $\operatorname{tg}\angle BNP=\dfrac{(BD+PD)ND}{BD(AC+CP)}$.

因此 $\operatorname{tg}\angle AMP\cdot\operatorname{tg}\angle BNP=\dfrac{(AC+CP)MC}{AC(PD+DB)}\cdot$

$$\frac{(BD+PD)ND}{BD(AC+CP)}=\frac{MC}{AC}\cdot\frac{ND}{BD}$$

$$=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B.$$

而 $\angle A$ 和 $\angle B$ 都是定值，

故 $\operatorname{tg}\angle AMP\cdot\operatorname{tg}\angle BNP=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B$(定值)．

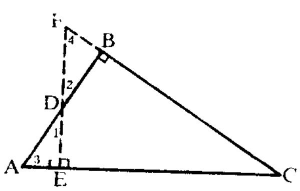


图 8

例 8 如图8.过 $Rt\triangle ABC$ 直角边 AB 的中点 D，作斜边 AC 的垂线 DE，ED 的延长线与 CB 的延长线相交于 F，求证 $\dfrac{DB^2}{DE\cdot DF}+\dfrac{DE\cdot EF}{AE\cdot EC}$ 为定值．

分析：这个式子看起来较繁锁，但可以将两个式子先分开来研究．$\dfrac{DB^2}{DE\cdot DF}=\dfrac{BD}{DE}\cdot\dfrac{BD}{DF}$，但因 D 是 AB 的中点，所以 $AD=DB$，故 $\dfrac{BD}{DE}\cdot\dfrac{BD}{DF}=\dfrac{BD}{DE}\cdot\dfrac{AD}{DF}$．由 $Rt\triangle ADE\backsim Rt\triangle FDB\Longrightarrow\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{DF}{AD}$，所以 $\dfrac{BD}{DE}\cdot\dfrac{AD}{DF}=1$，即 $\dfrac{DB^2}{DE\cdot DF}=1$．

另方面，$\dfrac{DE\cdot EF}{AE\cdot EC}=\dfrac{DE}{AE}\cdot\dfrac{EF}{EC}$，但 $Rt\triangle ADE\backsim Rt\triangle FCE$，所以 $\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{EC}{EF}$，即 $\dfrac{DE\cdot EF}{AE\cdot EC}=1$．

证明：在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle FDB$ 中，$\angle 1=\angle 2$，所以 $\triangle ADE\backsim\triangle FDB\Longrightarrow\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{DF}{AD}$．但已知 $AD=BD$，故 $\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{DF}{BD}\Longrightarrow BD^2=DE\cdot DF$，即 $\dfrac{BD^2}{DE\cdot DF}=1$．

又 $\angle 3=\angle 4$，则 $Rt\triangle ADE\backsim Rt\triangle FCE\Longrightarrow\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{EC}{EF}$，故 $DE\cdot EF=AE\cdot EC$，即 $\dfrac{DE\cdot EF}{AE\cdot EC}=1$．

因此可得 $\dfrac{DB^2}{DE\cdot DF}+\dfrac{DE\cdot EF}{AE\cdot EC}=1+1=2$ (定值)．

(上接第14页)

由于 V^2 与 V 同时取得最大值，而 $V^2=\dfrac{1}{9}\pi^2r^4(R^2-r^2)$，所以，只需求出 $r^4(R^2-r^2)$ 何时取得最大值，即可．

将 $r^4(R^2-r^2)$ 改写为 $\dfrac{1}{2}[r^2\cdot r^2(2R^2-2r^2)]$，可以看出，只须求出方括号中的式子何时取得最大值，即可．

$\because$ $r^2+r^2+(2R^2-2r^2)=2R^2$，(为一定值)

$\therefore$ 当 $r^2=r^2=2R^2-2r^2$ 时，$r^2\cdot r^2(2R^2-2r^2)$ 取得最大值．

解 $r^2=r^2=2R^2-2r^2$，得

$$3r^2=2R^2\Longrightarrow r=\sqrt{\frac{2}{3}}R.$$

下面我们由 $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$ 来求中心角 θ．

$\because$ 圆锥底面周长 = 圆锥侧面展开图圆扇形的弧长，

而 底面周长 $=2\pi r=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$．

圆扇形弧长 $=R\theta$，

$\therefore$ $R\theta=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$．

解得 $\theta=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi\approx 293.94°$．

$\therefore$ 当中心角为293.94°时，漏斗的容积最大．

通过以上几个实例可以看出，两个推论能解决许多实用价值很大的问题．上述问题的解决也提供了一些重要的解题技巧，即使用推论时，首先要审查是否具备推论的条件，若不适合，则需对所求的变量 W 进行适当的恒等变换．如可以把一项拆成两项，把一个因子拆成两个因子，或者对 W 扩大、缩小若干倍，对 W 进行乘方等，以使之符合推论的条件，然后再解决．

二次函数表达式的寻求

北京师大附中　　刘增佑

在学习二次函数这一章时，求二次函数的表达式，是常见的问题之一．通过求解这类习题，可以巩固有关二次函数的基本概念，加深对二次函数图象性质的理解，并能将“式”（二次函数的解析表达式）和“形”（二次函数的图象抛物线）有机地联系起来．因此，熟练地掌握这类习题的解法是非常必要的．而在求解时，恰当地利用表达式的不同形式，巧妙地安排和选择未知元素，能使求解过程简化，计算简便，从而取得事半功倍的效果．

我们知道，二次函数表达式的一般形式为$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，把它配方后，可化成$y=a(x+h)^2+K$的形式．这种形式明确地表示出抛物线的顶点为$(-h,K)$，它的对称轴是直线$x=-h$．当$x=-h$时，函数的最值是K．又若抛物线与X轴有两个交点，即方程$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实数根（x_1，x_2），则二次函数的表达式又可表示成$y=a(x-x_1)(x-x_2)$．下面就解题时应如何恰当选用这几种表达式的形式，举几例说明．

一、若题目给出的是x、y的对应值，则应用$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$这种形式很方便，只要将对应值分别代入后，解方程组即可．

例 1　已知y是关于x的二次函数，若$x=1$，则$y=7$；若$x=2$，则$y=11$；若$x=3$，则$y=23$，求这个二次函数的表达式．

解：设二次函数的表达式为$y=ax^2+bx+c$．

根据题意，有

$$\begin{cases}a\cdot1^2+b\cdot1+c=7,\\ a\cdot2^2+b\cdot2+c=11,\\ a\cdot3^2+b\cdot3+c=23.\end{cases}$$

解之，得$a=4$，$b=-8$，$c=11$．

∴　所求二次函数的表达式为$y=4x^2-8x+11$．

例 2　已知二次函数$y=x^2+px+q$，当$x=4$时，$y=10$，且它的最小值为6，求二次函数的表达式．

解：根据题意，有

$$\begin{cases}10=4^2+p\cdot4+q, & ①\\ \dfrac{4q-p^2}{4}=6. & ②\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4p+q=-6, & ③\\ 4q-p^2=24. & ④\end{cases}$$

将③代入④，得$p^2+16p+48=0$

$$\Longrightarrow(p+4)(p+12)=0$$

$$\Longrightarrow p_1=-4,\ p_2=-12.$$

$$\therefore\quad\begin{cases}p_1=-4,\\ q_1=10;\end{cases}\qquad\begin{cases}p_2=-12,\\ q_2=42;\end{cases}$$

∴　函数的表达式为

$$y=x^2-4x+10\text{或}y=x^2-12x+42.$$

二、若题目条件给出了对称轴、最值或顶点坐标以及抛物线沿对称轴平移的情况，那么，设表达式为$y=a(x+h)^2+K$的形式，很方便．

例 3　若二次函数的图象过点$\left(\frac{7}{3},\ -\frac{9}{2}\right)$，并有最大值$\frac{7}{2}$，且它的对称轴是直线$x=\frac{1}{3}$，求二次函数的表达式．

解：设二次函数的表达式为$y=a(x+h)^2+K$．

根据题意，有

$$y=a\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{2}.$$

又抛物线过$\left(\frac{7}{3},\ -\frac{9}{2}\right)$点，代入上式后得

$$-\frac{9}{2}=a\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{2}$$

$$\Longrightarrow4a=-8$$

$$\Longrightarrow a=-2.$$

∴　表达式为$y=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{2}$，

整理后得　$y=-2x^2+\frac{4}{3}x+\frac{59}{18}$．

此题若列成以下方程组的形式：

$$\begin{cases}a\cdot\left(\dfrac{7}{3}\right)^2+b\cdot\left(\dfrac{7}{3}\right)+c=-\dfrac{9}{2}, & ①\\ -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{3}, & ②\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{7}{2}. & ③\end{cases}$$

解起来就比较麻烦．

例 4　已知抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}$，若将其图象开口反向，向上平移一个单位后再左右平移，这

样就得到一条新的抛物线，这条新抛物线恰与直线 $y=mx+2$ 相交于 $(4,4)$ 点，

（1）求与新抛物线对应的二次函数的表达式；

（2）求新抛物线与直线 $y=mx+2$ 的另一交点；

（3）在同一坐标系中，作出新旧抛物线及直线 $y=mx+2$ 的略图．

解：

（1）先把旧抛物线配方，得

$$y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+1.$$

可知它的顶点在 $(-3,1)$．

这样，可设所求的抛物线为

$$y=\frac{1}{2}(x+h)^2+2.$$

将 $x=4$，$y=4$ 代入后，得

$$4=\frac{1}{2}(4+h)^2+2.$$

解之，得

$$h_1=-2,\quad h_2=-6.$$

∴ 与新抛物线对应的二次函数表达式为

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2 \text{ 或 } y=\frac{1}{2}(x-6)^2+2,$$

即 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+20$．

（2）将 $x=4$，$y=4$ 代入 $y=mx+2$，得

$$y=\frac{1}{2}x+2.$$

分别解方程组

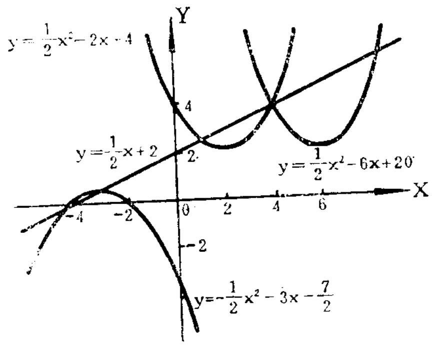
$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2, \\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+4. \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2, \\ y=\frac{1}{2}x^2-6x+20. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=\frac{5}{2}. \end{cases} \text{和} \begin{cases} x'_1=4, \\ y'_1=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x'_2=9, \\ y'_2=\frac{13}{2}. \end{cases}$$

∴ 若新抛物线为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$，它和直线 $y=mx+2$ 的另一个交点是 $\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$，若新抛物线为 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+20$，它与直线 $y=mx+2$ 的另一个交点是 $\left(9,\frac{13}{2}\right)$．

（3）略图见本页右上角．



三、若给出的条件指出了抛物线和 X 轴有两个交点，则可先把表达式设为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$（x_1、x_2 分别为抛物线与 X 轴交点的横坐标，$x_1<x_2$），再利用图象的对称性，解起来就较为方便．

例 5 已知二次函数的图象过 $(1,-3)$ 点和 $(0,-8)$ 点，且与 X 轴两交点间的距离为 2，求这个二次函数的表达式．

解：设二次函数的图象与 X 轴的两交点分别为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，根据已知条件，有 $x_2=x_1+2$．

∴ 二次函数的表达式可设为 $y=a(x-x_1)(x-x_1-2)$．

将 $x=1$，$y=-3$ 与 $x=0$，$y=-8$ 分别代入上式后，得

$$\begin{cases} -3=a(1-x_1)(1-x_1-2), \\ -8=a(0-x_1)(0-x_1-2). \end{cases}$$

整理后，有

$$\begin{cases} a(1-x_1)(1+x_1)=3, \\ ax_1(x_1+2)=-8. \end{cases}$$

消去 a，得

$$\frac{-8(1-x_1^2)}{x_1^2+2x_1}=3.$$

化简后，得 $5x_1^2-6x_1-8=0$

$$\Longrightarrow (5x_1+4)(x_1-2)=0$$

$$\Longrightarrow x_1=-\frac{4}{5},\ \text{或}\ x_1=2.$$

若 $x_1=-\frac{4}{5}$，则 $a=\frac{25}{3}$，这时 $x_2=\frac{6}{5}$．

∴ 函数的表达式为

$$y=\frac{25}{3}\left(x+\frac{4}{5}\right)\left(x-\frac{6}{5}\right),$$

即

$$y=\frac{25}{3}x^2-\frac{10}{3}x-3.$$

若 $x_1=2$，则 $a=-1$，这时 $x_2=4$．

∴ 函数的表达式为

$$y=-(x-2)(x-4),$$

即

$$y=-x^2+6x-8.$$

例 6 已知二次函数图象的对称轴与 Y 轴平行，

（下转第 2 页）

关于两个极大与极小命题的应用

郭 淑 英

大家知道，任意实数的平方都是一个非负实数，因此任意两个实数差的平方也都是一个非负实数，即总有$(a-b)^2\geqslant 0$，且仅当$a=b$时，等式成立．经展开移项得到$a^2+b^2\geqslant 2ab$，且仅当$a=b$时，等式成立．

算术平均数与几何平均数之间有如下的定理（证明从略）．

定理 两个或者三个正数的算术平均数不小于其几何平均数．

即 （1）$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$；

（2）$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$．

且仅当$a=b$，或$a=b=c$时，取等号．

由这个定理不难推出下面的两个重要推论（证明从略）．

推论 1 若两个或三个正变量的和为一定值s，则当这些正变量取相等值时，其乘积取得最大值．

即 若$x+y=s$（定值），则当$x=y$时，xy取得最大值$\frac{s^2}{4}$．

若$x+y+z=s$（定值），则当$x=y=z$时，xyz取得最大值$\frac{s^3}{27}$．

推论 2 若两个或三个正变量的积为一定值p，则这些正变量取相等值时，其和取得最小值．

即 若$xy=p$（定值），则当$x=y$时，$x+y$取得最小值$2\sqrt{p}$．

若$xyz=p$（定值），则当$x=y=z$时，$x+y+z$取得最小值$3\sqrt[3]{p}$．

应用这两个推论可以解决不少求最大、最小值的实际问题．

例一 今欲建一个长方形的露天仓库，面积需为24平方米，为了节约开支，一面利用原有旧墙，正面木墙每米造价4元，两侧土墙每米造价3元．问如何修建最经济？

解：设长方形的长为x米（$x>0$，指正面的木墙长），由长方形的面积为24平方米得知，长方形的宽为$\frac{24}{x}$米．

再设修建费用为y元．

根据题意，则有

$$y=4x+3\cdot\frac{24}{x}+3\cdot\frac{24}{x},$$

即 $$y=4x+\frac{144}{x}.$$

这里是求两个正变量$4x$、$\frac{144}{x}$的和何时取得最小值的问题．

由于它们的乘积$4x\cdot\frac{144}{x}=576$为一定值，

∴ 当 $4x=\frac{144}{x}$时，$y=4x+\frac{144}{x}$取得最小值．

解方程 $4x=\frac{144}{x}$，得 $x^2=36$，

∴ $x=6$（-6不合实际，舍去）．

又 $$\frac{24}{x}=4.$$

答：木墙长为6米，土墙长为4米时，造价最低．

例二 有一张边长为10厘米的正方形铁片，现在要象图1那样将有斜线的部分剪下，然后再用所余的四个全等等腰三角形作成一个正四棱锥形的容器（如图2)．假定我们要使这个容器的容积最大，等腰三角形的底边长应是多少？

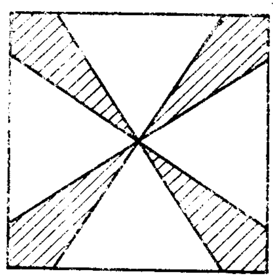


图 1

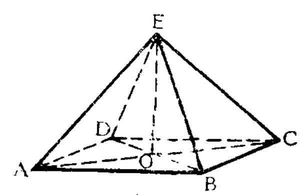


图 2

解：设等腰三角形边长底（即正四棱锥底面边长）为x（厘米），外腰长（也即正四棱锥的侧棱长）为$\sqrt{25+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}$（厘米）．

∴ 正四棱锥的高

$$EO=\sqrt{AE^2-AO^2}$$
$$=\sqrt{\left(25+\frac{1}{4}x\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}$$

$$=\sqrt{25-\frac{1}{4}x^2}.$$

$\therefore$ 容积 $V=\frac{1}{3}x^2\sqrt{25-\frac{1}{4}x^2}$.

这是一个无理式，因此如直接求 x 值，V 取得最大值是困难的.

由于 V 与 $V^2=\frac{1}{9}x^4(25-\frac{1}{4}x^2)$ 两个量显然可同时取得最大值；

又 V^2 是两个正变量 $\frac{1}{9}x^4$ 与 $25-\frac{1}{4}x^2$ 的乘积，但这两个正变量的和不是常量，还不能使用推论1．然而，

$$\left(\frac{1}{8}x^2\right)+\left(\frac{1}{8}x^2\right)+\left(25-\frac{1}{4}x^2\right)=25$$

是一个定值.

于是我们先求

$$\frac{9}{64}V^2=\left(\frac{1}{8}x^2\right)\left(\frac{1}{8}x^2\right)\left(25-\frac{1}{4}x^2\right)$$

何时取得最大值.

这里，三个正因数的和为定值25.

$\therefore$ 当 $\frac{1}{8}x^2=\frac{1}{8}x^2=25-\frac{1}{4}x^2$ 时，$\frac{9}{64}V^2$ 取得最大值，也就在这时 V^2、V 也取得最大值.

解方程 $\frac{1}{8}x^2=25-\frac{1}{4}x^2$，得

$$\frac{3}{8}x^2=25\Longrightarrow x^2=\frac{200}{3}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$（负值不合理，舍去）.

答：等腰三角形底边长为 $\frac{10\sqrt{6}}{8}$ 厘米时，这个容器的容积最大.

例三 某玻璃厂要制作一批图3形状的药水瓶，瓶口是按统一规格设计的，瓶体上部为半球形，下部为圆柱形．如果保持圆柱体的容积为 V，怎样选择这批瓶子的内半径 R 和柱高 h 的尺寸，才能用料最省？

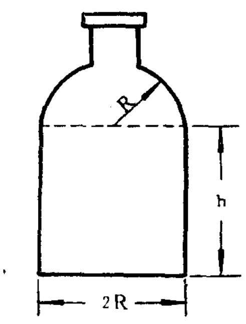


图 3

解：用料最省，就是要使瓶子的表面积最小．根据题意，瓶口部分可以不计．把瓶体的上半部看作半球面，其面积为 $\frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2=2\pi R^2$．下部圆柱体的侧面积为 $2\pi Rh$，底面积为 πR^2，则得瓶体的表面积为

s = 半球面 + 底面圆 + 圆柱侧面

$$=2\pi R^2+\pi R^2+2\pi Rh$$
$$=3\pi R^2+2\pi Rh.$$

已知圆柱体的容积为定值 V，即 $\pi R^2h=V$ 得，

$h=\frac{V}{\pi R^2}$，代入上式，得

$$s=3\pi R^2+2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}$$

$$=3\pi R^2+\frac{2V}{R}.\quad (R<0)$$

这是求两个正变量 $3\pi R^2$ 与 $\frac{2V}{R}$ 之和的最小值问题，但是这两个正变量的积等于 $6\pi VR$，不是一个常量，还不能使用推论2．

然而，$(3\pi R^2)\left(\frac{V}{R}\right)\left(\frac{V}{R}\right)=3\pi V^2$ 是一个定值.

于是可将 s 改写作 $s=3\pi R^2+\frac{V}{R}+\frac{V}{R}$.

由于这三个正变量 $3\pi R^2$、$\frac{V}{R}$、$\frac{V}{R}$ 的乘积为定值 $3\pi V^2$，

$\therefore$ 当 $3\pi R^2=\frac{V}{R}=\frac{V}{R}$ 时，s 取得最小值.

解上述方程得 $R^3=\frac{V}{3\pi}$，即 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

相应地有

$$h=\frac{V}{\pi R^2}=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}\right)^2}=3\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}.$$

答：这批瓶子的内半径为 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$ 和圆柱高 $h=3\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$ 时，用料最省.

例四 如图4，从半径为 R 的圆铁片上挖下一块扇形，作成一个漏斗，试问当扇形的中心角 θ 取多大时，由它作成的漏斗容积最大？

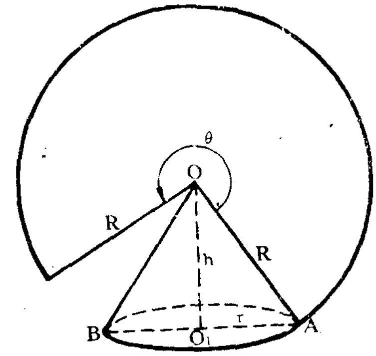


图 4

解：设圆锥的底半径为 r，高为 h，则 $h=\sqrt{R^2-r^2}$.

圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$.

（下转第10页）