金榜考研成功
系列

2004年全国
硕士研究生入学考试用书

数学
基础过关660题

SHUXU JICHU GUOGUAN 660TI

主编/李永乐

新华出版社

2004年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

主　编:李永乐

编　者:(按姓氏笔画)

北京科技大学　申亚男

清华大学　刘庆华

清华大学　李永乐

北方交通大学　赵达夫

东北财经大学　龚兆仁

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学基础过关660题/李永乐主编. - 北京:新华出版社,2003.6

(2004年全国硕士研究生入学考试用书)

ISBN 7-5011-6197-6

Ⅰ.数...　Ⅱ.李...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第041745号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，请读者注意识别。

2004年全国硕士研究生入学考试用书

数学基础过关660题

主编:李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路8号　邮编:100043)

新华出版社网址:http://xhcbs.126.com

中国新闻书店:(010)63072012

新华书店总经销

北京机工印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米　16K　21.25印张　515千字

2003年7月第1版　2003年7月第1次印刷

ISBN 7-5011-6197-6/G·2256　定价:30.00元

若有印装质量问题,请与印刷厂联系(010)82570299

前　言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书，适合于数学一至数学四 4 个卷种，内容包括高等数学（微积分）、线性代数、概率论与数理统计。题型为填空题与选择题。注意，2004 年卷子结构改变为：8 个选择题，6 个填空题，9 个解答题，其中选择、填空共 56 分，解答 94 分。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”，在强调选拔、强调能力考查的时候，并不意味着要削弱对基础知识和基本理论的要求，“考查考生对基础知识的掌握程度，是数学考试的重要目标之一”。近几年来，相当一部分考生在答题中的一些失误，恰恰是对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法的理解与掌握上存在某些偏差欠缺，甚至有所偏废所致。如果基本的数学方法没掌握，定理公式不熟悉，势必在知识点的衔接与转换上会有各种障碍，那么思维水平和创造意识亦将受到影响。

不论是数学基本理论的建立，还是数学运算或逻辑推理的进行，无一不是以明确、清晰的概念为基础。考生要重视对概念的复习，应当从不同的角度，不同的侧面进行思考，准确地把握住概念的内涵，注意相关概念的联系与区别，否则解题时思维上就会出现疑惑与混乱，方法上也就会有种种谬误。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三拉四，总犯“低级”错误。

是否具有较为扎实的基础知识和基本理论，是培养、提高分析问题与解决问题能力的基础，我们正是在认真研究历年试题的基础上，对考试的重点、难点加以分解剖析，对考生常出的错误归纳整理，我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法，用点面结合，抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思想层次的习题整合成书。期望能帮助同学搞清概念、搞清原理、搞清方法，只有基础过关在考试中才能取得好成绩。同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从 2003 年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了 50%，因此与往年相比，数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历来相关较大，这说明数学科的考试选拔性质更加突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮燥，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 7 月

目　录

第一部分　填空题

高等数学(微积分) ………………………………………………………… (1)
线性代数 ………………………………………………………………………… (89)
概率论与数理统计 …………………………………………………………… (123)

第二部分　选择题

高等数学(微积分) ………………………………………………………… (153)
线性代数 ………………………………………………………………………… (254)
概率论与数理统计 …………………………………………………………… (297)

第一部分　填空题

§　高等数学(微积分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant 1\\ 3+x & x>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^3 & x\leqslant 1\\ 2x-1 & x>1\end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]=$ ________.

【答案】 不存在.

【分析】 $f[g(x)]=\begin{cases}-x^3 & x\leqslant 1\\ 3+(2x-1) & x>1\end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)]=\lim_{x\to 1^+}[3+(2x-1)]=4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f[g(x)]=\lim_{x\to 1^-}(-x^3)=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)]\neq\lim_{x\to 1^-} f[g(x)]$$

因此　$\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]$ 不存在.

2. 设 $a_k=\cos\frac{x}{2^k}$，$A_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n(n=1,2,\cdots)$　则　$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$ ________.

【答案】 $\frac{\sin x}{x}$.

【分析】 $A_n=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$

$$=\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2^2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}$$

$$= \cdots = \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

而 $$\lim_{n \to \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \to \infty} 2^n \cdot \frac{x}{2^n} = x$$

因此 $$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$$

【评注】 在计算极限时，要注意极限过程，在本题求极限过程中，应把 x 看作常数.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} =$ ________，

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} =$ ________.

【答案】 3，1

【分析】 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x + 1}{x\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \frac{2 + 1}{1} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x + 1}{-x\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2+1}{-1} = 1$$

【评注】 求本题极限时,要注意 $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x + \sin 3x)^{\cot 5x} =$ ________.

【答案】 $e^{\frac{3}{5}}$

【分析】 $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x + \sin 3x)^{\cot 5x}$

$$= \lim_{x \to 0}[1 + (\cos 2x + \sin 3x - 1)]^{\frac{\cot 5x}{\cos 2x + \sin 3x - 1}(\cos 2x + \sin 3x - 1)}$$

而 $\lim\limits_{x \to 0}\cot 5x \cdot (\cos 2x + \sin 3x - 1)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1 + \sin 3x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin 5x} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \cos 5x$$

$$= \left(0 + \frac{3}{5}\right) \times 1 = \frac{3}{5}$$

于是 $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x + \sin 3x)^{\cot 5x} = e^{\frac{3}{5}}$

【评注】 所要计算的极限属"1^{∞}"时,通常利用重要极限 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 计算.

5. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ________

【答案】 $\frac{1}{\sqrt{6}}$

【分析】 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}}$

而 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}-1\right)\right]$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}-1\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2^x + 3^x}\left(\frac{2^{x^2}-1}{x} + \frac{3^{x^2}-1}{x} - \frac{2^x-1}{x} - \frac{3^x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2\ln 2}{x} + \frac{x^2\ln 3}{x} - \frac{x\ln 2}{x} - \frac{x\ln 3}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 6$$

所以,原式 $= e^{-\frac{1}{2}\ln 6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

> 【评注】 所要计算的极限属"1^∞"型时,也可将极限改写为如下形式较为简单.
> $\lim u^v = e^{\lim(u-1)\cdot v}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}} =$ ________.

【答案】 $\frac{1}{n!}$

【分析】 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\sqrt{(\cos x-1)+1})(1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1})\cdots(1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x} \cdot \frac{1-\sqrt[3]{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x} \cdot \cdots \cdot \frac{1-\sqrt[n]{(\cos x-1)+1}}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

7. 设 $a > 0$,且 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = \ln a$,则 $p =$ ________.

【答案】 2

【分析】 $a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} = a^{\frac{1}{x}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1)$ 当 $x \to +\infty$ $a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \sim \frac{\ln a}{x(x+1)}$

因此 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^p a^{\frac{1}{x+1}} \frac{\ln a}{x(x+1)}$

$$= \ln a \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}$$

$$= \ln a \quad (当\ p = 2\ 时)$$

> 【评注】 容易看出:当 $p < 2$ 时,$\lim\limits_{x \to +\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = 0$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x} - e^{\sin x}} =$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

上式最后一步利用 $x\to0$ 时 $e^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x$.

【评注】 在计算极限时,正确利用等价无穷小的代换定理能简化计算.

常遇到的等价无穷小有:

当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,a^x-1\sim x\ln a$ $(a>0)$, $\ln(1+x)\sim x$.

9. 设$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$,则 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

【答案】 e^2

【分析】 把$\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$改写为指数形式:$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}}=e^3$

由此得 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=3 \tag{1}$$

当 $x\to0$ 时,分母为无穷小,所以分子也为无穷小,因此,当 $x\to0$ 时

$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)\sim x+\frac{f(x)}{x}$,所以(1)可写为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3$.

因此 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$.

于是 $$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$$

10. 设 $a_1,a_2,\cdots a_m$ 为正数($m\geqslant2$),则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=$ ________.

【答案】 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

【分析】 不妨设 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a_1$

则 $a_1 \leqslant (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant a_1 m^{\frac{1}{n}}$

令 $n \to \infty$, $m^{\frac{1}{n}} \to 1$,由夹逼定理

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1$(即 $\max\{a_1, a_2\cdots a_m\}$)

11. $[x]$ 表示 x 的最大整数部分,则 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{2}{x}\right] =$ ________.

【答案】 2

【分析】 $\frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x}\right] \leqslant \frac{2}{x}$

因此,当 $x > 0$ $\quad 2 - x < x\left[\frac{2}{x}\right] \leqslant 2$

当 $x < 0$ $\quad 2 \leqslant x\left[\frac{2}{x}\right] < 2 - x$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(2 - x) = 2.$

于是 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{2}{x}\right] = 2.$

【评注】 上一题和本题都是利用夹逼定理求极限,解这一类题的关键是要找出两个特殊的数列(或函数),这要求我们熟练掌握一些常用的数列(或函数)的极限.

12. 设 $\{a_n\}$ 为数列, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $|q| < 1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ________.

【答案】 0

【分析】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| < 1$,所以数列 $|a_n|$ 是单调减少的,又 $|a_n| \geqslant 0$,由单调有界数列收敛定理推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = a$,则 $a = 0$,若不然, $a \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a}{a} = 1$,这与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| < 1$ 矛盾.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

【评注】 运用这一结果,可求出以下函数的极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!} = 0$ 等.

13. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - f(0)) = 0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x) - f(-x)| =$ ________.

【答案】 0

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[(f(x) - f(0)) + f(0)] = f(0)$

由函数在一点连续的定义得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=f(0)$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-f(-x)|=|\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(-x))|$

$=|f(0)-f(0)|=0$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续,且 $f(1)=1$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=$ ________.

【答案】 $\ln 3$

【分析】 先求出 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

由函数的连续性得 $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=\ln 3$

15. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及类型是________.

【答案】 $x=\pm 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

【分析】 分别就 $|x|=1$, $|x|<1$, $|x|>1$ 时求极限

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$,得出 $f(x)$ 的分段表达式:

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|<1\end{cases}$$

在 $|x|=1$ 处,由 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-1\neq\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1$

得 $\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)$ 不存在.

所以,$x=\pm 1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

16. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan(1+x^n)$,则 $f(x)$ 的定义域是________,$f(x)$ 的间断点是________.

【答案】 $(-1,+\infty)$, $x=1$

[illegible]

【分析】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & x\in(-1,1)\\ \arctan 2 & x=1\\ \dfrac{\pi}{2} & x\in(1,+\infty)\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{\pi}{2}\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$，得 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

> 【评注】 在解本题要注意 $x\leqslant-1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ 不存在，及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

17. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2} & x<0\end{cases}$

则 $a=$ ________，$b=$ ________ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【答案】 $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{5}{3}$

【分析】 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须使 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

而
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+b\right]$$
$$=0+\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x}+b=2+b$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x+\sin x}{x}=2\lim_{x\to0^-}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$=2\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{3x^2}=2\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

因此，当 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{5}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

18. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(0)=1$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并满足 $f(2x)=$

$f(x)$,则在$(-\infty,+\infty)$上,$f(x)=$ ________.　　1264530

【答案】 1

【分析】 只需证明 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x)\equiv f(0)$. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$ $x\neq 0$,由 $f(2x)=f(x)$ 可得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{2^n}x\right)$$

在上式中,令 $n\to+\infty$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性,有 $f(x)=f(0)=1$.

19. 若 $f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ $g'(0)=g(0)=0$,则 $f'(0)=$ ________.

【答案】 0

【分析】 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\sin\frac{1}{x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-g(0)]\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

在上式中,因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$,又 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界量,无穷小量与有界量的乘积为无穷小量,因此,答案为零.

【评注】 求分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求,或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数:(1)$f(x)$ 在 x_0 处连续;(2)$f(x)$ 在 x_0 的某空心领域内可导,(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在,则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

但就本题而言,就不能用上述定理,因题设中没有"$g'(x)$ 在 $x=0$ 的某空心领域内存在"的条件.

20. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,则 $f'(x)=$ ________

【答案】 $\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

【分析】 当 $x\neq 0$ 时,

$f'(x)=\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}\right]'$

$$= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'$$

$$= (1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

当 $x=0$ 时,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}$$

$$=-\frac{e}{2}$$

【评注】 求幂指函数 $[u(x)]^{v(x)}$ 的导数,可化为对 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 求导,或用对数求导法.

21. 设函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,又 $F(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}F'(0)$

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(1-\cos x)-F(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{令 } 1-\cos x=u}\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{F(u)-F(0)}{u}=\frac{1}{2}F'(0)$$

22. $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=$ ________.

【答案】 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

【分析】 所求极限属"1^∞"型不定式,可化为: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)\right]}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{x}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{x}} \xlongequal{令\frac{1}{x}=t} \lim_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}$$

$$=[\ln f(x)]'\Big|_{x=a}$$

$$=\frac{f'(x)}{f(x)}\Big|_{x=a}$$

$$=\frac{f'(a)}{f(a)}$$

于是所求极限为 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

【评注】 (1) 本题也可用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 计算。

(2) 在上面的解法中，假定 $f(a)>0$，如果 $f(a)<0$，则令 $g(x)=-f(x)$，先求出 $\left[\frac{g\left(a+\frac{1}{x}\right)}{g(a)}\right]^x=e^{\frac{g'(a)}{g(a)}}$，再代回 $f(x)$ 即可。

(3) 下面方法是错误的：$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{f'(a+t)}{f(a+t)}}{1}=\frac{f'(a)}{f(a)}$，这是因为题设中没有 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续，就不一定有 $\lim\limits_{t\to 0}f'(a+t)=f'(a)$ 成立.

23. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2\arctan\frac{1}{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ \ln(1+x^2) & x>0\end{cases}$，$f(x)$ 可导，则 $\frac{d}{dx}f[\varphi(x)]=$ ________.

【答案】 $\begin{cases}f'\left(x^2\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2x\arctan\frac{1}{x}-\frac{x^2}{1+x^2}\right) & x<0\\ 0 & x=0\\ f'(\ln(1+x^2))\cdot\frac{2x}{1+x^2} & x>0\end{cases}$

【分析】 因 $f[\varphi(x)]$ 在分段点 $x=0$ 的两侧表达式不同，因此，要分别求出 $x=0$ 处的左右导数以及 $x>0$ 和 $x<0$ 时的导数。

$x=0$ 时，$f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处的左导数为：

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi(0)]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x^2\arctan\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x^2\arctan\frac{1}{x}\right)-f(0)}{x^2\arctan\frac{1}{x}}\cdot\frac{x^2\arctan\frac{1}{x}}{x}$$

$$= f'_-(0)\cdot 0 = 0$$

$f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处的右导数为：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f[\varphi(x)]-f[\varphi(0)]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f[\ln(1+x^2)]-f(0)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f[\ln(1+x^2)]-f(0)}{\ln(1+x^2)}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x}=f'_+(0)\cdot 0=0$$

$x>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[\varphi(x)] = f'(\ln(1+x^2))\cdot(\ln(1+x^2))'$

$$= f'(\ln(1+x^2))\cdot\frac{2x}{1+x^2}$$

$x<0$ 时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[\varphi(x)] = f'\left(x^2\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2\arctan\frac{1}{x}\right)'$

漏一层

$$= f'\left(x^2\arctan\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2x\arctan\frac{1}{x}-\frac{x^2}{1+x^2}\right)。$$

24. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x 处可导，$f(x)>0$　$g(x)>0$，则 $\left[\sqrt[g(x)]{f(x)}+log_{f(x)}g(x)\right]'$ = ________.

【答案】 $\sqrt[\varphi(x)]{f(x)}\left(\frac{f'(x)}{g(x)f(x)}-\frac{g'(x)\ln f(x)}{[g(x)]^2}\right)+\frac{g'(x)}{g(x)\ln f(x)}-\frac{f'(x)\ln g(x)}{f(x)[\ln f(x)]^2}$

【分析】 $\left(\sqrt[g(x)]{f(x)}\right)' = \left[e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}}\right]' = e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}}\left(\frac{\ln f(x)}{g(x)}\right)'$

$$= \sqrt[g(x)]{f(x)}\left(\frac{f'(x)}{g(x)f(x)}-\frac{g'(x)\ln f(x)}{[g(x)]^2}\right) \tag{1}$$

$$(\log_{f(x)}g(x))' = \left(\frac{\ln g(x)}{\ln f(x)}\right)' = \frac{\frac{g'(x)}{g(x)}\ln f(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}\ln g(x)}{[\ln f(x)]^2}$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)\ln f(x)}-\frac{f'(x)\ln g(x)}{f(x)[\ln f(x)]^2} \tag{2}$$

(1) + (2) 为所求。

25. 设曲线 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，则曲线在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为________.

【答案】 $y-e^{\frac{\pi}{2}}x+e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=0$

【分析】 $f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}$

又　$\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim\limits_{t\to x}x\frac{\cos t}{\sin t\cdot\cos t}=\frac{x}{\sin x}$