线性规划和整数规划

傅远德　编著

成都科技大学出版社

线性规划和整数规划

傅远德　编著

成都科技大学出版社

内容简介

本书介绍线性规划的基本理论和常用方法、线性整数规划求解的一般思想，并给出几种常见解法，还介绍了常遇到的大型或特殊结构形式的线性规划问题的分解方法和运输问题的特殊解法。书中注意数学模型的建立和几何直观解释，并选有一定例题和习题。书末附有部分习题答案。

本书为应用数学、管理工程、系统工程等专业（60～70学时）的教材，还可作为工科研究生的教材，也可供从事经营管理、系统工程、计量经济等科技人员使用。书中各种算法在成都科技大学应用数学系有IBM-PC微机适用的程序。

线性规划和整数规划
傅远德　编著
成都科技大学出版社出版、发行
四川省新华书店经销
成都科技大学印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张：8.625
1989年12月第1版　1990年3月第1次印刷
印数：1—2000　　字数：187千字
ISBN 7-5616-0394-0/O·35（课）
定价：1.91元

前言

本书介绍线性规划的基本理论和常用方法. 具有以下特点: 一、注重从实际问题入手, 分析如何建立反映该问题的线性规划模型. 在介绍解法时, 给出适合编写计算机程序的计算步骤, 对书中算法, 配备了相应的计算机程序软件供学习使用. 特别用BASICA语言写了单纯形法的源程序作为附录, 供学习者参考. 二、在选材上, 注意实用性. 如对大型或结构特殊的线性规划和灵敏度分析等都用一定篇幅介绍. 作为线性规划的扩充, 本书还介绍了实际应用较多的线性整数规划, 其主要阐述线性整数规划求解的一般思想及几种常见的解法.三、本书力求概念准确、叙述通俗, 并选配一定数量的例题,便于自学,每章后选有数量适度的习题. 书末附有部分习题答案.

本书是在成都科技大学应用数学专业使用八届的讲义基础上, 在有关老师和同学的大力协助下, 修改而成的. 只要具有线性代数基本知识的读者, 阅读本书应该是不困难的.

本书可作为应用数学、管理工程、系统工程、经济、工程各专业的教材, 也可作为工科研究生的教材. 讲授全书约需60课时. 它对从事管理科学以及计算机应用的实际工作者具有一定的参考价值.

由于编者水平有限, 本书可能还有不少缺点, 请广大读者提出批评指正.

编著者

1989.6.

目　　录

第一章　线性规划问题的数学模型

线性规划是运筹学的一个重要分支，它研究线性函数在线性等式或线性不等式的约束条件下的极值问题.

§1　生产组织与计划中的最大利润与最小成本问题

在企业经营管理中，如何以最小的消耗取得最大的经济效益，是每个企业应考虑的重要问题.换言之，在有限资源的条件下，如何组织安排生产才能获得最大利润.这类问题，通常可以归结为线性规划问题.

表1-1

单位产品需车间工时数（产品＼车间）	一车间	二车间	三车间
甲	2.0	3.0	1.0
乙	3.0	2.0	1.0
本月可用以加工的总时数	1500	1500	600

例1.1　某厂若只限于生产甲乙两种产品.已知生产甲产品每单位可获利润10元，生产乙产品每单位可获利润12元，甲乙两种产品的生产都必须经过厂里的三个车间，每单位产

品在每个车间里所需要的工时数和每个车间可以用来加工的总时数如表1-1.问应如何安排生产，才能使厂方获得最大利润.

为解决此问题，先建立反映它的数学模型.为此，首先分析，要作决策的量是什么？这里是一个月中，甲乙两种产品各生产多少单位？因此，我们设一月中生产甲产品为x_1个单位，乙产品为x_2个单位.其次分析问题达到的目标是什么？这里是利润最大.故设本月厂方所获利润为F.最后，分析以上变量(决策变量)x_1、x_2之间受到何种限制？目标F与x_1、x_2有何关系？得到以下数学模型

$\max F=10x_1+12x_2$，　　表示利润F最大；

$2x_1+3x_2\leqslant 1500$，　　一车间的可用工时数限制；

$3x_1+2x_2\leqslant 1500$，　　二车间的可用工时数限制；

$x_1+x_2\leqslant 600$，　　三车间的可用工时数限制；

$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，　　分别表示甲乙产品要么生产，要么不生产.

甲乙产品受到的限制条件，称为约束条件，简记为s·t (subject to的缩写).以上模型为求x_1，x_2使

$$\max F=10x_1+12x_2.$$

受到约束条件为 (s.t)
$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 1500,\\3x_1+2x_2\leqslant 1500,\\x_1+x_2\leqslant 600,\\x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

例1.2　设用A_1，A_2，…，A_m种原料，可以生产B_1，B_2…，B_n种产品，现有原料数、每单位产品所需原料数及每单位产品可获利润如表1-2所示.问应如何组织生产才能使利润

最大？

表1-2

单位产品所需原料 产品 / 原料	B_1	B_2	…	B_n	现有原料
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮			⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
单位产品可获利润	b_1	b_2	…	b_n	

通过分析决策变量、目标以及它们之间的关系和受到何种限制后，我们设决策变量x_j为生产产品$B_j(j=1, 2, \cdots, n)$的计划单位量，目标F表示总利润.则问题的模型为：

求一组变量$x_j(j=1, 2, \cdots, n)$的值，使总利润F最多，并受到现有原料数的限制，即

$$\max F=\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \quad ,$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \leqslant a_i, \quad i=1, 2, \cdots, m, \\ \text{(生产各种产品所需原料}A_i\text{的总数不得超过} \\ A_i\text{的现有数}a_i\text{)} \\ x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \cdots, n. \\ \text{(各种产品计划数不能为负数)}\end{cases}$$

其中符号Σ为求和符号.

§2 运输问题

实现物资的最佳调运，关系到原料产地、工厂、市场之间的协调传递，既能节约能源和时间，又能合理利用运输工具。

例2.1 某地有两个小型煤矿A、B，年产煤分别为60万吨、100万吨。它们担负供应三个炼钢厂的用煤任务。这三个炼钢厂每年需煤量，以及从煤矿A、B运1万吨煤到三个炼钢厂的运价如表1-3所示。问如何调运煤炭，才使总运费最省？

表1-3

单位运价(万元/万吨) 炼钢厂 / 煤矿	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	产量(万吨)
A	4	3.2	2	60
B	2.5	1.6	3	100
需要量(万吨)	45	75	40	160

运输问题中，一般取双下标变量作决策变量。设从煤矿A、B($A=1$，$B=2$)运往三个炼钢厂的煤炭数量为x_{ij}万吨($i=1,2$；$j=1,2,3$)，总运费为F万元，则模型为

$$\min F=4x_{11}+3.2x_{12}+2x_{13}+2.5x_{21}+1.6x_{22}+3x_{23},$$

$$\text{s.t}\quad \left.\begin{aligned}&x_{11}+x_{12}+x_{13}=60,\\&x_{21}+x_{22}+x_{23}=100,\end{aligned}\right\}\text{（从矿}A\text{、}B\text{运往三个炼钢厂煤的总量分别等于}A\text{、}B\text{年产量）}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}=45, \\ x_{12}+x_{22}=75, \\ x_{13}+x_{23}=40, \end{array}\right\}$$ （从矿A、B分别运往三个炼钢厂煤的数量应分别等于各自的需要量）

$x_{ij} \geqslant 0$, $i=1,2$; $j=1,2,3$（调运量不能为负数）.

一般，假定某种物资，有m个产地：A_1，A_2，…，A_m，联合供应n个销地：B_1，B_2，…，B_n.各产地产量，各销地销量，各产地至各销地单位运价如表1-4所示.问怎样的调运方案，才能使总的运费最少？

表1-4

单位运价（元/吨） 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量（吨）
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销量（吨）	b_1	b_2	…	b_n	

设x_{ij}表示由产地A_i供给销地B_j的物资数量，F为总运费.该运输问题，根据产销情况分为以下三种：

1）产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

此时的数学模型为

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \quad \text{（总运费最小）},$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n \quad \text{（满足各销地的需要量），}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\cdots,m \quad \text{（各产地的发出量等于产量），}$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \quad \text{（调运量不能为负数）.}$$

2） 产大于销，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

此时的数学模型为

$$\min F=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\qquad j=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_i,\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\qquad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n.$$

3） 销大于产，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

此时的数学模型为

$$\min F=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t}\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, \qquad j=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ \ i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n.$$

§3 投资问题

投资问题涉及的各种因素之间存在着互相制约的逻辑关系，建立这类问题的数学模型比较复杂.但它确是合理、有效地利用金融资源，以期获得最好的投资效果，提高经济效益的重要问题.这里仅举一例.

例3.1 某部门在一个三年计划期里，有四个建设项目可以投资：项目A从第一年到第三年每年年初都可以投资，预计每年一元投资可从投资项目中获得利润0.2元，每年又可重新将所获本利纳入投资计划；项目B需要在第一年年初投资，经过两年一元投资可获利润0.5元，又可重新将所获资金纳入投资计划，但用于该项目的最大投资额不得超过20万元；项目C需要在第二年年初投资，经过两年一元投资可获利润0.6元，但用于这个项目的投资额不得超过15万元；项目D需要在第三年年初投资，一元投资年终可获利润0.4元，但用于这个项目的投资额不得超过10万元.在这个计划期中，该部门第一年可供投资的资金有30万元.问怎样的投资方案，才能使该部门在这个计划期获得最大利润?

根据题意，设决策变量x_{1A}、x_{1B}分别表示第一年投资到

项目A、B的资金额；x_{2A}、x_{2C}分别表示第二年项目A、C的投资额；x_{3A}、x_{3D}分别表示第三年项目A、D的投资额．待确定的投资方案如表1-5．

表1-5

诸年各项目的投资额 \ 项目 / 年份	A	B	C	D
1	x_{1A}	x_{1B}	0	0
2	x_{2A}	0	x_{2C}	0
3	x_{3A}	0	0	x_{3D}

设利润为F，则

$$F=0.2x_{1A}+0.2x_{2A}+0.2x_{3A}+0.5x_{1B}+0.6x_{2C}+0.4x_{3D},$$

约束条件有：

$$x_{1A}+x_{1B}\leqslant 300000,$$

这表示第一年有A、B两个项目可投资，但投资总额之和受到现有资金30万元的限制；

$$x_{2A}+x_{2C}\leqslant 300000-x_{1B}+0.2x_{1A},$$

这表示第二年可投资的项目为A和C，用于投资总额不能超过现有资金；

$$x_{3A}+x_{3D}\leqslant 300000+0.2x_{1A}+0.2x_{2A}+0.5x_{1B}-x_{2C},$$

这表示第三年可投资的项目为A和D，用于投资总额不能超过现有资金；

$x_{1B}\leqslant 200000$，　　表第一年给项目B投资额限制；

$x_{2C}\leqslant 150000$，　　表第二年给项目C投资额限制；

$x_{3D} \leqslant 100000$,　　表第三年给项目 D 投资额限制.

还有非负性要求，即 $x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2C}, x_{3D} \geqslant 0$.

整理简化后得线性规划模型为

$$\max F = 0.2x_{1A} + 0.2x_{2A} + 0.2x_{3A} + 0.5x_{1B} + 0.6x_{2C} + 0.4x_{3D},$$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_{1A} + x_{1B} \leqslant 300000, \\ -0.2x_{1A} + x_{2A} + x_{1B} + x_{2C} \leqslant 300000, \\ -0.2x_{1A} - 0.2x_{2A} + x_{3A} - 0.5x_{1B} + x_{2C} + x_{3D} \leqslant 300000, \\ x_{1B} \leqslant 200000, \\ x_{2C} \leqslant 150000, \\ x_{3D} \leqslant 100000, \\ x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2C}, x_{3D} \geqslant 0. \end{cases}$$

§4　下料问题

设用某类型原材料(条材或板材)作m种零件毛坯，第i($i=1, 2, \cdots, m$)种零件的需要量为b_i.根据经验，在每一件原材料上都有n种不同的下料方式.已知第j种($j=1, 2, \cdots, n$)下料方式中，可得第i种零件毛坯a_{ij}个.如表1-6.问应怎样安排下料方式，既满足需要，又用的材料最省?

设按第j种方式下料的原材料总件数为x_j($j=1, 2, \cdots, n$)，F为所用原材料的总数，则模型为

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

$$\text{s.t} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

表 1-6

零件名称 \ 下料方式（各方式所下各零件的个数）	1	2	…	j	…	n	零件需量
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m

模型可以建立粗一点，也可以细一点.模型越细考虑因素越多，越接近真实，但求解可能越复杂，甚至无法求解.所以应当抓住最本质的因素，建立一个既简单又比较真实反映本质规律的模型.以上实际问题的建模，尽管具体内容不同，但从数学的角度看，其模型都是求一组变量，使其满足：

1) 这组变量要满足一些线性不等式或等式，即约束条件；

2) 都有一个目标函数—由这组变量构成的线性函数，问题为求满足约束条件的使目标函数达到最大值或最小值的一组变量.这类问题数学上把它叫做线性规划问题.因此，线性规划实际上就是求线性目标函数满足线性约束条件的条件