应用数学

主编　孙晓梅　杨　瑞

黄河水利出版社

应用数学

主　编　孙晓梅　杨　瑞

副主编　[illegible]儒[illegible]　[illegible]宇凌

丁焕棠　周成林

郑[illegible]　秦法存

黄河水利出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/孙晓梅，杨瑞主编．--郑州：黄河水利出版社，1999.2

高等学校教材

ISBN 7-80621-241-8

Ⅰ．应…　Ⅱ，①孙…②杨…Ⅲ．应用数学-高等学校-教材 Ⅳ．029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 02102 号

责任编辑：吕洪予　　　封面设计：郭　琦

责任校对：赵宏伟　　　责任印制：常红昕

出版发行：黄河水利出版社

地址：河南省郑州市顺河路黄委会综合楼 12 层　邮编：450003

印　　刷：黄河水利委员会印刷厂

开　　本：850mm×1168mm　1/32	印　张：13
版　　别：1999 年 2 月第 1 版	印　数：1-3000
印　　次：1999 年 2 月郑州第 1 次印刷	字　数：326 千字

定价：19.60 元

前　言

应用数学在许多学科都有着广泛的应用，作为高等院校各专业的一门基础课程，学习掌握其知识是很有必要的. 为了更好地适应教学需要，我们根据国家教委制订的有关教学大纲精神，组织部分院校的教师，编写了这本《应用数学》. 本书根据多年的教学经验和实际情况，着重介绍了线性代数、概率论与数理统计两部分的基本理论和方法，内容力求简明扼要，突出重点，通俗实用，既可作为大、中专院校各专业的教学用书，也可作为各类人员自学参考用书.

本书由孙晓梅、杨瑞主持编写. 参加编写人员（以章节为序）有：丁焕常（第一章），乔法有（第二章，第九章第四节），郑芬芸（第三章），孙晓梅（第四章，第十一章），董儒贞（第五章），杨瑞（第六章，第九章第一、二、三节），周成林（第八章第一、二、三、五节），张学凌（第七章，第十章，第八章第四节）.

本书的编写、出版得到了各参编院校及有关部门的大力支持，在此表示感谢. 由于本书的编印时间仓促，不当之处在所难免，恳请读者和有关专家、学者批评指正.

编　者

1998 年 12 月

目 录

第一章　行列式

§1.1　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

行列式是在解二元、三元线性方程组时引出的.

二元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法求出其解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

为了便于记忆和研究，我们用由四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 排成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

来表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

式（1.2）叫做二阶行列式，横排叫行，纵排叫列，$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的元素，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 叫做二阶行列式（1.2）的展

开式.二阶行列式表示的代数和可用画线(如图 1-1)的方法记忆,即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积.

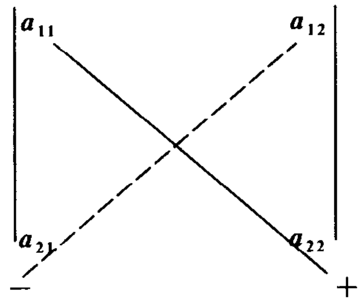

图 1-1

类似地

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

为方便起见,我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是方程组(1.1)的解可表示成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \quad (D \neq 0).$$

例 1 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-2) \times 4 = 23.$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = -6. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}3 & 2\\4 & -5\end{vmatrix}=3\times(-5)-2\times4=-23\neq0,$

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & 2\\-6 & -5\end{vmatrix}=7\times(-5)-2\times(-6)=-23,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 7\\4 & -6\end{vmatrix}=3\times(-6)-7\times4=-46.$$

因此方程组解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-23}{-23}=1,$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-46}{-23}=2.$$

例 3 设 $D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\3 & 1\end{vmatrix}$,问:① 当 λ 为何值时 $D=0$;② 当 λ 为何值时 $D\neq0$.

解 $D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\3 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3),$

令 $\lambda^2-3\lambda=0$,得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$.

因此可知

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时,$D=0$;

(2) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时, $D\neq0$.

二、三阶行列式

三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{1.3}$$

和二元线性方程组类似,用加减消元法可求出方程组(1.3)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{cases}$$

其中

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0.$$

为了记忆方便我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

表示 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

等式左边叫做三阶行列式，等式右边的代数式叫做这个三阶行列式的展开式，展开式共六项.

三阶行列式展开式也可以用画线（图 1-2）的方法记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是展开式中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是展开式中的负项.

我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

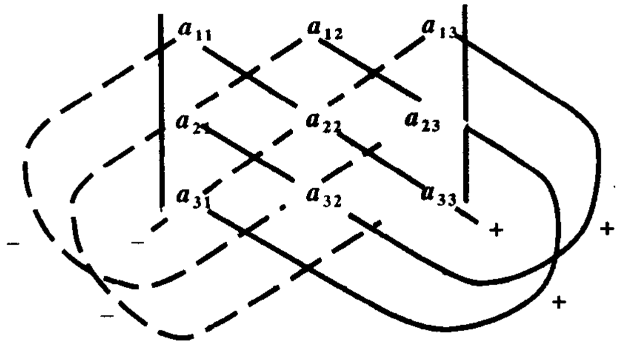

图 1-2

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

于是方程组（1.3）的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \qquad (D \neq 0). \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

例 4 求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 2\times4\times5+(-1)\times1\times2+2\times3\times(-6)-2\times1\times(-6)-(-1)\times3\times5-2\times4\times2$

$= 13.$

例 5 a,b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2+b^2,$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零.

例 6 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ x_1-2x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+5x_2-2x_3=-5. \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 22,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 13 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 44,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 13 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -22,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&-2&13\\3&5&-5\end{vmatrix}=66.$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=2,\\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=-1,\\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=3.\end{cases}$$

例 7 $\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}>0$ 的充要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}=a^2-1$，

$$a^2-1>0\Leftrightarrow|a|>1,$$

因此可得

$$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}>0\text{ 的充分必要条件是 }|a|>1.$$

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式

(1) $\begin{vmatrix}3&-1\\5&-4\end{vmatrix}$，　　(2) $\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}$，

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$,　　(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$,

(5) $\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -b^2 & a-b \end{vmatrix}$,　　(6) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,　　(2) $\begin{vmatrix} 6 & 19 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$,

(3) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$,　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ ka & kb & kc \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

3. 证明下列等式

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$,

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

4. 当 x 取何值时 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

5. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么?

6. 用行列式解下列方程组

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 36, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1, \\ x - 5y + 3z = 2, \\ x - y + z = -1. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} ax + by = c, \\ by + cz = a, \\ ax + cz = b. \end{cases}$ $(abc \neq 0)$

§1.2 n 阶行列式

一、排列与逆序

由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 n 级排列.

例如，1234 及 2431 都是 4 级排列，25413 是一个 5 级排列.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 $(i_s < i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n).$$

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数，则称此排列为奇排列，是偶数则称此排列为偶排列.

例如，排列 23154 中，2 在 1 前面，3 在 1 前面，5 在 4 前面，共有 3 个逆序，即 $N(23154) = 3$，所以 23154 为奇排列.

排列 $12\cdots n$ 的逆序数是零，是偶排列.

例如，由 1，2，3 这 3 个数码组成的 3 级排列共有 $3! = 6$ 种，其排列情况如表 1-1.

表 1-1

排　列	逆 序 数	排列的奇偶性
1 2 3	0	偶排列
1 3 2	1	奇排列
2 1 3	1	奇排列
2 3 1	2	偶排列
3 1 2	2	偶排列
3 2 1	3	奇排列

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换,称为一个对换,记为对换$(i_s,i_t)$.

例如，对排列 21354 施以对换（1，4）后得到排列 24351.

定理 1.1　任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

证　(1) 首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形，设排列为

$$AijB,$$

其中 A,B 表示除 i,j 两个数码外其余的数码;经过对换(i,j)，变为排列

$$AjiB.$$

比较上面两个排列中的逆序，显然，A,B 中数码的次序没有改变,并且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序,因此新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时),或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时)，所以它们的奇偶性相反.

(2) 在一般形式下，设排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB,$$

经过对换 (i,j) 排列变为

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB.$$

新排列可以由原排列中将数码 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换，变为

$$Ak_1k_2\cdots k_sjiB.$$

再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换得到,即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由 (1) 的结论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反.

定理 1.2　n 个数码$(n>1)$共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证　n 级排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!$,设其中奇排列为 p 个,偶排列为 q 个.