SHUXUE ZIXI YU FUDAO

数学

自习与辅导

初中代数

（第三册）

刘渝瑛 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

初中代数

（第 三 册）

刘渝瑛 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

初 中 代 数

（第 三 册）

刘渝瑛　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 5　字数 107,000

1985 年11月第 1 版　1985 年11月第 1 次印刷

印数 1—315,000

统一书号：13119·1259　　定价：0.75 元

前　言

本书是为密切配合新版初级中学课本《代数》第三册而编写的自习与辅助读物．内容与课本相对应，适合广大初中程度的学生或自学者阅读，亦可供家长和教师在辅导子女和学生时选用．

笔者在与各种程度的初中学生的接触中，深感打好基础的重要和艰巨．不少学生仍有片面追求学习程度深、进度快的倾向，他们不了解"欲高先低，欲速先缓"这样一个掌握知识的辩证规律．因此，在编写本书的过程中，笔者反复地研读课本，在如何帮助学生理解基本概念，掌握解题的基本思路和方法，提高综合应用能力等方面下了一些功夫．为此精心铺垫了若干"台阶"，以便使中等程度的学生在阅读本书后，能够把课本知识真正掌握，做到弄懂会用．

在体例编排上，全书共分成四章：数的开方、二次根式、一元二次方程、指数．

在每一章里，按内容要求以"学习指导与例题"的形式进行分节叙述．在例题后的[说明]中，或是归纳有关概念和解题技能，或是根据在教学实践中积累的素材指出常犯的错误．随后附有一定数量的"基本练习题"，帮助学生正确理解概念，掌握解题技巧．此外，各章还包括以下三种习题类型：

(一)复习练习题：大部分与课本复习题要求相当，但也有一部分比较灵活、需要综合思考的习题，起融会贯通本章知识的作用．

(二)自我检查题：相当于单元测验题，有助于学生自我检

测学习效果.

(三)综合练习题:相当于期中、期末考查题,以本章内容为主,兼顾前面各章内容,以“滚雪球”的方式对所学的知识进行多次反复,培养综合应用的能力.

各类习题在本书末均有答案与提示,供读者核对用.

编写这种形式的初中数学辅助读物,是一种新的尝试.限于笔者的经验和水平,书中定有不当之处,恳望读者不吝指正.

作 者

目　录

一、数的开方

本章的主要内容是数的开方的有关概念和实数的初步概念.通过本章的叙述,实现了数的代数运算和数的概念的初步完整化.

本章的重点是平方根的概念,难点是算术平方根的概念,关键是平方根与算术平方根的区别和联系.

学习本章时要注意新旧联系. 例如,开平方和平方是互逆的运算,联系平方运算来学习开平方运算,对于理解和掌握非负数才能开平方,正数有两个平方根等重要性质是很有帮助的. 又如,在有理数的基础上扩充了无理数之后形成了实数,联系有理数的有关概念和运算来学习实数的有关概念和运算,了解实数保留了有理数的哪些性质,又具有哪些有理数所没有的性质,对于初步掌握实数的概念也是很有帮助的.

1.1 平方根与算术平方根

学习指导与例题

如果 $x^2=a(a\geqslant 0)$,那么 x 叫做 a 的平方根,记作 $x=\pm\sqrt[2]{a}$,通常简单地记作 $x=\pm\sqrt{a}$.求一个数的平方根的运算叫做开平方运算,开平方运算和平方运算互为逆运算. a 叫做被开方数.

学习开平方运算必须注意下列两点:

第一，由于任何数的平方数是零或正数，也就是说，任何数的平方数都是非负数，因此只有非负数才能开平方．换句话说，负数不能开平方．

第二，由于两个互为相反的非零数的平方数是同一个正数，因此一个正数有两个平方根，其中一个是正数，一个是负数，它们互为相反数．由于零的相反数仍是零，因此零只有一个平方根，是零．在以前学过的所有运算中，结果都只有一个，而开平方运算的结果经常有两个（只有零开平方，结果也只有一个）．对于这一点，同学们在初学时要特别注意．

非负数 a 的非负的平方根，叫做 a 的算术平方根，记作 $\sqrt{a}$，读作“根号 a”．当 a 表示正数时，只要求出 a 的算术平方根 $\sqrt{a}$，便可以知道 a 的负的平方根 $-\sqrt{a}$；当 a 表示数零时，0 的算术平方根等于 0，即 $\sqrt{0}=0$，0 的平方根就是 0 的算术平方根．要记住，算术平方根是非负数．

例 1 说明 9 的平方根有两个，而且只有两个．

解 (1) 当 $x=3$ 或 $x=-3$ 时，$x^2=9$，$\therefore$ 3 和 -3 都是 9 的平方根；

(2) 当 $x\neq 3$ 且 $x\neq -3$ 时，

$$x-3\neq 0,\ \text{且}\ x+3\neq 0,$$

$\therefore\ x^2-9=(x-3)(x+3)\neq 0,$

即
$$x^2\neq 9,$$

$\therefore$ 3 和 -3 以外的任何数都不是 9 的平方根．

因此，9 的平方根有两个，而且只有两个．

说明 (1) 因为开平方和平方互为逆运算，所以应用平方运算进行开平方运算是计算或检验平方根时必须掌握的方法．

(2) 本例使我们确信，9 的平方根不多不少，恰有两个．

一般地，任何正数的平方根都恰有两个。

(3) 熟记1～19各个自然数的平方，对于求平方根是有益的，通常把有理数的平方叫做完全平方数．例如，0、0.01、$\frac{4}{9}$、1、$\frac{25}{16}$、2.56、81等等都是完全平方数．显然，完全平方数的平方根一定是有理数．

例2 指出下面几种表达方式有什么错误，并把结论改正：

(1) $\sqrt{16}=\pm4$； (2) 16的平方根是4；

(3) 16的算术平方根是$\sqrt{4}$．

解 (1) $\because$ $\sqrt{16}$表示16的算术平方根，算术平方根是一个非负数．

$\therefore$ $\sqrt{16}\neq-4$，应当改成：$\sqrt{16}=4$．

(2) $\because$ 16的平方根有两个，4只是其中一个算术平方根，-4也是16的平方根，

$\therefore$ 应当改成：16的平方根是4和-4．

(3) $\because$ 16的算术平方根记作$\sqrt{16}=4$，而$\sqrt{4}=2$，$\sqrt{16}\neq\sqrt{4}$，

$\therefore$ 应当改成：16的算术平方根是4．

例3 求下列各数的值：

(1) $\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2$的算术平方根；

(2) $-\sqrt{2.25}$；

(3) 平方等于10^{16}的数．

解 (1) $\because$ $\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{9}{49}+\frac{16}{49}=\frac{25}{49}$，

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49},\ \frac{5}{7}>0,$$

$\therefore\ \left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2$ 的算术平方根是 $\frac{5}{7}$.

(2) $\because\ (1.5)^2=2.25,\ 1.5>0$,

$\therefore\ \sqrt{2.25}=1.5$,

于是 $$-\sqrt{2.25}=-1.5.$$

(3) $\because\ (10^8)^2=10^{16}$,

$\therefore\ 10^{16}$ 的平方根是 $\pm10^8$，即平方等于 10^{16} 的数是 10^8 和 -10^8.

注意 在认真审题，看清求哪种平方根的前提下，以算术平方根为线索去求平方根，是求平方根的基本功；在初学求平方根时，必须紧紧扣住平方根的意义.

例 4 (1) $\sqrt{5^2}$ 是不是等于 $\sqrt{(-5)^2}$?

(2) $\sqrt{(-5)^2}$ 是不是等于 -5?

解 (1) $\because\ 5^2=(-5)^2=25$，而 $\sqrt{25}$ 表示 25 的算术平方根，25 的算术平方根只有一个(是 5)，

$$\therefore\ \sqrt{5^2}=\sqrt{(-5)^2}.$$

(2) $\because\ \sqrt{(-5)^2}$ 表示 $(-5)^2=25$ 的算术平方根，算术平方根是一个非负数，而 -5 是一个负数，

$$\therefore\ \sqrt{(-5)^2}\neq-5.$$

说明 有的同学以为 $\sqrt{(-5)^2}=-5$，这是由于对符号“$\sqrt{\quad}$”有误解. 事实上，被读成“二次根号”的符号“$\sqrt{\quad}$”，只是算术平方根的专用记号；它不表示负的平方根，也就不能表示正数的全部平方根. 所以，对任意实数 a，$\sqrt{a^2}$ 和 a 不一定相等，它们之间有什么关系，同学们可以进一步思考.

例 5 查表求下列各数：

(1) $\sqrt{14.44}$;

(2) $\sqrt{1.04049}$.

解 (1) 从表中标有字母"N"的这一直列中找出被开方数的前两位数 14，然后在标有"N"的横行里找到 4，行与列交叉处的数是 3.795，再在标有"N"的横行右面的修正值表部分找到 4，14 所在行与修正值表内的 4 所在列交叉处的修正值是 5，于是

$$\sqrt{14.44}=3.795+0.005=3.800.$$

(2) $1.04049\approx1.040$，从表中标有字母"N"的直列中找出被开方数的前两位数 1.0，然后在标有字母"N"的横行里找到 4，行与列交叉处的数是 1.020，因为被开方数经过四舍五入得到的近似值 1.040 的第四个有效数字是 0，不用再修正，因此

$$\sqrt{1.04049}\approx\sqrt{1.040}=1.020.$$

注意 第(1)题的结果 3.800 不能写成 3.8，因为根据四舍五入法，3.800 是从 3.7995 到 3.8004 之间的数的近似值，而 3.8 是从 3.75 到 3.84 之间的数的近似值，可见，3.800 的精确度高于 3.8。

第(2)题的被开方数 1.04049 在四舍五入时，根据精确到千分位(四位数学用表中，平方根表的被开方数保留四个有效数字，对 1.04049 来说，从左面开始，第四个有效数字位于千分位)的要求，只看万分位数字(4)决定"舍"或"入"．有的同学先把 9 进到万分位上，成为 1.0405，再把 5 进到千分位上，得出 1.041，是不符合四舍五入法的规定的．事实上，同学们不难看出，1.040 比 1.041 更接近于 1.04049，可见上述规定是合理的．

例 6 查表求下列各数的根：

(1) $\sqrt{0.5076}$；

(2) $\sqrt{5076000}$.

解 (1)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\sqrt{0.5076}} \arrow[d, "\text{小数点右移两位}"'] & = & \boxed{0.7124} \\ \boxed{\sqrt{50.76}} & \overset{\text{查表}}{=} & \boxed{7.124} \arrow[u, "\text{小数点左移一位}"'] \end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\sqrt{5076000}} \arrow[d, "\text{小数点左移六位}"'] & = & \boxed{2253} \\ \boxed{\sqrt{5.076}} & = & \boxed{2.253} \arrow[u, "\text{小数点右移三位}"'] \end{tikzcd}$$

说明 (1) 已知正数的小数点向右或者向左移动的位数是它的算术平方根的小数点相应地向右或者向左移动的位数的两倍.

(2) 从本例可以看出,被开方数的有效数字相同,它们的平方根的有效数字不一定相同.

(3) 被开方数的有效数字为三个或三个以下时,查表不需要修正;为四个时,查表需要修正;为五个或五个以上时,必须先四舍五入为四个有效数字的近似值,再查表.

(4) 在求平方根的过程中,估计根的位数与大致数值,可以防止和克服查表时出现较大的偏差. 第(1)题的 $0.5076\approx0.49$,因此可以估计 $\sqrt{0.5076}\approx0.7$,查表结果 $0.7124\approx0.7$,基本相符. 第(2)题的 5076000 和 4840000 比较接近,因此可以估计 $\sqrt{5076000}$ 和 2200 比较接近,查表结果为 2253,也基本相符. 倘若发现查表结果与估算结果极不相符,那么在估算合理可靠的前提下,查表中肯定产生了错误.

基本练习题1.1

1. (1) 任何一个数都能平方吗?一个数平方能得到几个二次幂?

(2) 任何数都能开平方吗?一个数开平方能得到几个平方根?

2. (1) 5^2 的平方根是什么?

(2) $-\sqrt{3}$ 是什么数的平方根?

(3) $(-7)^2$ 的算术平方根是什么?

3. 从式子 $\sqrt{a-3}=5-a$ 即可看出 a 的取值范围是什么?

4. 说明当 $a\neq0$ 时,a^2 的平方根有两个,而且只有两个?

5. 说出下列各数的平方数: 0.13, 1700, $\frac{12}{19}$, 0.014, $3\frac{1}{5}$, $\frac{15}{11}$, $3\sqrt{2}$.

6. 说出下列各数的算术平方根: 3.24, 625000000, $\frac{361}{14400}$, 0.0049, $3\frac{13}{81}$, 250.

7. 求证奇数的平方是奇数; 既是完全平方数又是奇数的数的平方根是奇数.

8. 求值:

(1) $\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{8}{11}\right)^2$ 的平方根;

(2) $-\sqrt{[-\sqrt{(-3)^2}]^2}$;

(3) 平方等于$(\sqrt{2})^4$的负数.

9. 查表求下列各数: $\sqrt{316.5}$, $-\sqrt{9.9855}$, $\sqrt{6123495}$, $\sqrt{0.017015}$, $-\sqrt{17015}$.

10. 已知 a、b、c 分别是 144、169、196 的算术平方根, 试求整式 $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$ 的值的平方根.

1.2 实　　数

学习指导与例题

例7 说明任何一个有理数都可以写成有限小数或者无

限循环小数的形式(把整数看作小数点后面为零的有限小数).

解 (1) 在整数后面加上小数点,然后写上0, 显然可以写成有限小数的形式.

(2) 设 $\frac{m}{n}$ 为任一分数(其中 n 是大于1的自然数, m 是不等于零的整数, m 与 n 互质).

① 若分母 n 不含有2和5以外的质因数, 以 $\frac{3}{1250}$ 为例, 分母 $1250=2\times5^4$. 分母和分子同乘以补因数 2^3, 分母就扩大为 10^4, 即 $\frac{3}{1250}=\frac{3}{2\times5^4}=\frac{2^3\times3}{2^3\times2\times5^4}=\frac{24}{10^4}=0.0001\times24=0.0024$, 可以写成有限小数的形式.

② 若分母 n 含有2和5以外的质因数, 以 $-\frac{1}{23}$ 为例, 先不考虑负号, 在作除法 $1\div23$ 的过程中, 首先可以看出, 在任何一步, 余数都不能等于零. 这样每步所得的余数是小于23的自然数, 所以最多能得到不同的余数不超过22个. 一旦出现相同的余数, 商的数字就出现循环, 这样无限继续下去, 就得到一个可写成无限循环小数形式的商. 事实上, $-\frac{1}{23}=-0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$, 恰好可以写成由22个数字组成一个循环节的无限循环小数的形式. 在除法运算过程中, 余数依次是10, 8, 11, 18, 19, 6, 14, 2, 20, 16, 22, 13, 15, 12, 5, 4, 17, 9, 21, 3, 7, 1, 然后周而复始, 无限地重复下去. 有趣的是: 22个不同的余数1～22全部出现.

综上所述, 任何一个有理数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式(把整数看作小数点后面为零的有限小数).

说明 本例在把分数设成 $\frac{m}{n}$ 时，括号内关于 m、n 的限制条件保证了分数 $\frac{m}{n}$ 是最简分数. 并使分类讨论时比较方便.

例 8 说明任何有限小数和无限循环小数都是有理数(小数点后面为零的有限小数看作整数).

解 (1) 小数点后面为零的有限小数看作整数，显然是有理数；小数点后面不等于零的有限小数$\Big($以 0.12345 为例：

$$0.12345=0.00001\times12345=\frac{12345}{10^5}\Big)$$

可以化成分数，所以也是有理数.

(2) 无限循环小数 $\Big($以 $0.1\dot{6}\dot{3}$ 为例：

设 $x=0.1\dot{6}\dot{3}=0.1636363\cdots$, 则 $100x=16.363636\cdots=16.\dot{3}\dot{6}$，相减得 $99x=16.2$, $x=\frac{16.2}{99}=\frac{162}{990}\Big)$，也可以化成分数，故也是有理数.

因此，任何有限小数和无限循环小数都是有理数(小数点后面为零的有限小数看作整数).

例 9 如果有这样的数，它的平方等于 2.

求证：$\sqrt{2}$ 可写成无限不循环小数的形式.

证明 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，可令 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$(其中 m、n 是自然数，m 和 n 互质). 则 $2=\frac{m^2}{n^2}$, $m^2=2n^2$, m^2 是偶数，当然 m 也是偶数(奇数的平方是奇数)，故 $m=2k$(k 是自然数)，于是得到 $2n^2=4k^2$, $n^2=2k^2$，从而得知 n 也是偶数. m 和 n 都是偶数，这与 m 和 n 互质矛盾，即 $\sqrt{2}$ 是有理数的假

设不能成立，也即 $\sqrt{2}$ 不能写成有限小数或无限循环小数的形式。所以 $\sqrt{2}$ 可以写成无限不循环小数的形式。

说明 (1) 例 7 和本例对 m 和 n 的限制条件为什么有所区别？请同学们仔细想一想。

(2) 本例对 m 和 n 的限制条件在证明中起了什么作用？这里作一些解释：从 $m^2=2n^2$ 推得 m^2 是偶数时，就用上了 m、n 是自然数的条件，没有这些条件，m^2 是偶数就得不到保证，举个反例：当 $n=\dfrac{1}{2}$ 时，从 $m^2=2n^2$ 就推不出 m^2 是偶数的结论。

(3) 从例 7 和例 8 可以知道，有限小数和无限循环小数统称为有理数，也就是说，无限不循环小数不是有理数。从例 9 又可以知道，无限不循环小数是客观存在的，我们把无限不循环小数称为无理数。$\sqrt{2}$ 就是无理数，$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$ 和 π 等数也都是无理数。有理数和无理数统称为实数。在实数范围内，不仅完全平方数可以开平方，而且其他正数也都可以开平方，例如 2 可以开平方，得到的平方根 $\pm\sqrt{2}$ 是无理数。

(4) 引进无理数以后，数的范围扩大为实数，其分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数（即有限小数或无限循环小数）}\\ \text{无理数（即无限不循环小数）；}\end{cases}$$

也可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\\ \text{负无理数。}\end{cases}\end{cases}$$

有理数大小的比较方法，绝对值与相反数的概念，有理数