随机过程及其应用

孙荣恒　编著

清华大学出版社

随机过程及其应用

孙荣恒　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是为理工科各专业的研究生和理科高年级本科生学习随机过程而编写的教材。全书共分 8 章,其内容依次为:预备知识、随机过程的基本概念和主要类型、离散参数马尔可夫链、泊松过程与更新过程、连续参数马尔可夫链、随机分析、平稳过程、鞅论初步及其应用。每章后面附有适量的习题。

书中概念的阐述和理论的推导比较详细、严谨,便于自学;强调实际应用。本书不仅是一本教材,也是科技人员的一本较好参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程及其应用/孙荣恒编著.—北京:清华大学出版社,2003
ISBN 7-302-07801-7

Ⅰ.随… Ⅱ.孙… Ⅲ.随机过程 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 116044 号

出 版 者:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**客户服务**:010-62776969
组稿编辑:刘建龙
文稿编辑:杨作梅
封面设计:陈刘源
印 刷 者:北京市通州大中印刷厂
装 订 者:三河市新茂装订有限公司
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开　　本:185×260　**印张**:15.25　**字数**:357 千字
版　　次:2004 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 7-302-07801-7/TN · 163
印　　数:1~4000
定　　价:23.00 元

前　　言

随机过程是随着 20 世纪初物理、化学、生物、通信、管理、控制论、规划论、排队论及信息论等学科的需要逐步发展起来的一门数学学科。其内容十分丰富,应用极其广泛。它的研究对象与初等概率论一样,也是随机现象的统计规律性。初等概率论研究的是随机现象的静态特性,而随机过程研究的是随机现象的动态特性,即随机现象的发展与变化过程。初等概率论是随机过程的基础,随机过程是初等概率论的重要分支。

本书是为理工科各专业研究生和理科高年级本科学生学习随机过程而编写的教材。全书共 8 章,其内容依次为:预备知识、随机过程的基本概念和主要类型、离散参数马尔可夫链、泊松过程与更新过程、连续参数马尔可夫链、随机分析、平稳过程、鞅论初步及其应用。预备知识主要叙述(初等)概率论的基本内容,对概率论了解比较多的读者可以跳过这一章,直接从第 2 章开始学习。第 2 章介绍随机过程的基本概念和主要类型,后面各章内容是第 2 章的深入和展开。如果对随机过程只要求一般了解,不想作深入的学习,阅读了第 2 章就可达到目的。此后可以根据不同的需要选读后面各章的内容。各章阅读顺序为:

$$1 \to 2 \to \begin{cases} 3 \to 5 \\ 4 \\ 6 \to 7 \\ 8 \end{cases}$$

每章后面附有适量的习题,书后附有答案。有些习题是正文的补充。全书约需 72 个学时,第 1 章到第 4 章约需 42 个学时,第 1 章到第 7 章约需 60 个学时。

本书的特点是:(1)起点低。具有初等概率论和矩阵论初步知识就可以阅读。(2)概念的阐述和理论的推导比较详细、严谨,便于自学。(3)强调实际应用。本书中有 80 多个例题,涉及多方面的应用,其中约有一半是关于实际应用的例题。这些例题不仅详细介绍了如何把一个实际问题转化为随机模型的思想和方法,还介绍了如何用随机过程的理论解决具体的实际问题。因此本书不仅是一本教材,也是从事实际工作的科技人员的一本较好的参考书。此外,作者力求在内容上深入浅出,在文字上简洁流畅。

自 1986 年至今,本书一直以讲义的形式在重庆大学使用,自 2000 年以来被重庆多所高校选为教材。本书是在讲义基础上经多次修改而成。

朱继生、谢盛荣、高世泽教授仔细阅览了初稿,提出了不少宝贵意见,作者在此表示衷心感谢!

本书虽经多年使用和多次修改,但是由于作者水平有限,书中一定存在不少缺点和错误,恳请读者批评指正。

作者
2004.1

目　录

第 1 章　预 备 知 识

我们认为读者具有初等概率论和矩阵论初步知识。为了以后各章能顺利进行，我们先对概率论中与本课程有关的内容作简要的回顾。

1.1　条件数学期望

1.1.1　概率论的基本概念

我们称随机试验 E 的最简单不能再分的每个结果为 E 的样本点，记为 ω 或 e。由所有样本点组成的集合 Ω 称为 E 的样本空间或必然事件。称不含样本点的空集 φ 为不可能事件。如果 Ω 中的某些子集[16]组成的集类 $\mathscr{F}$ 满足下列 3 个条件：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 如果 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$；

(3) 如果 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,3,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为 E 的事件域。称且仅称 $\mathscr{F}$ 中的元素为随机事件，简称为事件。

如果定义于 $\mathscr{F}$ 上的实值集合函数 P 满足下列 3 个条件：

(1) 如 $A \in \mathscr{F}$，则 $P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 设 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,3,\cdots$，且当 $i \neq j$ 时，$A_iA_j = \varphi$，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$。

则称 P 为概率测度，简称为概率。称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间。

如果定义于样本空间 Ω 上单值实函数 ξ 对任意实数 x，$\{\omega : \xi(\omega) < x\}$（简记为 $\{\xi < x\}$）均为事件，即 $\{\xi < x\} \in \mathscr{F}$，则称 ξ 为随机变量。称概率

$$F_\xi(x) \triangleq P\{\xi < x\}, x \in R \tag{1.1.1}$$

为 ξ 的分布函数。分布函数 $F_\xi(x)$ 有下列 3 个基本性质：

(1) 如果 $a < b$，则 $F_\xi(a) \leqslant F_\xi(b)$；

(2) $F_\xi(-\infty) = 0, F_\xi(+\infty) = 1$，其中 $F_\xi(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x), F_\xi(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(+\infty)$；

(3) $F_\xi(x - 0) = F_\xi(x)$。

如果随机变量 ξ 只能取可数多个不同的实数值，则称 ξ 为离散型随机变量。如果存在非负函数 $f_\xi(x)$，使得对任意 $x \in R$，有 $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t) \mathrm{d}t$，则称 ξ 为连续型随机变量。称 $f_\xi(x)$ 为 ξ 的密度函数。

随机变量 ξ 的 k 阶原点矩记为 $E(\xi^k)$，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x^k|dF_\xi(x)<+\infty$，则它定义为

$$E(\xi^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k dF_\xi(x)$$
$$=\begin{cases}\sum_i x_i^k P\{\xi=x_i\}, & \text{当 } \xi \text{ 为离散型且仅取值 } x_1,x_2,x_3,\cdots,x_i \text{ 时}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}x^k f_\xi(x)dx, & \text{当 } \xi \text{ 为连续型且有密度函数 } f_\xi(x) \text{ 时}\end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^k dF_\xi(x)$ 为勒贝格 - 司蒂阶(Lebesgue-Stieltjes)积分。

ξ 的一阶原点矩 $E(\xi)$ 称为 ξ 的均值或数学期望。如果 ξ 的函数 $g(\xi)$ 的数学期望存在，则有

$$E[g(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF_\xi(x) \tag{1.1.3}$$

如果 $E[\xi-E(\xi)]^k$ 存在，则称它为 ξ 的 k 阶中心矩。称 ξ 的二阶中心矩为 ξ 的方差，记为 $D(\xi)$ 或 $\sigma^2(\xi)$，即

$$D(\xi)=E[\xi-E(\xi)]^2 \tag{1.1.4}$$

设 ξ,η 均为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，则称 (ξ,η) 为二维随机向量或二维随机变量，(ξ,η) 的分布函数 $F_{\xi,\eta}(x,y)$ 定义为

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=P\{\xi<x,\eta<y\},\quad x,y\in R \tag{1.1.5}$$

如果 (ξ,η) 只能取多个不同的可数有序实数对，则称 (ξ,η) 为二维离散型随机向量。如果存在非负二元函数 $f_{\xi,\eta}(x,y)$ 使得对任意实数 x,y 有 $F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{\xi,\eta}(s,t)dsdt$，则称 (ξ,η) 为二维连续型随机向量，称 $f_{\xi,\eta}(x,y)$ 为 (ξ,η) 的密度函数。

如果对任意 $x,y\in R$，均有 $P\{\xi<x,\eta<y\}=P\{\xi<x\}P\{\eta<y\}$ 或等价地有 $F_{\xi,\eta}(x,y)\equiv F_\xi(x)F_\eta(y)$，则称 ξ 与 η 相互独立。如果 (ξ,η) 为连续型的，则 ξ,η 相互独立的充要条件是：在 $f_{\xi,\eta}(x,y)$ 的连续点 (x,y) 处均有 $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$。如果 (ξ,η) 为离散型的，则 ξ,η 相互独立的充要条件是：对任意实数 x,y 均有 $P\{\xi=x,\eta=y\}=P\{\xi=x\}P\{\eta=y\}$。

随机变量 ξ 与 η 的协方差记为 $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$，如果它存在，它由下式定义：

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=E\{[\xi-E(\xi)][\eta-E(\eta)]\} \tag{1.1.6}$$

而 ξ 与 η 之间的相关系数 $\rho(\xi,\eta)$ 由下式定义：

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}},\quad \text{其中 } D(\xi)D(\eta)>0 \tag{1.1.7}$$

如果 $\rho(\xi,\eta)=0$，则说 ξ 与 η 不(线性)相关，如果 $\rho(\xi,\eta)\neq 0$，则说 ξ 与 η 相关或相依。

二维以上随机向量有类似于二维随机向量的诸概念，这里就不再详述了。

1.1.2 条件数学期望

设 $A,B\in\mathscr{F}$，且 $P(B)>0$，则在事件 B 发生下，事件 A 发生的条件概率(记为 $P(A|B)$)定义为：

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.1.8}$$

设 ξ,η 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,由条件概率定义,在 $\eta=y$ 下,ξ 的条件分布函数记为$F_{\xi|\eta}(x|y)$,且定义它为

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y)=\begin{cases}\dfrac{P\{\xi<x,\eta=y\}}{P\{\eta=y\}},\text{当}(\xi,\eta)\text{ 为离散型且 }P\{\eta=y\}>0\text{ 时}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{f_{\xi,\eta}(t,y)}{f_{\eta}(y)}\mathrm{d}t,\text{当}(\xi,\eta)\text{ 为连续型且 }f_{\eta}(y)>0\text{ 时}\end{cases} \tag{1.1.9}$$

其中 $f_{\xi,\eta}(x,y)$为(ξ,η)的密度函数, $f_{\eta}(y)$为 η 的密度函数, 一般记$\dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)}$为$f_{\xi|\eta}(x|y)$,即 $f_{\xi|\eta}(x|y)=\dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)}$, 并称 $f_{\xi|\eta}(x|y)$为在 $\eta=y$ 下 ξ 的条件密度函数。

在 $\xi=x$ 下,η 的条件分布函数与条件密度函数类似可以定义。

由条件分布函数与数学期望的定义可给出条件数学期望的定义。

定义 1.1.1　如果$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\mathrm{d}F_{\xi|\eta}(x \mid y)<\infty$,则在 $\eta=y$ 下ξ 的条件数学期望(记为 $E(\xi|\eta=y)$)定义为

$$E(\xi \mid \eta=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_{\xi|\eta}(x \mid y) \tag{1.1.10}$$

并简记 $E(\xi|\eta=y)$为 $E(\xi|y)$。

当(ξ,η)为离散型且 $P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$ 时,则(1.1.10)式变为

$$E(\xi \mid y_j)=E(\xi \mid \eta=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{i|j} \tag{1.1.11}$$

其中 $p_{\cdot j}=P\{\eta=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},p_{i|j}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=P\{\xi=x_i \mid \eta=y_j\}$

当(ξ,η)为连续型时,(1.1.10)式变为

$$E(\xi \mid y)=E(\xi \mid \eta=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{\xi|\eta}(x \mid y)\mathrm{d}x \tag{1.1.12}$$

而在 $\xi=x$ 下,η 的条件数学期望有类似的定义。

例 1.1.1　设 $\xi P(\lambda_1),\eta P(\lambda_2)$,且 ξ 与 η 相互独立,求在 $\xi+\eta=k$(k 为非负整数)下 ξ 的条件数学期望$E(\xi|\xi+\eta=k)$。

解　因为 $\xi P(\lambda_1),\eta P(\lambda_2)$,且 ξ 与 η 独立,所以 $\xi+\eta P(\lambda_1+\lambda_2)$

从而$P\{\xi=i \mid \xi+\eta=k\}=\dfrac{P\{\xi=i,\xi+\eta=k\}}{P\{\xi+\eta=k\}}=\dfrac{P\{\xi=i\}\cdot P\{\eta=k-i\}}{P\{\xi+\eta=k\}}$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!}\Big/\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}=c_k^i\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-i}$$

$$i=0,1,2,\cdots,k \tag{1.1.13}$$

此示在 $\xi+\eta=k$ 下 $\xi\sim B(k,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$。所以

$$E(\xi\mid\xi+\eta=k)=\frac{k\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \tag{1.1.14}$$

因为 $E(\xi|y)$ 是 y 的函数，而 y 是 η 能取的值，故 $E(\xi|\eta)$ 为 η 的函数且满足：

当 $\eta=y$ 时，$E(\xi\mid\eta)=E(\xi\mid y)$，我们称 $E(\xi|\eta)$ 为在 η 下 ξ 的条件数学期望。可以证明，$E(\xi|\eta)$ 是随机变量，因此还可以对它求数学期望。由(1.1.3)得

$$E[E(\xi\mid\eta)]=\int_{-\infty}^{\infty}E(\xi\mid y)\mathrm{d}F_\eta(y) \tag{1.1.15}$$

定理 1.1.1 设 ξ,η,ζ 均为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，$g(x)$ 为实数域 R 上的连续函数，且 $E(\xi),E(\eta),E(\zeta),E[g(\eta)\xi]$ 均存在，则

(1)如果 ξ 与 η 相互独立，则 $E(\xi|\eta)=E(\xi)$。

(2)$E[E(\xi|\eta)]=E(\xi)$。

(3)$E[g(\eta)\xi|\eta]=g(\eta)E(\xi|\eta)$。

(4)$E[g(\eta)\xi]=E[g(\eta)E(\xi|\eta)]$。

(5)$E(c|\eta)=c$， c 为常数。

(6)$E[g(\eta)|\eta]=g(\eta)$。

(7)$E[(a\xi+b\eta)|\zeta]=aE(\xi|\zeta)+bE(\eta|\zeta)$，$a,b$ 均为常数。

(8)$E\{[\xi-E(\xi|\eta)]^2\}\leqslant E[\xi-g(\eta)]^2$。

证明 这里仅证(2)。

设 (ξ,η) 为离散型的，且 $P\{\zeta=x_i,\eta=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，则由(1.1.11)与(1.1.15)得

$$\begin{aligned}E[E(\xi\mid\eta)]&=\sum_{j=1}^{\infty}E(\xi\mid y_j)p_{\cdot j}=\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{i\mid j}\Big]p_{\cdot j}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}x_i\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\Big]p_{\cdot j}=\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{ij}\Big]=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\Big]x_i\\&=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{i\cdot}=E(\xi)\end{aligned}$$

如果 (ξ,η) 为连续型的，类似可证(2)。

由(2)与(1.1.3)以及(1.1.2)得

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\xi\mid y)\mathrm{d}F_\eta(y) \tag{1.1.16}$$

$$=\begin{cases}\sum_j E(\xi\mid\eta=y_j)P\{\eta=y_j\},\text{当}(\xi,\eta)\text{为离散型且}P\{\eta=y_j\}>0\text{时}\\ \int_{-\infty}^{\infty}E(\xi\mid\eta=y)f_\eta(y)\mathrm{d}y,\text{当}(\xi,\eta)\text{为连续型且}f_\eta(y)>0\text{时}\end{cases} \tag{1.1.17}$$

称上式为全数学期望公式。它是一个非常有用的公式。

其余证明可参考[16]。

1.1.3　全概率公式

设 ξ,η 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，$A\in\mathscr{F}$，记

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1,\omega\in A\\ 0,\omega\notin A\end{cases}$$

即
$$P\{I_A(\omega)=1\}=P(A),P\{I_A(\omega)\}=0\}=P(\overline{A})$$

称 $I_A(\omega)$为 A 的示性函数，并简记 $I_A(\omega)$为 I_A。因为 $E(I_A)=P(A)$，由全数学期望公式，令 $\xi=I_A$，则

$$\begin{aligned}P(A)&=E(I_A)=E[E(I_A\mid\eta)]=\int_{-\infty}^{\infty}E(I_A\mid\eta=y)\mathrm{d}F_\eta(y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot P(A\mid\eta=y)\mathrm{d}F_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A\mid\eta=y)\mathrm{d}F_\eta(y)\end{aligned}$$

我们称
$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A\mid\eta=y)\mathrm{d}F_\eta(y)\tag{1.1.18}$$

为全概率公式。

当 η 为离散型且仅取值 $y_1,y_2,y_3,\cdots,y_i$ 时，则(1.1.18)式变为

$$P(A)=\sum_{j=1}^{\infty}P(A\mid\eta=y_j)P\{\eta=y_j\}\tag{1.1.18′}$$

当 η 为连续型且有密度函数 $f_\eta(y)$时，(1.1.18)式变为

$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(A\mid\eta=y)f_\eta(y)\mathrm{d}y\tag{1.1.18″}$$

例 1.1.2　设 ξ,η 为相互独立的随机变量且分别服从参数为 λ_1,λ_2 的指数分布，求概率 $P\{\xi<\eta\}$。

解　由(1.1.18)式，得

$$\begin{aligned}P\{\xi<\eta\}&=\int_{-\infty}^{\infty}P\{\xi<\eta\mid\eta=t\}\mathrm{d}F_\eta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}P\{\xi<t\mid\eta=t\}\mathrm{d}F_\eta(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}P\{\xi<t\}\cdot f_\eta(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t})\lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}\tag{1.1.19}$$

例 1.1.3　设 λ 服从参数为 μ 的指数分布随机变量，$X(t)$为当 $\lambda=x$ 时服从参数为 xt 的泊松分布，求 $P\{X(t)=n\}$。

解　由(1.1.18)式得

$$\begin{aligned}P\{X(t)=n\}&=\int_{-\infty}^{\infty}P\{X(t)=n\mid\lambda=x\}\mathrm{d}F_\lambda(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{(xt)^n}{n!}f_\lambda(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{(xt)^n}{n!}\mu\mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\frac{\mu t^n}{n!}x^n\mathrm{e}^{-(\mu+t)x}\mathrm{d}x\qquad[\text{令}(\mu+t)x=y]\end{aligned}$$

$$=\frac{\mu t^n}{n!(\mu+t)^{n+1}}\int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy=\frac{\mu t^n \Gamma(n+1)}{n!(\mu+t)^{n+1}}=\frac{\mu t^n}{(\mu+t)^{n+1}}$$

例 1.1.4 设 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的泊松事件流：$P\{N(t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n=0,1,2,\cdots$。诸 Y_i 为独立同分布随机变量，且 $P\{Y_i=1\}=p, P\{Y_i=0\}=1-p$，而且诸 Y_i 与 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 独立，求 $P\{X(t)=n\}, n=0,1,2,\cdots$,

解 由全概率公式(1.1.18)得

$$\begin{aligned}
P\{X(t)=n\}&=P\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i=n\right\}=\sum_{k=n}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i=n \mid N(t)=k\right\} P\{N(t)=k\}\\
&=\sum_{k=n}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{k} Y_i=n\right\} P\{N(t)=k\}\\
&=\sum_{k=n}^{\infty} c_k^n p^n(1-p)^{k-n} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\\
&=e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^n}{n!}, n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

此示，$\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为参数是 $p\lambda$ 的泊松事件流(泊松过程)。

1.1.4 条件方差

定义 1.1.2 如果 $E\{[\xi-E(\xi\mid\eta)]^2\mid\eta\}$ 存在，则称它为在 η 下 ξ 的条件方差，记为 $D(\xi\mid\eta)$，即

$$D(\xi \mid \eta)=E\{[\xi-E(\xi \mid \eta)]^2 \mid \eta\} \tag{1.1.20}$$

类似地可定义在 ξ 下 η 的条件方差：

$$D(\eta \mid \xi)=E\{[\eta-E(\eta \mid \xi]^2 \mid \xi\}$$

定理 1.1.2 如果 $E(\eta^2)<\infty$，则

$$D(\eta)=E[D(\eta \mid \xi)]+D[E(\eta \mid \xi)] \tag{1.1.21}$$

证明 因为由定理 1.1.1 的(3)得

$$\begin{aligned}
&E\{[\eta-E(\eta \mid \xi)][E(\eta \mid \xi)-E(\eta)] \mid \xi\}\\
&=[E(\eta \mid \xi)-E(\eta)] E\{[\eta-E(\eta \mid \xi)] \mid \xi\}\\
&=[E(\eta \mid \xi)-E(\eta)][E(\eta \mid \xi)-E(\eta \mid \xi)]=0
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
E\{[\eta-E(\eta)]^2 \mid \xi\}&=E\{[\eta-E(\eta \mid \xi)+E(\eta \mid \xi)-E(\eta)]^2 \mid \xi\}\\
&=E\{[\eta-E(\eta \mid \xi)]^2 \mid \xi\}+E\{[E(\eta \mid \xi)-E(\eta)]^2 \mid \xi\}\\
&=D(\eta \mid \xi)+[E(\eta \mid \xi)-E(\eta)]^2
\end{aligned}$$

两边取数学期望，并利用定理 1.1.1 中的(2)得

$$D(\eta)=E[D(\eta \mid \xi)]+D[E(\eta \mid \xi)]$$

例 1.1.5(矿工脱险问题) 一矿工在有三个门的矿井中迷了路，第一个门通向一坑道，沿此坑道走 3 小时可使他到达安全地点，第二个门通向使他走了 7 小时后又回到原地

点的坑道,第三个门通向使他走了5小时后又回到原地点的坑道。如果任何时候他都等可能地选定其中一个门,试问他平均要花多少时间才能脱险?

解 设 ξ 表示他到达安全地点所花的时数,η 表示他最初选定的门的号数。显然

$$P\{\eta = 1\} = P\{\eta = 2\} = P\{\eta = 3\} = \frac{1}{3}$$

由全期望公式得

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{3} E(\xi \mid \eta = i)P\{\eta = i\} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} E(\xi \mid \eta = i)$$

因为 $E(\xi|\eta=1)=3, E(\xi|\eta=2)=7+E(\xi), E(\xi|\eta=3)=5+E(\xi)$

故得 $E(\xi)=\frac{1}{3}[3+7+E(\xi)+5+E(\xi)]$,即 $E(\xi)=15$(小时),所以他平均要花15小时才能脱险。

例1.1.6 设 ζ 是某区域某段时间内能产卵的雌虫数,ξ_i 是第 i 个雌虫的产卵数,η 是该区域中该段时间内的虫卵总数。如果每条雌虫产卵数是相互独立同分布的随机变量,且与 ζ 也相互独立,并由已往经验知:$D(\xi_1)=\sigma_{\xi 1}^2, E(\xi_1)=\mu_{\xi 1}, D(\zeta)=\sigma_\zeta^2, E(\zeta)=\mu_\zeta$,求 η 的数学期望和方差。

解 因为 $\eta = \sum_{j=1}^{\zeta} \xi_i$ 且

$$E(\eta \mid \zeta = n) = E\left[\sum_{j=1}^{\zeta} \xi_i \mid \zeta = n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = nE(\xi_1)$$

$$D(\eta \mid \zeta = n) = D\left(\sum_{i=1}^{\zeta} \xi_i \mid \zeta = n\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = nD(\xi_1)$$

所以 $E(\eta \mid \zeta) = \zeta E(\xi_1), D(\eta \mid \zeta) = \zeta D(\xi_1)$

由定理1.1.1的(2)得

$$E(\eta) = E[E(\eta \mid \zeta)] = E[\zeta E(\xi_1)] = E(\xi_1)E(\zeta) = \mu_{\xi_1}\mu_\zeta \tag{1.1.22}$$

由定理1.1.2得

$$\begin{aligned} D(\eta) &= E[D(\eta \mid \zeta)] + D[E(\eta \mid \zeta)] = E[\zeta D(\xi_1)] + D[\zeta E(\xi_1)] \\ &= E(\zeta)D(\xi_1) + D(\zeta) \cdot E^2(\xi_1) = \mu_\zeta \sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_\zeta^2 \mu_{\xi_1}^2 \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

1.2 特征函数与极限定理

1.2.1 特征函数

定义1.2.1 设 $F_\xi(x)$ 为随机变量 ξ 的分布函数,则称

$$E(e^{jt\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF_\xi(x), \quad 其中 j = \sqrt{-1}, t \in R$$

为 ξ 的特征函数,记为 $\varphi_\xi(t)$,即

$$\varphi_\xi(t) = E(e^{jt\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} dF_\xi(x), \quad t \in R$$

即 $\varphi_\xi(t)$是 $e^{jt\xi}$的数学期望。

当 ξ 为离散型随机变量且$P\{\xi = x_i\} = p_i, i = 1,2,\cdots$,时,则 ξ 的特征函数为

$$\varphi_\xi(t) = E(e^{jt\xi}) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i e^{jtx_i}$$

当 ξ 为连续型随机变量且有密度函数$f_\xi(x)$时,则 ξ 的特征函数为

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f_\xi(x) dx$$

设 ξ,η 均为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,则称

$$\zeta = \xi + j\eta, \quad j = \sqrt{-1}$$

为复随机变量,并定义 ζ 的数学期望为

$$E(\zeta) = E(\xi) + jE(\eta)$$

由于 $e^{jt\xi} = \cos t\xi + j\sin t\xi$,所以 $E|e^{jt\xi}| = 1$,从而特征函数 $\varphi_\xi(t)$总存在。

特征函数有下列性质:

(1)$|\varphi_\xi(t)| \leqslant \varphi_\xi(0) = 1$

(2)$\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$,其中$\overline{\varphi_\xi(t)}$为 $\varphi_\xi(t)$的共轭。

(3)设 a,b 均为常数,则 $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{jtb}\varphi_\xi(at)$

(4)$\varphi_\xi(t)$在实数轴上一致连续。

(5)$\varphi_\xi(t)$是非负定的。即对任意 n 个复数$z_1,\cdots,z_n$ 和实数$t_1,\cdots,t_n$ 有

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \varphi_\xi(t_r - t_s) z_r \bar{z}_s \geqslant 0$$

(6)如果随机变量 ξ 与 η 相互独立,则

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$$

(7)如果随机变量 ξ 的n 阶原点矩$E(\xi^n)$存在,则 $\varphi_\xi(t)$的 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$阶导数也存在,且

$$E(\xi^k) = \frac{1}{j^k}\varphi_\xi^{(k)}(0)$$

证明见[16]。

下面我们来介绍特征函数的反演公式。

我们知道,如果 ξ 是连续型随机变量,则几乎处处有$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x)$,其中 $F_\xi(x)$,$f_\xi(x)$分别为 ξ 的分布函数与密度函数。如果 ξ 是离散型随机变量,且 $P\{\xi = x_i\} = p_i$,$i = 1,2,\cdots$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,则 ξ 的分布函数为

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \varepsilon(x - x_i),\text{其中 } \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

因为在 $x \neq 0$ 处,函数 $\varepsilon(x)$的导数都存在且都是零。而在 $x = 0$ 处,在普通意义下,$\varepsilon(x)$的导数不存在,这是因为 $\varepsilon'_-(0) = 0$,$\varepsilon'_+(0) = +\infty$。然而在工程上,把$\frac{d\varepsilon(x)}{dx}$记成$\delta(x)$,

即 $\delta(x)=\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(x)}{\mathrm{d}x}$,称 $\delta(x)$ 为 *Dirac* 函数,简称为 δ—函数,实际上,$\delta(x)$ 已不是普通意义下的函数,它是一种广义函数。它有如下性质:

(1)当 $x\neq 0$ 时,$\delta(x)=0$,当 $x=0$ 时,$\delta(x)=\infty$。

(2)$\delta(-x)=\delta(x)$,即 $\delta(x)$ 是偶函数。

(3)对任意连续函数 $f(x)$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$①或者对任意 $a>0$ 有 $\int_{-a}^{a}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$。

有了 δ—函数,于是离散型随机变量 ξ 的分布函数 $F_\xi(x)$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}F_\xi(x)}{\mathrm{d}x}=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

类似于连续型随机变量的密度函数,我们称

$$f_\xi(x)\triangleq\frac{\mathrm{d}F_\xi(x)}{\mathrm{d}x}=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

为离散型随机变量 ξ 的密度函数。

由特征函数的定义知,对给定的随机变量的分布函数,可以惟一确定其特征函数,反之,如果我们知道了(离散型或连续型)随机变量的特征函数,也可以惟一确定它的分布函数。

定理 1.2.1　设 ξ 为离散型随机变量,其密度函数为 $f_\xi(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i)$,则其特征函数为

$$\varphi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}f_\xi(x)\mathrm{d}x$$

证明　因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}f_\xi(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\sum_i p_i\delta(x-x_i)\mathrm{d}x\\&=\sum_i p_i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=\sum_i p_i\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx_i}=\varphi_\xi(t)\end{aligned}$$

定理 1.2.2　设 $\varphi_\xi(t)$ 为(离散型或连续型)随机变量 ξ 的特征函数,$f_\xi(x)$ 为 ξ 的密度函数,则

$$f_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\varphi_\xi(t)\mathrm{d}t$$

证明　由特征函数定义,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\varphi_\xi(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}ty}f_\xi(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t(y-x)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\quad\left[\because\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}tx}\mathrm{d}t=2\pi\delta(x)\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(y)\cdot 2\pi\delta(y-x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(y)\delta(y-x)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

① 见复旦大学 1960 年编的《泛函分析》的第 131 页

如果 ξ 为离散型随机变量且有密度函数 $f_\xi(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(y)\delta(y-x)\mathrm{d}y=\sum_i p_i\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y-x_i)\delta(y-x)\mathrm{d}y$$
$$=\sum_i p_i\delta(x-x_i)=f_\xi(x)$$

如果 ξ 为连续型的，则其密度函数 $f_\xi(x)$ 几乎处处连续，且不连续点只能是第一类间断点，由 δ—函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(y)\delta(x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}[f_\xi(x+0)+f_\xi(x-0)]$$

由于 $f_\xi(x)$ 为满足 $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}f_\xi(t)\mathrm{d}t$ 的非负函数，且 $f_\xi(x)$ 至多有可列多个不连续点，故可以定义 $f_\xi(x)$ 在不连续点 x 处的值为 $\frac{1}{2}[f_\xi(x+0)+f_\xi(x-0)]$。从而定理得证。

推论 （惟一性定理）（离散型或连续型）分布函数 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 恒等的充要条件是它们所对应的特征函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 恒等。

证明 如果 $F_1(x)\equiv F_2(x)$，由特征函数定义知 $\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)$，反之，如果 $\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)$，由定理 1.2.2 知几乎处处有 $f_1(x)=f_2(x)$，其中 $f_i(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_i(x)$，$i=1,2$。故对任意实数 x，有

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}f_1(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}f_2(t)\mathrm{d}t=F_2(x)$$

例 1.2.1 设(1) $\varphi_\xi(t)=\cos t$，(2) $\varphi_\xi(t)=\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}$，$p+q=1,0<p<1$，求 $f_\xi(x)$。

解(1) $$f_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t(-1+x)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t(1+x)}]\mathrm{d}t=\frac{1}{4\pi}[2\pi\delta(x-1)+2\pi\delta(x+1)]$$
$$=\frac{1}{2}\delta(x-1)+\frac{1}{2}\delta(x+1)$$

由此知 ξ 为离散型随机变量，其分布律为

ξ	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

解(2) $$f_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\cdot\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}q^k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t(x-k)}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{pq^k}{2\pi}\cdot2\pi\delta(x-k)=\sum_{k=0}^{\infty}pq^k\delta(x-k)$$

所以 ξ 为离散型随机变量其分布律为 $P\{\xi=k\}=pq^k,k=0,1,2,\cdots$

例 1.2.2 设 $\varphi_\xi(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$，求 $f_\xi(x)$。

解 $$f_\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}tx}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{t-\mathrm{j}tx}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t(1+\mathrm{j}x)}\mathrm{d}x\right]$$