小数与百分数

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

小 数 与 百 分 数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

一九五七年·上海

小　数　与　百　分　数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新 知 識 出 版 社 出 版
(上 海 湖 南 路 9 号)
上海市書刊出版業營業許可証出 015 号

上海集成印制厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：2 3/4　字数：62,000
1957 年 1 月第 1 版　1957 年 1 月第 1 次印刷
印数：1—70,000 本

統一書号：13076·67
定　价：(7) 0.26 元

序　言

本会为了帮助教师学習苏联先進教学經驗，積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定編寫一套有关初、高中数学各科包括算術、代数、几何、三角的教学参考讀物，陸續出版，以便中学数学教师進一步研究和了解教材内容，从而更好地掌握教材的目的性。同时这套小册子也可供初、高中学生作为課外鑽研的补充讀物。我們希望通过这套小册子的出版，能促進数学界同志对中学数学教材的研究，并促進教学經驗的交流。

“小数与百分数”这本小册子，是根据“中学数学教学大綱”(修訂草案)中“小数”及“百分数”編寫的。首先它把小数定义为分数的特殊情况，把百分数定义为小数的特殊情况，从而說明分数的四則运算可以直接用到小数与百分数运算中；对于循环小数的形成和普通分数的关系，有較多的理論性敍述；最后根据实际情况配合誤差理論，講述近似数的运算。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經編輯組兩次討論，才确定初步提綱，然后分别由黃公安、胡冠瓊、尢彭莘諸同志提供材料，由范际平同志执筆寫成初稿，再經程其襄、楊荣祥、黃公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会

1956年10月

初中數学教学参考書目

算　術

整數

分數

小數与百分數

* 比例

代　數

有理數

有理整式的恆等变換

* 分式与比例

* 一元一次方程

* 一次方程組及開方

几　何

体面綫点

全等三角形

* 基本軌跡与作圖

* 平行四边形

* 圓

註：書名前有 * 符号者將在今后陸續出版

目　錄

一　小数的意义及其基本变换

在学習分数的时候，我們已經曉得分数 $\frac{m}{n}$，分母 n 可以是任何自然数。假如 n 是 10 的乘冪数卽 $10^1, 10^2, 10^3, \cdots\cdots$ 那末我們叫它做十進分数；而 n 是任何自然数的时候，便叫做普通分数。从这里很明顯地看到十進分数是普通分数的特殊情况，所以我們不能把十進分数和普通分数对立起來，而只能把十進分数和非十進分数(分母 n 不是 10 的乘冪数)加以区别。

例如　　　$\frac{45876}{100}$，$\frac{463}{1000}$ 都是十進分数。

按記数法由于

$$45876=4\times10000+5\times1000+8\times100+7\times10+6,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{45876}{100}&=\frac{4\times10000+5\times1000+8\times100+7\times10+6}{100}\\&=\frac{4\times10000}{100}+\frac{5\times1000}{100}+\frac{8\times100}{100}+\frac{7\times10}{100}+\frac{6}{100}\\&=4\times100+5\times10+8+7\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}.\end{aligned}$$

如果我們把 $\frac{1}{10}$ 記为 0.1，$\frac{1}{100}$ 記为 0.01，那末 $\frac{45876}{100}$ 可記为不帶有分母的形式卽 458.76。我們已經曉得 4 是百位，5 是十位，8 是个位；現在我們又知道后面的 7 是十分位，6 是百分位。后面的位数是前面整数位的自然延續，因而我們称它們为小数，用小数点“・”隔开个位和十分位。

一般說來，分数 $\frac{m}{10^n}$ 叫做十進分数或小数。我們可以寫做和的形式 $a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+a_{k-2}\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\frac{b_3}{10^3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{b_n}{10^n}$（这里 $a_k, a_{k-1}, a_{k-2}\cdots a_1, a_0, b_1, b_2, b_3,\cdots b_n$ 都是从 0 到 9 的整数），并且可以寫成不帶有分母的形式 $a_ka_{k-1}\cdots a_2a_1a_0.\,b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}b_n$。

又如果 $a_k, a_{k-1},\cdots, a_2, a_1, a_0$ 都是零时，則 $\frac{m}{10^n}$ 是个眞分数，我們叫它純小数。例如 $\frac{463}{1000}$ 即是。否則 $\frac{m}{10^n}$ 是个假分数，而可以表成为帶分数；我們叫它混小数，例如 $\frac{45876}{1000}$ 即是。但要注意如 $b_1, b_2, b_3,\cdots, b_n$ 都是零的时候，由于 $\frac{0}{10^1}=\frac{0}{10^2}=\cdots=\frac{0}{10^n}=0$ 那便是整数了。

我們不要認为 0.375 是小数，而 $\frac{375}{1000}$ 便不是小数。要曉得小数有兩种寫法，一种是不帶有分母的寫法，一种是帶有分母的寫法。0.375 便是不帶有分母的寫法，而 $\frac{375}{1000}$ 便是帶有分母的寫法。但今后提到小数时，我們总是寫成不帶有分母的形式。更要認清楚，我們如果把 0.375 改寫成 $\frac{375}{1000}$ 也不能說是化小数为普通分数。但由于 $\frac{375}{1000}$ 經过約分得 $\frac{3}{8}$，那就是說十進分数 0.375 或 $\frac{375}{1000}$ 可用非十進分数 $\frac{3}{8}$ 表示啊！又小数 0.375 如果省記为 .375，这是不好的，因为那样便不能明顯地表示这小数的整数部分是零了。

这样一來，分数（即这里所謂普通分数）的基本变換很自然地可以用到小数上去，而且我們还可以看到它是單純得多。讓我們先看假分数变換为帶分数，在这里是不成問題的，因为我們只要寫做不帶有分母形式便可以了。例如 $\frac{4670803}{1000}$ 寫做 4670.803 不是把整数分出來了嗎！反过來把帶分数变換为假分数的問題，

在这里如果用不帶有分母形式寫出來根本是不成問題的，例如 $203\frac{7465}{10000}$ 只要寫做 203.7465 便好了。

由于分数基本性質是分数运算的基礎，讓我們看一看这个性質用到小数是什么情况。假如我們把十進分数的分子分母同乘以 10，100，1000，……

例如 $\frac{478}{100}=\frac{4780}{1000}=\frac{47800}{10000}=\frac{478000}{100000}=\cdots\cdots$

如果改寫做不帶有分母的形式便是

$$4.78=4.780=4.7800=4.78000=\cdots\cdots$$

因而我們獲得小数的一个主要特性，**即在小数点后最右一数字之右可以添上無論多少个零來做为小数位中的数字。**

例如　35.608＝35.6080＝35.60800＝35.608000＝……

現在我們要問：在小数 35.608 的左面能不能任意添若干个零呢？我們看整数 967 如果在左面添零，即 0967，00967，000967，数的个位仍是 7，十位仍是 6，百位仍是 9，它的值不变，自然是可以的。因而我們要把小数 $23\frac{34}{10000}$ 寫做不帶分母的形式的步驟是 $23\frac{34}{10000}=23\frac{0034}{10000}=23.0034$。同时可以看到整数的右面只要使用小数点隔开，自然也可以任意添置若干个零。

例如　690＝690.0＝690.00＝690.000＝……

由于小数的分母是10的乘幂，有了这个主要特性，我們很容易把分母不同的小数進行通分。例如，小数 8.46 和小数 13.7965，很清楚第一个小数的分母是 100，第二个小数的分母是 10000。由于 10000 是 100 的倍数，自然是它們的最小公分母，因而第一个小数的分母需要乘以 100，那末它的分子也需要乘以 100，我們只要在小数的右面添上兩个零变为 8.4600 便好了。那就是說只要加寫对应个数目的零，便可導得几个有公分母的十進分数。

例如　　　　2.3,　3.58,　4.6079.

$$2.3=2.3000,$$

$$3.58=3.5800.$$

反过來說，小数 $2.85000=\frac{285000}{100000}=2.85$，可以闡明小数約分的法則。所以根据上面所講的小数的主要特性來進行小数的約分和通分是非常簡單的。又因为小数的变換有它的独特性，也可以闡明我們單独学習小数的正确性。

为了比較分数的大小，必須經过通分手續，变換为共同的分母而按照分子的数值來判断它們的相等或大小。上面我們說明了小数的通分的簡單步驟，即对于小数点后較少的数字的小数加寫若干个零，使得它們小数点后有相同个数的数字。根据同分母分数相等和比較大小的法則，我們只要看分子相等和大小关系，便可以判断小数相等和大小关系。例如 0.34 及 0.33987。經过通分手續 $0.34=0.34000$，由于它們的公分母都是 100000，0.34000 的分子是 34000，0.33987 的分子是 33987，而 $34000>33987$，故 $0.34>0.33987$。同样地我們可以判定 $5.3>4.2756$，$54.096<54.1$ 等等。

由于通常小数总是用不帶有分母的形式寫出，所以上面所講的通分手續和比較通分后的分子数值的步驟都可以省去。我們只要回想到整数的相等和大小比較的法則，即可得小数的相等和大小比較的法則如下：

1. 兩个小数如果表示它們的各对应数位的数字完全相同而且小数点也在相同的位置的时候，那末它們便相等。

2. 兩个小数其整数部分較大的数大；如整数部分相同，其十分位数較大的数大；如十分位数也相同，則百分数較大的数大。依次类推。

从这里我們可以看到小数点的移动是会影响数的大小。很明顯地假如我們將小数点向右移动一位，原來整数部分个位数变为十位数，十位数变为百位数，依次数推；而十分位数变为个位数，百分位数变为十分位数，依次类推。由于各位数字都擴大了10倍，它們的和卽原数自然也擴大了10倍。一般說起來，如果將小数点向右移动 n 个位置，那末原数一定是擴大 10^n 倍。例如將 8.0964 擴大 1000 倍，只要將小数点向右移动三个位置，卽变为 8096.4。反过來說，假如我們將小数点向左移动 n 个位置，那末原数一定是縮小 10^n 倍。例如將 856.4 縮小 100 倍，只要將小数点向左移动二个位置卽变为 8.564。又如要將 42.326 縮小 1000000 倍，只要將小数点向左移动 6 个位置，但因原数小数点的左面僅有 2 个数字，我們可以先把原数寫成 0000042.326 再將小数点向左移动 6 个位置卽变为 0.000042326。

如果我們把整数看做小数（个位数后存在着小数点），由于在整数的左面和小数点的右面都可以添加任意个零，所以把整数擴大或縮小 10 倍，100 倍，1000 倍，…… 也是只要將小数点向右或向左移动 1, 2, 3,……位就好了。例如將 48 擴大 1000 倍先寫做 48.000 再將小数点向右移三个位置就得到 48000。又如將 236 縮小 1000 倍，先寫做 00236.0 再將小数点向左移四个位置就得到 0.02360, 也卽 0.0236(經过約分手續)。

我們又可以看到如果一个数的小数点后面有 n 个数，現在去掉小数点以后，这个数便应当擴大 10^n 倍。例如去掉 36.890 的小数点得 36890 是比較原数擴大 $10^3=1000$ 倍。

这种小数点的向右或向左移动使得一个数擴大或縮小 10 倍，100 倍，1000 倍，……，对于十進制度量衡中名数的轉化为較低級單位或較高級單位以及复名数和單名数的互化，起了一个很顯著的作用。

例一 將 0.026756 公噸表做較低級的名数。

【解】 由于 1 公噸等于 10 公担，所以如果要把 0.026756 公噸化为公担，就需要用 10 乘，即將小数点向右移一个位置便可以了。即

0.026756 公噸 = 0.26756 公担。

同样由于 1 公担等于 100 公斤，1 公斤等于 1000 公分，因得

0.26756 公担 = 26.756 公斤 = 26756 公分。

例二 將 975032.4 平方公分化为較高的單位。

【解】 由于面積的進率是 100，我們只要用 100 接連地去除它，便可將平方公分化为平方公寸，平方公尺及平方公丈等，也即接連地將小数点向左移动兩个位置就好了。即

975032.4 平方公分 = 9750.324 平方公寸
= 97.50324 平方公尺
= 0.9750324 平方公丈。

例三 將复名数 3 公里 8 公引 5 公丈 7 公寸 4 公分化为單名数。

【解】 由于進率是 10，我們只要適当地放置小数点即可獲得所需要的單名数。例如我們需要用公尺表示这个复名数得 3850.74 公尺，我們需要用公里表示这个复名数得 3.85074 公里，我們需要用公寸表示这个复名数得 38507.4 公寸。

例四 將單名数 56708 公勺化为复名数。

【解】 因为 1 公升 = 100 公勺，所以

56708 公勺 = 567.08 公升
= 5 公石 6 公斗 7 公升 8 公勺。

从上面看到小数的变換和小数的大小比較是非常簡便的，这是由于我們所采用的記数法是十進位而且用十進分数做小数的定义。假如我們是用十二進位記数法并且仍然用十進分数做

小数定义，那就丧失小数的主要特性而不会產生上面所講的簡便情况。但在十二進位記数法中我們如果用 12^n 做小数的分母也会發生同样的簡單情况。所以一般說起來，小数的定义是与所采用的記数法的底有密切关系的。假如 k 是記数法的底則分数

$$\frac{a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots\cdots+a_2k^2+a_1k+a_0}{k^m}=\frac{N}{k^m}$$

叫做制度分数。例如 470032.25 是以 8 为底的記数形式，則

$$470032.25=4\times8^5+7\times8^4+3\times8+2+\frac{2}{8}+\frac{5}{8^2}.$$

很明顯地在十進位記数法中制度分数的分母是 10 的乘冪数，所以特称为十進分数。

二　小数的四則运算

1. 小数加減法.

分数的加減法法則我們已經很熟悉，分母如果相同，只要做分子的加減法也就是整数加減法；分母如果不相同，先通分，再按同分母的加減法法則运算. 因而我們知道，如果小数点的后面位数相同，那就是同分母的十進分数相加；如果小数点的后面位数不相同，那就是異分母的十進分数相加. 又由于小数的通分只要添寫对应个数的零，我們也可以想像着零的增添而不一定要实际寫出來. 小数点的前面是个位，再前面是十位、百位等，它的后面是十分位，再后面是百分位、千分位等，那就是說小数点后面的——十分位，百分位，千分位等是整数数位的延續. 我們运算小数的加減法，只要对齐小数点即对齐数位來做加減运算，也就是說小数的加減法可以像整数的加減法一样的來進行.

例一　　$815.32+6.7932+0.405$

【解】　布草式如下：

$$\begin{array}{r} 815.32 \\ 6.7932 \\ +\quad 0.405 \\ \hline 822.5182 \end{array}$$

$\therefore$　　$815.32+6.7932+0.405=822.5182.$

例二　　$56.6-6.579$

【解】　布草式如下：

$$\begin{array}{r} 59.6 \\ -\ \ 6.579 \\ \hline 53.021 \end{array}$$

$\therefore$ $59.6-6.579=53.021.$

例三 $8-6.704$

【解】布草式如下

$$\begin{array}{r} 8 \\ -\ 6.704 \\ \hline 1.296 \end{array}$$

$\therefore$ $8-6704=1.296.$

小数本質上是分数，加減法的运算法則又与整数的加减法的运算法則一样，所以加法交換律及加法結合律对于小数仍然是適合的，而差的性質对于小数也是適用的。因而只要我們能够灵活地运用它們，这对于某些小数加減做起來要簡便得多。

例一 $7.65+9.38+4.35=(7.65+4.35)+9.38$
$=12+9.38$
$=21.38.$

例二 $(15.83+9.76)+4.17=15.83+9.76+4.17$
$=(15.83+4.17)+9.76$
$=20+9.76$
$=29.76.$

例三 $3.98+4.67-1.98=(3.98-1.98)+4.67$
$=2+4.67$
$=6.67$

例五 $(53.75-24.98)-23.75=(53.75-23.75)-24.98$
$=30-24.98$
$=5.02.$

例六　　$32.98+12.29=(33-0.02)+12.29$

$$=(33+12.29)-0.02$$

$$=45.29-0.02$$

$$=45.27$$

例七　　$24.86-9.97=24.86-(10-0.03)$

$$=(24.86-10)+0.03$$

$$=14.86+0.03$$

$$=14.89.$$

2. 小数乘法

讓我們先运算 0.067×12。把 0.067 寫做帶有分母的形式卽

$$\frac{67}{1000}\times12.$$

按分数乘法法則得

$$\frac{67\times12}{1000}=\frac{804}{1000}.$$

再將乘積寫做不帶有分母的形式得 0.804。

$$\therefore\qquad 0.067\times12=0.804.$$

可以看到積的小数点右面的位数和被乘数的小数点右面的位数是一样的，而求積的各位数时，实际上做的是整数乘法，卽

$$67\times12.$$

再看 0.597×0.68，我們可將乘数擴大 100 倍，被乘数縮小 100 倍，由于它的積不起变化，而將这个例子变为和上面同样的情況。卽

$$0.597\times0.68=0.00597\times68.$$

現在被乘数 0.00597 是五位小数，它的積也应当是五位小数。而求積的各位数时实际上仍然只要做整数乘法 597×68 就可以了。

由于 $$597\times 68=40596.$$

$$\therefore \qquad 0.597\times 0.68=0.40596.$$

又如果把 0.597, 0.68 都寫做帶有分母的形式卽

$$\frac{597}{1000}\times\frac{38}{100}.$$

按分数乘法法則得

$$\frac{597\times 68}{1000\times 100}=\frac{40596}{100000}.$$

再將乘積寫做不帶有分母的形式得 40596.

$$\therefore \qquad 0.597\times 0.68=0.40596.$$

可以看到实际上是做整数乘法卽 597×68. 这样一來，由于被乘数擴大了 10^3 倍，乘数擴大了 10^2 倍，它的乘積較原來乘積擴大了 $10^3\times 10^2=10^5$ 倍，因而我們应当把所得乘積 40596 縮小 10^5 倍，卽 0.40596 才是原來的乘積. 所以小数乘法归結到整数乘法，再將被乘数与乘数中小数位数的和作为乘積的小数位数卽可.

如果我們配合十進制的度量衡制講述，可以看到这种变换是有实际意义的.

例如 一尺布賣 0.59 元，現買 0.68 尺布，問需多少元?

$$\because \qquad 0.59\text{ 元}=5900\text{ 毫}, \quad 0.68\text{ 尺}=68\text{ 分}.$$

布 1 分長的价是

$$5900\text{ 毫}\div 100=59\text{ 毫}.$$

布 68 分長的价是

$$59\text{ 毫}\times 68=4012\text{ 毫}=0.4012\text{ 元}.$$

卽 $$0.59\text{ 元}\times 0.68=0.4012\text{ 元}.$$

一般說起來，求小数 α, β 的乘積，且

$$\alpha=\frac{A}{10^m}, \quad \beta=\frac{B}{10^n}$$