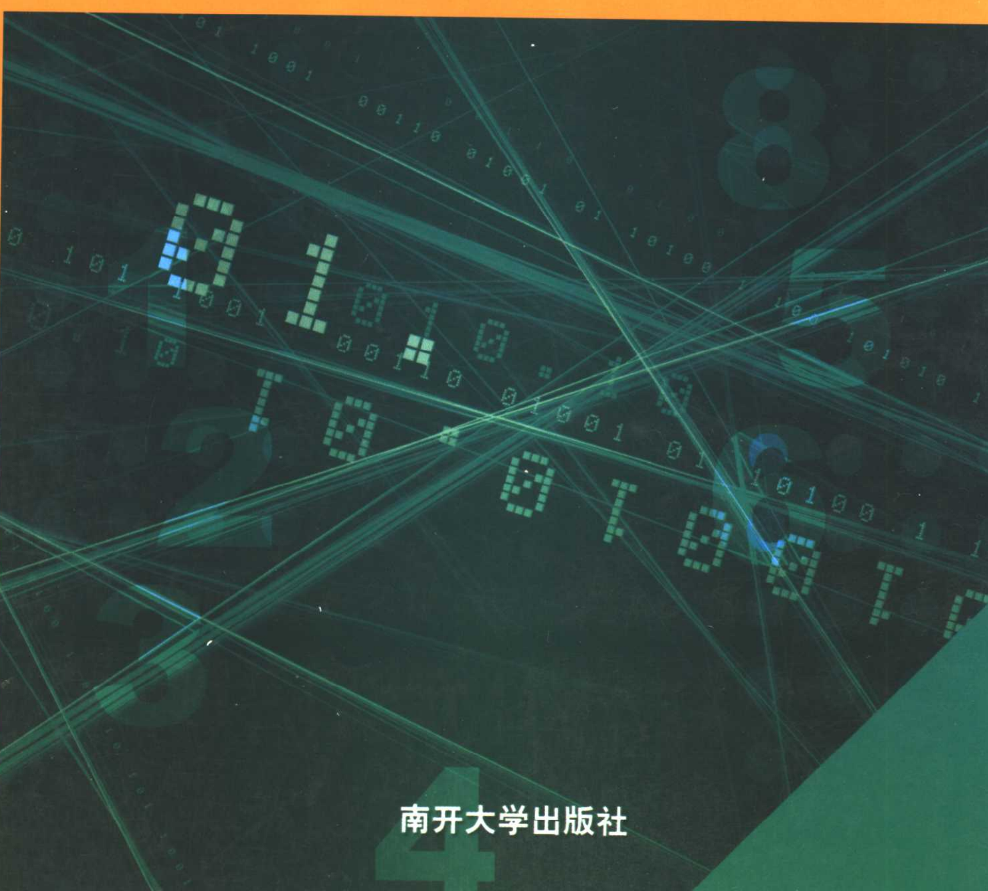
高等学校工科类专业基础课教材

GONGCHENG SHUXUE JICHU

工程数学基础

杨永发　金大永　于慎根　编著



南开大学出版社

工 程 数 学 基 础

杨永发　金大永　于慎根　编著

南 开 大 学 出 版 社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础 / 杨永发，金大永，于慎根编著．—天津：南开大学出版社，2003.11
ISBN 7-310-01977-6

Ⅰ．工…　Ⅱ．①杨…②金…③于…　Ⅲ．工程数学—高等学校—教材　Ⅳ．TB11.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 069655 号

出版发行　南开大学出版社
地址：天津市南开区卫津路 94 号　邮编：300071
营销部电话：(022)23508339　23500755
营销部传真：(022)23508542
邮购部电话：(022)23502200

出版人　肖占鹏
承　印　南开大学印刷厂印刷
经　销　全国各地新华书店
版　次　2003 年 11 月第 1 版
印　次　2003 年 11 月第 1 次印刷
开　本　880mm×1230mm　1/32
印　张　16.5
字　数　472 千字
印　数　1—4000
定　价　28.00 元

内容提要

本书是为工科大学“工程数学基础”课程编写的教材，内容共分为16章，包含“向量分析与场论”、“复变函数论”和“积分变换”三部分内容。第一章至第六章为向量分析与场论，内容包括：向量与向量函数分析、数量场、向量场、微分形式的外微分及其应用、三种特殊形式的向量场和正交曲线坐标系；第七章至第十四章为复变函数论，内容包括：复数与平面点集、解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数表示、残数及其应用、保形映射和解析开拓；第十五章、第十六章为积分变换，分别介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换的理论及应用。各章末附有适量的习题，书末另附有习题参考答案。书末还附录有哈密尔顿算子和傅里叶变换简表，拉普拉斯变换简表，供读者查阅使用。

本书内容丰富，选材适当，便于教学，可作为高等工科院校教材，适合机、电类及物理类专业使用，也可供工程技术人员参考阅读。

前　言

本书是为高等工科院校编写的工程数学基础课程的教材，内容包含向量分析与场论、复变函数论、积分变换三部分。众所周知，上述三门课程（统称为工程数学）是工科大学的重要的数学基础理论课，与后续专业课联系非常紧密。例如，向量分析与场论是讨论电磁场和电磁波问题的基础，而积分变换的方法早已成为机械设计、自动控制，电工、电子学方面不可缺少的运算工具。复变函数则一方面为积分变换提供了必要的理论基础，另一方面它自身又在诸多的自然科学领域，如理论物理、流体力学、空气动力学、地质学等有着广泛的应用。我们编写本书，就是为了适应教学改革的发展，希望能为本课程提供一本系统完整的教学用书。编写过程中，我们一方面吸收了国内外同类教材的优点，另一方面又融合了我们自己长期从事该课程教学的经验体会，力争做到思路清晰，推证简洁，且具有一定的可读性。

本书共分为 16 章。第一章为向量分析的内容，第二章至第六章为场论，第七章至第十四章为复变函数论，第十五章和第十六章合为积分变换，分别介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换。各章末均有适量的习题，帮助读者理解基本概念和基本方法。书末附有习题参考答案，另有三个附录，分别为哈密尔顿算子、傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表，供读者查阅使用。

作为教材，讲授本书约需 90 学时，删掉一些内容，如第六章、第十三、十四章及第十一、十五章的部分内容，也可以在 64 学时内完成主要内容的教学。本书各部分也可单独使用，向量分析与场论约需 16～24 学时，复变函数论约需 32～46 学时，积分变换约需 16～20 学时。

本书出版过程中，南开大学出版社李正明、莫建来、李冰老师做了大量艰苦细致的工作，作者对此表示由衷的感谢。

由于学识和水平所限，书中难免有错、漏和不完善之处。我们热切期望使用本书的读者批评、指正。

我们的电子邮箱地址是：gcsx4470@eyou.com。

编　者

2003年5月于天津

目　　录

第一章　向量与向量函数分析

向量与向量函数是研究物理场问题的重要工具．本章我们介绍向量与向量函数分析的一般结果．

§1.1　向量及其运算

1.1.1　向量

设 R^3 表示三维欧氏空间，$\boldsymbol{P}$ 为 R^3 中一点，以原点 O 为起点，$\boldsymbol{P}$ 为终点的向量记为 $\boldsymbol{r}$，称为 P 点的**向径向量**，也叫**位置向量**（图 1-1）．设 $\boldsymbol{P}_1$ 点的位置向量为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 点的位置向量为 $\boldsymbol{r}_2$，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

表示以 $\boldsymbol{P}_1$ 为起点，$\boldsymbol{P}_2$ 为终点的向量（图 1-2）．

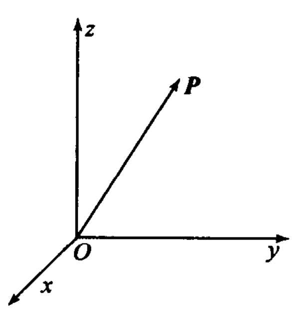


图 1-1

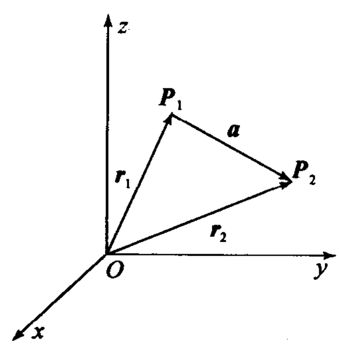


图 1-2

设 $\boldsymbol{r}$ 为点 P 的位置向量，线段$\overline{OP}$的长度叫 $\boldsymbol{r}$ 的模，记为$|\boldsymbol{r}|$或 r. 例如，在直角坐标系下，设 P 点的坐标为(x,y,z)，则

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.1}$$

同样，设 P_1 点的坐标为(x_1,y_1,z_1)，P_2 点的坐标为(x_2,y_2,z_2)，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$a=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.2}$$

被赋予物理单位后，向量便具有了物理涵义．如物理学中的速度 $\boldsymbol{v}$，力 $\boldsymbol{F}$，电场强度 $\boldsymbol{E}$，磁场强度 $\boldsymbol{H}$，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等，都可以用向量表示．由于向量具有方向和大小两个特征，因此必须利用两个变量，才能确定一个向量．记 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，称 $\boldsymbol{a}^0$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^0|\boldsymbol{a}|. \tag{1.3}$$

1.1.2 向量与向量运算的坐标表示

1. 向量的坐标表示

在空间 R^3 中取定一点 O 作为原点，取三组相互正交的平面作为坐标面，Ox，Oy，Oz 作为坐标轴，建立一空间直角坐标系．以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 记 Ox，Oy，Oz 轴上的单位向量，设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上的投影分别为 a_x,a_y,a_z，则向量 $\boldsymbol{a}$ 可以写作

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.4}$$

由式(1.4)可以看到，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以和一组有序实数 a_x,a_y,a_z 一一对应。因此，我们可以用一个有序数组$(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

式(1.5)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示**．

利用坐标表示式，空间任一点 $P(x,y,z)$的位置向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

2. 向量运算的坐标表示

利用向量的坐标表示，可以得到向量运算的坐标表示式

(1)加法　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)^{\mathrm{T}}. \tag{1.6}$$

几何上，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量(图 1-3).

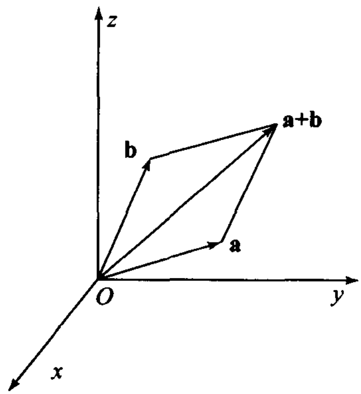


图 1-3

(2)数乘　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为常数，则数 k 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为

$$k\boldsymbol{a}=(ka_x,ka_y,ka_z)^{\mathrm{T}}. \tag{1.7}$$

几何上，$k\boldsymbol{a}$ 表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量. 当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

(3)数量积　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)^{\mathrm{T}}$，两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.8}$$

两向量的数量积是一个数.

利用数量积，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

可以证明，向量的数量积满足如下的柯西不等式

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|. \tag{1.9}$$

由式(1.8)，定义

$$\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos^{-1}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{1.10}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

当 $\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，称向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交.

利用式(1.10)，又可将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{1.11}$$

其中，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影(图 1-4).

(4)向量积　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)^{\mathrm{T}}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

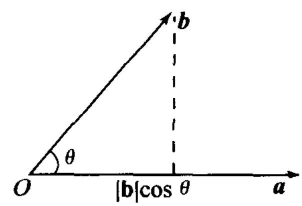


图 1-4

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量.

由式(1.12)可以得到，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都正交，因此 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

两向量的向量积不满足交换律，因，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(5)混合积　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量，乘积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$，即

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{1.13}$$

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)^{\mathrm{T}}$，则由式(1.8)和式(1.12)得到

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

由式(1.14)，可以看到，三个向量的混合积具有循环轮换性，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}, \tag{1.15}$$

或记为

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}].$$

式(1.15)可以由式(1.14)利用行列式的性质得到.

混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$的几何意义是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$按右手系排列时，$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$为正；$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$按左手系排列时，$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$为负(图 1-5).

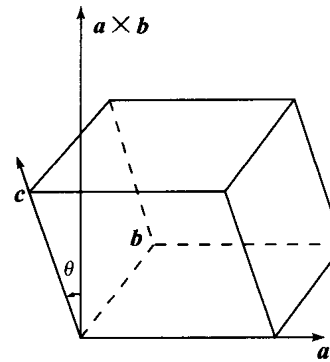


图 1-5

(6)三重向量积　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是三个向量，乘积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \tag{1.16}$$

称作三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的三重向量积.

三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的三重向量积是一个向量，下面的定理表明，它位于由向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所决定的平面上.

定理 1.1　三重向量积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$可以表示为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的线性组合

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \tag{1.17}$$

证　设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(c_z\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}+a_xb_xc_x-a_xb_xc_x\right)\boldsymbol{i}+$$