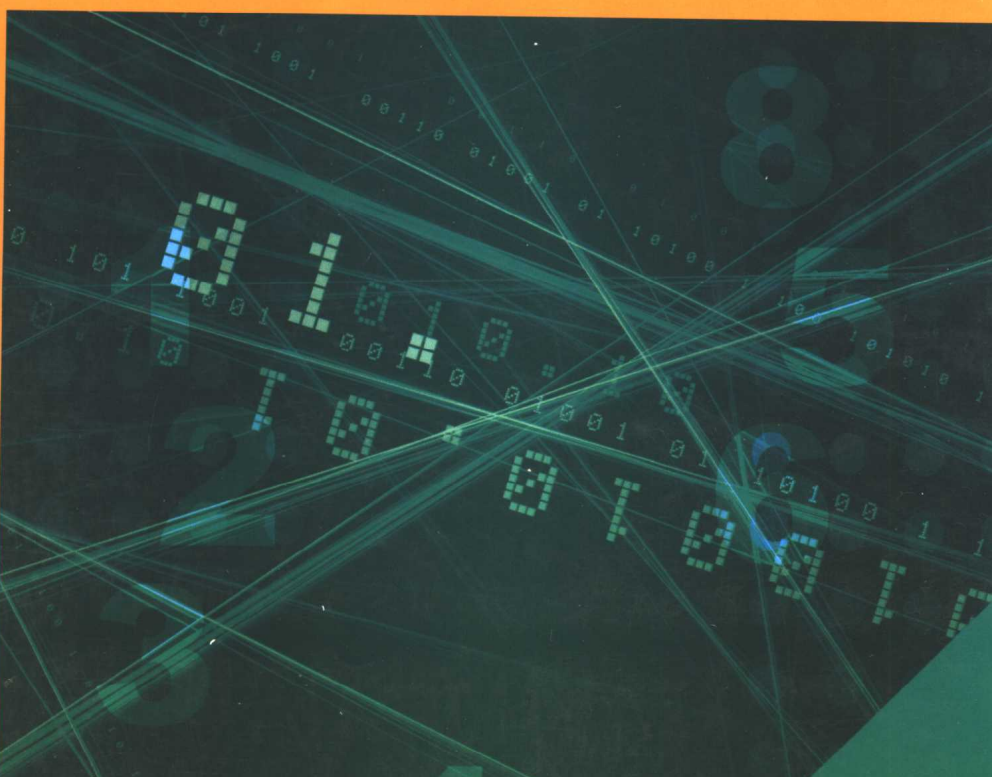


高等学校工科类专业基础课教材

GONGCHENG  
SHUXUE JICHU  
**工程数学基础**

杨永发 金大永 于慎根 编著



南开大学出版社

# 工程数学基础

杨永发 金大永 于慎根 编著

南开大学出版社

天津

**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学基础 / 杨永发, 金大永, 于慎根编著. — 天津: 南开大学出版社, 2003. 11  
ISBN 7-310-01977-6

I. 工... I. ①杨... ②金... ③于... III. 工程数学—高等学校—教材 IV. TB11.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 069655 号

**出版发行** 南开大学出版社

地址: 天津市南开区卫津路 94 号 邮编: 300071

营销部电话: (022)23508339 23500755

营销部传真: (022)23508542

邮购部电话: (022)23502200

**出版人** 肖占鹏

**承印** 南开大学印刷厂印刷

**经销** 全国各地新华书店

**版次** 2003 年 11 月第 1 版

**印次** 2003 年 11 月第 1 次印刷

**开本** 880mm×1230mm 1/32

**印张** 16.5

**字数** 472 千字

**印数** 1—4000

**定价** 28.00 元

## 内 容 提 要

本书是为工科大学“工程数学基础”课程编写的教材,内容共分为16章,包含“向量分析与场论”、“复变函数论”和“积分变换”三部分内容。第一章至第六章为向量分析与场论,内容包括:向量与向量函数分析、数量场、向量场、微分形式的外微分及其应用、三种特殊形式的向量场和正交曲线坐标系;第七章至第十四章为复变函数论,内容包括:复数与平面点集、解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数表示、残数及其应用、保形映射和解析开拓;第十五章、第十六章为积分变换,分别介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换的理论及应用。各章末附有适量的习题,书末另附有习题参考答案。书末还附录有哈密尔顿算子和傅里叶变换简表,拉普拉斯变换简表,供读者查阅使用。

本书内容丰富,选材适当,便于教学,可作为高等工科院校教材,适合机、电类及物理类专业使用,也可供工程技术人员参考阅读。

# 前 言

本书是为高等工科院校编写的工程数学基础课程的教材,内容包含向量分析与场论、复变函数论、积分变换三部分。众所周知,上述三门课程(统称为工程数学)是工科大学的重要的数学基础理论课,与后续专业课联系非常紧密。例如,向量分析与场论是讨论电磁场和电磁波问题的基础,而积分变换的方法早已成为机械设计、自动控制,电工、电子学方面不可缺少的运算工具。复变函数则一方面为积分变换提供了必要的理论基础,另一方面它自身又在诸多的自然科学领域,如理论物理、流体力学、空气动力学、地质学等有着广泛的应用。我们编写本书,就是为了适应教学改革的发展,希望能为本课程提供一本系统完整的教学用书。编写过程中,我们一方面吸收了国内外同类教材的优点,另一方面又融合了我们自己长期从事该课程教学的经验体会,力争做到思路清晰,推证简洁,且具有一定的可读性。

本书共分为 16 章。第一章为向量分析的内容,第二章至第六章为场论,第七章至第十四章为复变函数论,第十五章和第十六章合为积分变换,分别介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换。各章末均有适量的习题,帮助读者理解基本概念和基本方法。书末附有习题参考答案,另有三个附录,分别为哈密尔顿算子、傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表,供读者查阅使用。

作为教材,讲授本书约需 90 学时,删掉一些内容,如第六章、第十三、十四章及第十一、十五章的部分内容,也可以在 64 学时内完成主要内容的教学。本书各部分也可单独使用,向量分析与场论约需 16~24 学时,复变函数论约需 32~46 学时,积分变换约需 16~20 学时。

本书出版过程中,南开大学出版社李正明、莫建来、李冰老师做了大量艰苦细致的工作,作者对此表示由衷的感谢。

由于学识和水平所限,书中难免有错、漏和不完善之处。我们热切期望使用本书的读者批评、指正。

我们的电子邮箱地址是:gcsx4470@eyou.com。

编 者

2003年5月于天津

# 目 录

|                            |      |
|----------------------------|------|
| <b>第一章 向量与向量函数分析</b> ..... | (1)  |
| § 1.1 向量及其运算 .....         | (1)  |
| 1.1.1 向量 .....             | (1)  |
| 1.1.2 向量与向量运算的坐标表示 .....   | (2)  |
| 1.1.3 柱面坐标系和球面坐标系 .....    | (6)  |
| § 1.2 向量值函数的概念 .....       | (8)  |
| 1.2.1 向量值函数的定义 .....       | (8)  |
| 1.2.2 向量值函数的运算 .....       | (10) |
| § 1.3 向量值函数的极限和连续性 .....   | (11) |
| 1.3.1 向量值函数的极限 .....       | (11) |
| 1.3.2 向量值函数的连续性 .....      | (13) |
| § 1.4 向量值函数的导数 .....       | (14) |
| 1.4.1 向量值函数的导数 .....       | (14) |
| 1.4.2 向量值函数的求导规则 .....     | (18) |
| § 1.5 向量值函数的积分 .....       | (20) |
| 1.5.1 体积分 .....            | (20) |
| 1.5.2 曲面积分 .....           | (23) |
| 1.5.3 曲线积分 .....           | (25) |
| 1.5.4 高斯公式和斯托克斯公式 .....    | (28) |
| 习题 1 .....                 | (29) |
| <b>第二章 数量场</b> .....       | (32) |
| § 2.1 数量场的几何描述 等值面 .....   | (32) |
| § 2.2 数量场的方向导数和梯度 .....    | (34) |
| 2.2.1 方向导数 .....           | (34) |
| 2.2.2 梯度 .....             | (37) |
| 习题 2 .....                 | (40) |

|   |       |
|---|-------|
| <b>第三章 向量场</b> .....                      | (43)  |
| § 3.1 向量场的几何描述 向量线 .....                  | (43)  |
| § 3.2 向量场的通量和梯度 .....                     | (46)  |
| 3.2.1 通量 .....                            | (46)  |
| 3.2.2 散度 .....                            | (50)  |
| § 3.3 向量场的环量和旋度 .....                     | (58)  |
| 3.3.1 环量 .....                            | (59)  |
| 3.3.2 环量面密度和旋度 .....                      | (61)  |
| 3.3.3 场函数的导数与梯度、散度和旋度的关系 .....            | (67)  |
| 习题 3 .....                                | (71)  |
| <b>第四章 微分形式的外微分及其应用</b> .....             | (74)  |
| § 4.1 微分形式及其外微分 .....                     | (74)  |
| 4.1.1 自变量微分的外积 .....                      | (74)  |
| 4.1.2 微分形式 .....                          | (75)  |
| 4.1.3 微分形式的外微分 .....                      | (79)  |
| § 4.2 微分形式外微分的应用 .....                    | (81)  |
| 习题 4 .....                                | (84)  |
| <b>第五章 三种特殊形式的向量场</b> .....               | (86)  |
| § 5.1 保守场 .....                           | (86)  |
| 5.1.1 保守场的概念 .....                        | (86)  |
| 5.1.2 保守场的势函数 .....                       | (88)  |
| 5.1.3 保守场的旋度 .....                        | (93)  |
| § 5.2 管形场 .....                           | (96)  |
| § 5.3 调和场 .....                           | (99)  |
| 习题 5 .....                                | (103) |
| <b>第六章 正交曲线坐标系</b> .....                  | (105) |
| § 6.1 曲线坐标系的定义 .....                      | (105) |
| § 6.2 正交曲线坐标系中的弧微分 .....                  | (108) |
| § 6.3 梯度、散度、旋度和调和量在正交曲线<br>坐标系中的表示式 ..... | (112) |
| 6.3.1 梯度 .....                            | (112) |



|            |   |       |
|------------|---|-------|
| 6.3.2      | 散度 .....                                | (112) |
| 6.3.3      | 旋度 .....                                | (114) |
| 6.3.4      | 梯度、散度、旋度及调和量在柱面坐标系和<br>球面坐标系中的表示式 ..... | (115) |
|            | 习题 6 .....                              | (116) |
| <b>第七章</b> | <b>复数与平面点集</b> .....                    | (118) |
| § 7.1      | 复数及其代数运算 .....                          | (118) |
| 7.1.1      | 复数及其几何表示 .....                          | (118) |
| 7.1.2      | 复数的运算 .....                             | (120) |
| § 7.2      | 复球面与无穷远点 .....                          | (127) |
| § 7.3      | 平面点集 .....                              | (128) |
|            | 习题 7 .....                              | (134) |
| <b>第八章</b> | <b>解析函数</b> .....                       | (136) |
| § 8.1      | 复变函数 .....                              | (136) |
| 8.1.1      | 复变函数的概念 .....                           | (136) |
| 8.1.2      | 复变函数的几何表示 .....                         | (138) |
| § 8.2      | 复变函数的极限和连续性 .....                       | (141) |
| 8.2.1      | 复变函数的极限 .....                           | (141) |
| 8.2.2      | 复变函数的连续性 .....                          | (143) |
| § 8.3      | 解析函数 .....                              | (148) |
| § 8.4      | 初等函数 .....                              | (157) |
| 8.4.1      | 指数函数 .....                              | (157) |
| 8.4.2      | 三角函数 .....                              | (159) |
| 8.4.3      | 根式函数 .....                              | (161) |
| 8.4.4      | 对数函数 .....                              | (166) |
| * 8.4.5    | 一般幂函数与一般指数函数 .....                      | (168) |
| 8.4.6      | 反三角函数 .....                             | (170) |
|            | 习题 8 .....                              | (171) |
| <b>第九章</b> | <b>复变函数的积分</b> .....                    | (175) |
| § 9.1      | 积分及其性质 .....                            | (175) |
| § 9.2      | 柯西定理 .....                              | (180) |

|             |                  |              |
|-------------|------------------|--------------|
| 9.2.1       | 柯西定理             | (180)        |
| 9.2.2       | 解析函数的原函数         | (187)        |
| 9.2.3       | 多连通区域的柯西定理       | (190)        |
| § 9.3       | 柯西公式             | (193)        |
| 9.3.1       | 柯西公式             | (193)        |
| 9.3.2       | 解析函数的高阶导数        | (196)        |
| 习题 9        |                  | (201)        |
| <b>第十章</b>  | <b>复变函数的级数表示</b> | <b>(204)</b> |
| § 10.1      | 复数项级数            | (204)        |
| § 10.2      | 复变函数项级数          | (207)        |
| § 10.3      | 幂级数              | (210)        |
| § 10.4      | 泰勒级数             | (214)        |
| 10.4.1      | 解析函数的泰勒级数        | (214)        |
| 10.4.2      | 解析函数的零点          | (218)        |
| § 10.5      | 罗朗级数             | (221)        |
| 10.5.1      | 圆环内解析函数的罗朗级数     | (221)        |
| 10.5.2      | 利用罗朗级数讨论孤立奇点     | (227)        |
| 习题 10       |                  | (233)        |
| <b>第十一章</b> | <b>残数及其应用</b>    | <b>(237)</b> |
| § 11.1      | 残数的一般理论          | (237)        |
| 11.1.1      | 残数基本定理           | (237)        |
| 11.1.2      | 残数的计算            | (239)        |
| 11.1.3      | 无穷远点的残数          | (241)        |
| § 11.2      | 残数在实积分计算中的应用     | (244)        |
| § 11.3      | 辐角原理及其应用         | (252)        |
| 习题 11       |                  | (259)        |
| <b>第十二章</b> | <b>保形映射</b>      | <b>(262)</b> |
| § 12.1      | 保形映射的概念          | (262)        |
| § 12.2      | 保形映射的基本理论        | (265)        |
| § 12.3      | 线性映射             | (268)        |
| 12.3.1      | 线性映射的性质          | (268)        |

|               |                    |       |
|---------------|--------------------|-------|
| 12.3.2        | 例题                 | (275) |
| § 12.4        | 初等保形映射             | (279) |
| 12.4.1        | 幂函数                | (279) |
| 12.4.2        | 指数函数与对数函数          | (280) |
| 12.4.3        | 初等保形映射的应用          | (282) |
| 习题 12         |                    | (291) |
| <b>* 第十三章</b> | <b>解析开拓</b>        | (295) |
| § 13.1        | 解析开拓的一般概念          | (295) |
| § 13.2        | 解析开拓的方法            | (302) |
| 13.2.1        | 幂级数开拓法             | (302) |
| 13.2.2        | 对称原理               | (303) |
| § 13.3        | 多角形映射              | (306) |
| 习题 13         |                    | (313) |
| <b>第十四章</b>   | <b>调和函数</b>        | (315) |
| § 14.1        | 调和函数及其性质           | (315) |
| * § 14.2      | 狄里克莱问题             | (321) |
| * § 14.3      | 解析函数对平面场的应用        | (326) |
| 14.3.1        | 平面场的概念             | (327) |
| 14.3.2        | 表征平面调和场的解析函数       | (328) |
| 14.3.3        | 平面场的物理解释           | (331) |
| 习题 14         |                    | (335) |
| <b>第十五章</b>   | <b>傅里叶变换</b>       | (337) |
| § 15.1        | 傅里叶变换的概念           | (338) |
| 15.1.1        | 傅里叶级数与傅里叶积分        | (338) |
| 15.1.2        | 傅里叶变换              | (345) |
| 15.1.3        | 傅里叶正弦、余弦变换         | (349) |
| § 15.2        | 傅里叶变换的性质           | (353) |
| 15.2.1        | 基本性质               | (353) |
| 15.2.2        | 卷积和相关函数            | (358) |
| 15.2.3        | 傅里叶变换在解微分方程中的应用    | (364) |
| § 15.3        | $\delta$ 函数及其傅里叶变换 | (366) |

|               |                   |              |
|---------------|-------------------|--------------|
| 15.3.1        | $\delta$ 函数的概念与性质 | (367)        |
| 15.3.2        | $\delta$ 函数的傅里叶变换 | (370)        |
| § 15.4        | 实变复值函数的傅里叶变换      | (374)        |
| § 15.5        | 离散傅里叶变换           | (377)        |
| 15.5.1        | 离散傅里叶变换的定义        | (377)        |
| 15.5.2        | 离散傅里叶变换的性质和有关定理   | (380)        |
| § 15.6        | 快速傅里叶变换算法原理       | (382)        |
| 习题 15         |                   | (387)        |
| <b>第十六章</b>   | <b>拉普拉斯变换</b>     | <b>(391)</b> |
| § 16.1        | 拉普拉斯变换的概念         | (391)        |
| § 16.2        | 拉普拉斯变换的性质         | (396)        |
| § 16.3        | 拉普拉斯逆变换           | (404)        |
| § 16.4        | 卷积定理              | (409)        |
| 16.4.1        | 卷积                | (409)        |
| 16.4.2        | 卷积定理              | (410)        |
| § 16.5        | 拉普拉斯变换的应用         | (413)        |
| 16.5.1        | 求解常微分方程、积分方程      | (413)        |
| 16.5.2        | 求解偏微分方程           | (415)        |
| 16.5.3        | 线性系统中的应用          | (416)        |
| 习题 16         |                   | (418)        |
| <b>习题参考答案</b> |                   | <b>(423)</b> |
| <b>附录 I</b>   | <b>哈密尔顿算子</b>     | <b>(499)</b> |
| <b>附录 II</b>  | <b>傅里叶变换简表</b>    | <b>(502)</b> |
| <b>附录 III</b> | <b>拉普拉斯变换简表</b>   | <b>(509)</b> |

# 第一章 向量与向量函数分析

向量与向量函数是研究物理场问题的重要工具。本章我们介绍向量与向量函数分析的一般结果。

## § 1.1 向量及其运算

### 1.1.1 向量

设  $R^3$  表示三维欧氏空间,  $P$  为  $R^3$  中一点, 以原点  $O$  为起点,  $P$  为终点的向量记为  $r$ , 称为  $P$  点的向径向量, 也叫位置向量(图 1-1)。设  $P_1$  点的位置向量为  $r_1$ ,  $P_2$  点的位置向量为  $r_2$ , 则

$$a = r_2 - r_1$$

表示以  $P_1$  为起点,  $P_2$  为终点的向量(图 1-2)。

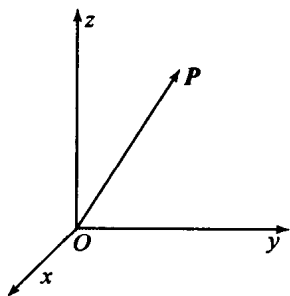


图 1-1

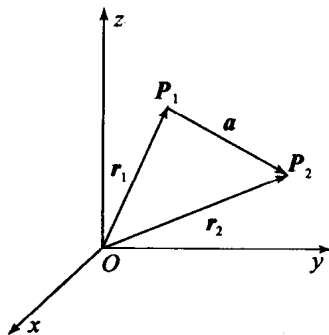


图 1-2

设  $r$  为点  $P$  的位置向量, 线段  $\overline{OP}$  的长度叫  $r$  的模, 记为  $|r|$  或  $r$ . 例如, 在直角坐标系下, 设  $P$  点的坐标为  $(x, y, z)$ , 则

$$r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.1)$$

同样, 设  $P_1$  点的坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2$  点的坐标为  $(x_2, y_2, z_2)$ , 则向量  $a$  的模

$$a = |r_2 - r_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.2)$$

被赋予物理单位后, 向量便具有了物理涵义. 如物理学中的速度  $v$ , 力  $F$ , 电场强度  $E$ , 磁场强度  $H$ , 磁感应强度  $B$  等, 都可以用向量表示. 由于向量具有方向和大小两个特征, 因此必须利用两个变量, 才能确定一个向量. 记  $a^0 = \frac{a}{|a|}$ , 称  $a^0$  为  $a$  的单位向量, 则

$$a = a^0 |a|. \quad (1.3)$$

### 1.1.2 向量与向量运算的坐标表示

#### 1. 向量的坐标表示

在空间  $R^3$  中取定一点  $O$  作为原点, 取三组相互正交的平面作为坐标面,  $Ox, Oy, Oz$  作为坐标轴, 建立一空间直角坐标系. 以  $i, j, k$  记  $Ox, Oy, Oz$  轴上的单位向量, 设向量  $a$  在  $Ox$  轴、 $Oy$  轴、 $Oz$  轴上的投影分别为  $a_x, a_y, a_z$ , 则向量  $a$  可以写作

$$a = a_x i + a_y j + a_z k. \quad (1.4)$$

由式(1.4)可以看到, 向量  $a$  可以和一组有序实数  $a_x, a_y, a_z$  一一对应. 因此, 我们可以用一个有序数组  $(a_x, a_y, a_z)^T$  表示向量  $a$ , 即

$$a = (a_x, a_y, a_z)^T = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

式(1.5)称为向量  $a$  的坐标表示.

利用坐标表示式, 空间任一点  $P(x, y, z)$  的位置向量的坐标表示式为

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

## 2. 向量运算的坐标表示

利用向量的坐标表示,可以得到向量运算的坐标表示式

(1)加法 设向量  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$ , 则向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的加法为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)^T. \quad (1.6)$$

几何上,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  表示以向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的对角线向量(图 1-3).

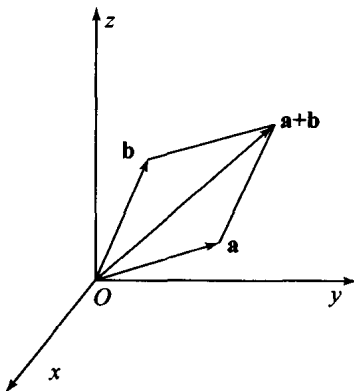


图 1-3

(2)数乘 设向量  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ,  $k$  为常数, 则数  $k$  与向量  $\mathbf{a}$  的乘积为

$$k\mathbf{a} = (ka_x, ka_y, ka_z)^T. \quad (1.7)$$

几何上,  $k\mathbf{a}$  表示一个与  $\mathbf{a}$  平行的向量. 当  $k > 0$  时,  $k\mathbf{a}$  与  $\mathbf{a}$  同向; 当  $k < 0$  时,  $k\mathbf{a}$  与  $\mathbf{a}$  反向.

(3)数量积 设向量  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$ , 两向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的数量积表示为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.8)$$

两向量的数量积是一个数.

利用数量积, 向量  $\mathbf{a}$  的模表示为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

可以证明,向量的数量积满足如下的柯西不等式

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|. \quad (1.9)$$

由式(1.8),定义

$$\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (1.10)$$

为向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的夹角.

当  $\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  时, 称向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  正交.

利用式(1.10), 又可将  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的数量积表示为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (1.11)$$

其中,  $|\mathbf{b}| \cos \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  称为向量  $\mathbf{b}$  在  $\mathbf{a}$  上的投影(图 1-4).

(4) 向量积 设向量  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^\top$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^\top$ , 向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的向量积表示为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

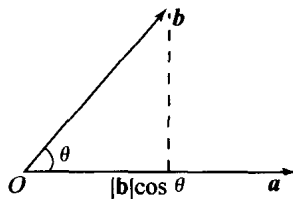


图 1-4

$\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的向量积是一个向量.

由式(1.12)可以得到,  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的向量积  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  和向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  都正交, 因此  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  垂直于  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  所确定的平面. 当  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  平行时,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

两向量的向量积不满足交换律, 因,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .

(5) 混合积 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是三个向量, 乘积  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  称为三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的混合积, 记为  $[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}]$ , 即

$$[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (1.13)$$

设向量  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^\top$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^\top$ ,  $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)^\top$ , 则由式(1.8)和式(1.12)得到

$$[\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

由式(1.14), 可以看到, 三个向量的混合积具有循环轮换性, 即



$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad (1.15)$$

或记为

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = [\mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{a}] = [\mathbf{c} \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}].$$

式(1.15)可以由式(1.14)利用行列式的性质得到.

混合积 $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ 的几何意义是以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积,且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 按右手系排列时, $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ 为正; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 按左手系排列时, $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ 为负(图 1-5).

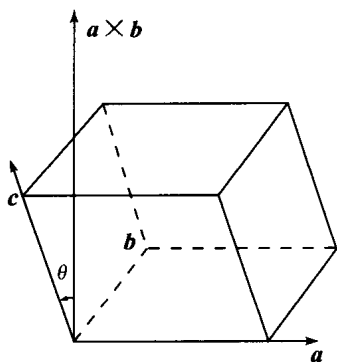


图 1-5

(6)三重向量积 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是三个向量,乘积

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (1.16)$$

称作三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的三重向量积.

三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的三重向量积是一个向量,下面的定理表明,它位于由向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所决定的平面上.

**定理 1.1** 三重向量积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 可以表示为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的线性组合

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \quad (1.17)$$

**证** 设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^\top, \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^\top, \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)^\top$ , 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

故

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= \left\{ c_x \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x \right\} \mathbf{i} + \end{aligned}$$