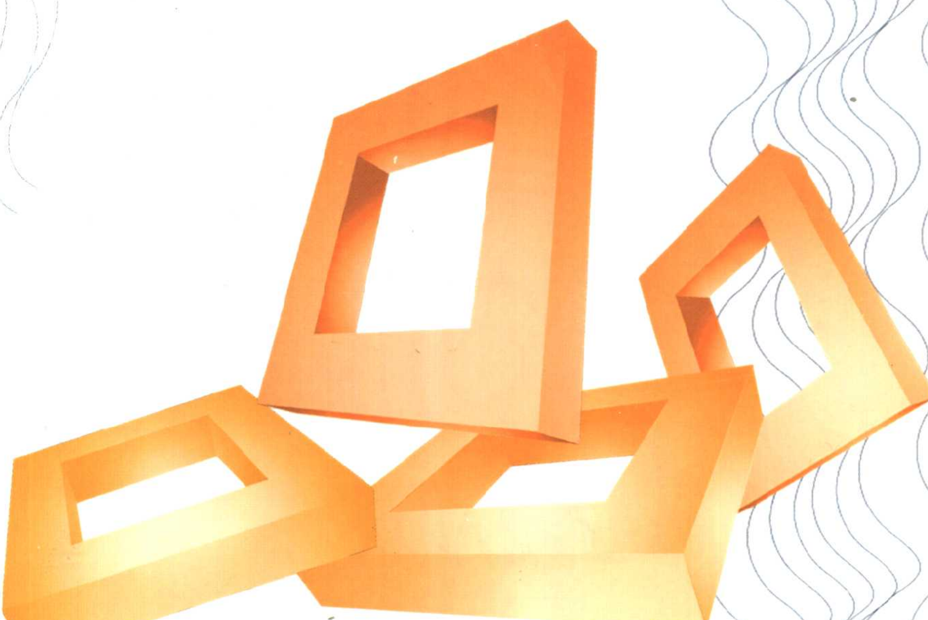
Linear Programming and Its Applications

线性规划及其应用

胡清淮 魏一鸣 ◉ 著



科学出版社
www.sciencep.com

线性规划及其应用

胡清淮　魏一鸣　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从理论和应用两方面论述了线性规划的基本理论、算法和最新发展，特别强调解大型线性规划问题．全书分为 10 章：线性规划导论；单纯形法；单纯形法的改进形式；对偶；灵敏度分析与参数规划；大型问题的分解；运输问题和指派问题；网络流；线性规划的进展与工业应用；线性规划内点法．每章后都附有习题，供读者学习与训练之用．

本书可作为从事管理科学、系统工程及相关专业的研究生和大学本科生的教材，同时也可供有关教师、研究工作者和从事实际管理工作的同志参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性规划及其应用/胡清淮，魏一鸣著．—北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-012632-7

Ⅰ．线…　Ⅱ．①胡…②魏…　Ⅲ．线性规划　Ⅳ．O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 120920 号

责任编辑：陈　亮/责任校对：刘小梅

责任印制：安春生/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004 年 3 月第 一 版　　开本：B5（720×1000）

2004 年 3 月第一次印刷　　印张：23 1/4

印数：1—3 000　　字数：446 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

作 者 简 介

胡清淮 男，汉族，1940年5月生，湖南醴陵人．1963年毕业于中南工业大学，毕业后在长沙矿山研究院从事岩石力学和计算机应用的科研工作．1979～1981年作为访问学者赴美国科罗拉多矿业学院从事运筹学与系统工程及岩石力学的学习和研究．1988年以来就职武汉化工学院并任教授．参加了全国磷资源开发规划等三项国家级项目的研究，解决了使用微机解大型线性目标规划的算法与程序设计问题．1993年在澳大利亚伍伦贡大学数学系和采矿与土木工程系任研究员和访问教授，主要从事数学规划的研究．曾兼任（1987～1998）国际露天采矿、复垦与环境杂志编委会编委．曾获部级一等奖并国家科技进步三等奖1项，部级科技进步二等奖1项和省部级自然科学等三等奖3项，以及国家版权局颁发的计算机软件版权证书两项．1992年获国务院政府津贴，1993年被评为湖北省有突出贡献中青年专家．现为武汉化工学院环境与城市建设学院教授．

魏一鸣 男，1968年3月生，江西安远人，工学博士．现任中国科学院科技政策与管理科学研究所副所长、研究员、博士生导师．

历任助教、讲师，副研究员、研究员；研究室主任、副所长．长期从事管理科学的研究工作，研究领域包括复杂系统与复杂性、工业工程与管理、资源与环境管理．先后主持或参加并完成各种科研课题30余项．在国内外重要学术期刊发表论文80余篇，学术著作3部，曾获第七届中国青年科技奖等奖励3项．

目前，主持国家“十五”科技攻关课题、国家自然科学基金重大项目专题等重要科研课题5项．

前　言

作为管理科学的运筹学基础和重要分支的线性规划是在第二次世界大战期间从军事应用中发展起来的. 目前它的应用已遍及各行各业和各部门各地区以及众多的企业，用于他们的各种计划与规划以及生产和社会活动的筹划之中.

有关线性规划方面的文章和图书国内已经很多了，但多是从教学和科研的角度出发，重点阐述线性规划的基本理论，而从应用方面出发，特别是对解大型问题来说，在提供实用算法和实践应用方面仍感欠缺. 另一方面，随着世界科技的迅猛发展和进步，线性规划的基本理论有了新的改进和发展，特别是 20 世纪 80 年代以来内点法的提出、发展和应用，标志着线性规划领域的一次新的飞跃. 当今的线性规划已今非昔比. 因此作者深感有必要编写一本能够深入反映当今线性规划的概貌及其新进展的书，并把作者在这方面工作的科研实践经验提供给有关人员参考和借鉴.

全书分为 10 章. 第 1、2 章为线性规划的基本理论和方法部分. 第 3 章讲述基于改进单纯形法的一些可解较大问题的实用算法，包括有界变量问题及大型问题的 LU 分解算法和广义上界算法. 第 4 章论述对偶理论和对偶单纯形法等. 第 5 章论述灵敏度分析和参数规划. 第 6 和第 7 章则分别论述大型问题的 Dantzig-Wolfe 分解算法、运输问题与指派问题. 第 8 章论述网络流. 第 9 章论述线性规划的进展与工业应用. 第 10 章论述线性规划内点法. 每章后都有习题，供读者学习与训练之用.

作者是以解大型线性规划问题的思路来展开全书的论述，因此在内容上较全面和深入地讨论了基于有界变量的各种算法，如有界变量改进单纯形法，有界变量对偶单纯形法和有界变量灵敏度分析等；在解大型问题的 LU 分解算法和广义上界问题的论述中，提出了独特、实用且适于编程的计算表；系统和详尽地论述了退化性、循环和多余性问题；详尽地讨论了影子价格问题，论述了在退化情况下对偶变量向量并不等于影子价格向量，从而使这一方面的认识更加完善；论述了大型问题的 Dantzig-Wolfe 分解算法和阶梯状多阶段问题的套分解算法；讨论了运输问题中的转运问题和混合问题；网络流一章中重点强调状态（out-off kilter）算法；论述了单纯形法的最新进展和较全面地讨论了作为最新发展的线性规划内点法等等.

本书可作为从事管理科学、系统工程和相关领域的研究生和大学本科生的教材，同时也可供广大教师、研究工作者和从事实际管理工作的同志参考. 由于作

者经验与学识原因，书中错误和缺点在所难免，诚请读者批评指正.

在本书的写作和编辑过程中，中国科学院科技政策与管理科学研究所的范英副研究员、陈长杰博士、马晓微博士以及研究生梁强，原武汉化工学院的范体军博士、赵振峰博士以及刘红蓉同学等提供了热忱帮助，值此，向他们表示衷心感谢！同时，也对所有为本书的出版提供支持和帮助的专家、编辑和朋友们表示诚挚的谢意！

作　者

2003 年 10 月

目　　录

第 1 章　线性规划导论

线性规划是运筹学的一个重要分支.它的实质是从很多变量中选取一组适当的变量作为解,使这组变量满足一组确定的线性式或条件,而且使一个线性目标函数达到最优(最大或最小).

自从 1949 年美国数学家 G. B. Dantzig 提出解决线性规划问题的“单纯形”法[1]以来,线性规划无论在理论上、计算方法和开拓新的应用领域中,都获得了长足的进步.线性规划理论构成了数学规划论很多领域的基础,包括目标规划、网络流、凸规划、整数规划、几何规划和非线性规划等.本书首先论述基于单纯形法的线性规划的基本理论与算法,在此基础上全面论述它的现代发展及应用.作为基础部分的论述主要参考了书籍[1~7]等.

1.1　线性规划问题

1. 基本定义

如下形式的问题叫做线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min\quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

这里 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 叫做目标函数,它是未知变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数,系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 叫做目标函数系数或价值系数.min 表示使目标函数值为最小.线性不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 称为第 i 个约束条件,其中 a_{ij} 为第 i 个约束条件中对应第 j 个变量的约束条件系数,b_i 叫做第 i 个约束条件的右边常数,它表示必须满足的某种最低要求. $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 叫做非负约束.符号 s.t.是英文“subject to”,即“受约束于”的意思.

满足上述所有约束条件的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做该线性规划问题一组可

行解,或可行点、可行向量.所有这些点构成该问题的可行解解域或可行解空间.

线性规划问题也可以求目标函数最大值,而且可以互相转换,即所有目标函数系数乘以 −1,求最大值的问题就变成了求最小值的问题,即

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1.2}$$

求出最优解后,把最优目标函数值反号即得出原问题的目标函数值.

约束条件可以是"$\geqslant$"形式,也可以是"$\leqslant$"形式或"$=$"形式.前两者称为非等式约束,带等号者则称等式约束.变量的非负约束,则是由于对大多数实际问题来说,未知数代表某种物理量,它们常常是非负的.即使是它们的符号未受限制,例如 x_j,我们可以用两个非负的新未知数 x_j' 和 x_j'' 来代替它,使 $x_j = x_j' - x_j''$,因而问题的所有变量都化为非负的.综上所述,对线性规划问题可小结如下:

线性规划问题是在服从一组非等式或等式线性约束条件下求线性目标函数的最小值或最大值的问题.也就是说在所有它的可行解中找出这样一组解,它使目标函数值为最小(或最大).应特别注意,这里目标函数和约束条件都是线性的.当存在非线性的情况下,问题则变成了非线性规划问题.

例 1.1　考虑如下线性规划问题:

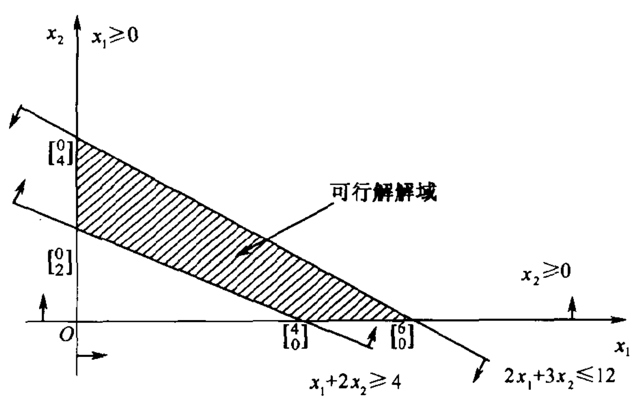


图 1.1　可行解解域图示

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

该问题具有两个变量 x_1 和 x_2.目标函数是 $2x_1 + 5x_2$,问题是求它的最小值.约束条件及可行解域如图 1.1 所示.要求在这个可行解域中找到这样一个可行点,使它对应的目标函数值为最小.

2. 标准形式

为了便于求解,常把线性规划问题化成标准形式.所谓线性规划问题的标准形式,是其中所有约束条件都是等式约束,且所有未知数都是非负的.因此标准形式的线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

对标准形式的线性规划问题,应特别注意如下三点:

(1)所有约束都是等式约束;

(2)所有变量都是非负的,即 $x_j \geqslant 0$;

(3)所有右边常数都是非负的,即 $b_i \geqslant 0$.

对于非等式的约束,可以引用松弛变量或剩余变量把它变为等式约束.例如:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 12$$

引进松弛变量 $y_1 \geqslant 0$,上式可变成:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 12$$

而在情形

$$x_1 + 8x_2 \geqslant 6$$

时,则减去剩余变量 $y_1 \geqslant 0$,上式成为

$$x_1 + 8x_2 - y_1 = 6$$

对含有非限制变量的约束条件,可引用两个非负变量把它变成标准形式.

3. 典则形式

除线性规划问题的标准形式外,还要提到它的典则形式(canonical form).因为解线性规划问题的单纯形法,首先要把问题变成标准典则形式.所谓标准典则形式是指约束条件系数矩阵中含有单位矩阵的标准形式.例如:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + 2x_3 &= 2 \\
x_2 - 4x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

这时称相应于系数为单位矩阵所在列的变量为基变量,而其他变量为非基变量.

若令所有非基变量为零,则所有基变量等于相应约束条件的右边常数,这样就得出了一组基可行解.如上例,这时

$$x_3 = 0 \quad 非基变量$$

$$x_1 = 2 \quad \text{基变量}, \qquad x_2 = 1 \quad \text{基变量}$$

通过适当变换,还可以得出其他可能的基可行解.假定从上例的情形出发,若使 x_3 进入基和使 x_1 退出基,应用消去法,第一行除以 2,第二行加上原第一行乘以 2,约束条件变为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)x_1 \qquad\quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 \quad + x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

这时基变量为 x_2 和 x_3,非基变量为 x_1,基可行解变为:$x_1=0, x_2=5$ 和 $x_3=1$.

4. 矩阵形式

用矩阵向量形式,可以把线性规划问题更简明地表示出来.为明了起见,考虑如下具有 m 个约束条件和 n 个变量的线性规划问题:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\ &\qquad\quad x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

以 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别表示以下的行向量和列向量,以 A 表示约束条件系数矩阵,即

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则上述线性规划问题可以写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} &\min \quad \boldsymbol{cx} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以列向量$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$的形式表示,式中,$\boldsymbol{a}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 列向量,这时上述问题成为

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b} \tag{1.1.6}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n$$

1.2 补充数学知识

这一节我们简要地补充一些关于矩阵运算和凸集与凸函数分析的某些基本数学知识.这些知识有助于更好地理解线性规划的数学原理及求解方法.

1. 矩阵和方程组的补充知识

关于矩阵、向量及线性方程组的数学概念和基本运算是大家所熟悉的.这里只介绍矩阵的初等变换、高斯消去法及逆矩阵的计算.

1) 矩阵的初等变换

矩阵行和列的初等变换统称为矩阵地的初等变换.它是指

(1)互换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列;

(2)用一个不为零的数乘以 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列;

(3)用一个数乘一行加到另一行上去,或乘一列加到另一列上去.

例 1.2 矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

用初等变换把 $\boldsymbol{A}$ 的前三列变为下三角矩阵.

采用行变换.把第三行乘以(-1)加到第二行上去;第三行乘以(-2)加到第一行上,得出

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & -18 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

第二行乘以 3 加到第一行上去;第一行除以 -12,最后得出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

2) 高斯消去法

矩阵的初等变换对解线性方程组非常有用.例如上例的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应于如下线性方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$,最后把 $\boldsymbol{A}$ 化简为相应的三角矩阵,其过程叫高斯消

去法.从三角矩阵很容易解出这个方程组:即由第一方程得出 $x_1=2$,再逐步代入第二方程和第三方程得出 $x_2=4$ 和 $x_3=2$.

对一般情形,方程组为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

高斯消去法是把 $\boldsymbol{A}$ 分解为一下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积,即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$$

因此该方程组可由解下列两个三角矩阵的方程组解出

$$\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{Y}$$

为了明显地表明用高斯消去法把 $\boldsymbol{A}$ 分解为 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{U}$ 的消去过程,例如计算 $\boldsymbol{U}$ 时,对第一列的处理是把该列除第一个元素之外的其他元素化为零,这时相当于 $\boldsymbol{A}$ 矩阵前乘一 $\boldsymbol{M}_1$ 矩阵,$\boldsymbol{M}_1$ 为

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & 0 & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $m_{i1}=a_{i1}/a_{11}(a_{11}\neq 0), i=2,\cdots,n$.

同样处理第二列,即是在 $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}$ 前面乘一矩阵 $\boldsymbol{M}_2$,$\boldsymbol{M}_2$ 为

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & & \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $m_{i2}=a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$,这里 $a_{ij}^{(2)}$ 是经第一次消除运算后的矩阵元素值.

同样对第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 次的消除处理亦是这样.因此,有

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{M}_{n-2}\cdots\boldsymbol{M}_1$$

$$\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{U}$$

而由 $\mathbf{A}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{U}$ 得

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{M}_{n-1}^{-1}$$

很容易证实 M_k^{-1} 是 M_k 除对角线元素外其余元素反号的矩阵,因此,有

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

因此 L 可在计算 U 的消去过程同时直接得出.且由于

$$Y = Mb$$

故 Y 也可在计算 L 的同时由消去过程得出.而最终解 x 由 $Ux = Y$ 代解出.

实际上在计算过程中,A 的某对角元素 $a_{kk}^{(k)}$ 可能变为零或接近于零,这时应把 k 行与 k 下面的某一行进行交换,以保证 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. 而把 A 的 k 行与其下面的 s 行互换,相当于 A 左乘如下一个置换矩阵 Q_k:

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0\cdots 1 & & & \\ & & & \vdots \quad \vdots & & & \\ & & & 1\cdots 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ k\text{ 行} \\ \\ s\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

实际上若考虑到计算精度,每次都选取主行,以保证对所有(i,j), $|m_{ij}| \leqslant 1$.这时高斯消去法的精度极其平稳.

3) 逆矩阵的计算

逆矩阵若存在的话,可以通过有限步骤的初等变换求得.它是通过一系列的初等变换,把矩阵 A 改化为单位矩阵,因而同样系列的初等变换会把(A, I)改化为(I, A^{-1}).事实上,这相当于前乘一矩阵 A^{-1}.

例 1.3 A^{-1}存在

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

构成增广矩阵,即

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一行除以 2,把新第一行加到第二行上去,第三行减去新第一行,得

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二行乘$\frac{2}{5}$,新第二行乘$-\frac{1}{2}$并加到第一行上去,新第二行乘以$\frac{3}{2}$并加到第三行上去,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

第三行乘以$\frac{5}{12}$,新第三行乘以$-\frac{3}{5}$并加到第二行上去,新第三行乘以$-\frac{1}{5}$并加到第一行上去,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

例 1.4　$\boldsymbol{A}^{-1}$不存在

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

显然逆矩阵并不存在,因为 $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$,第三列为前二列的线性组合. 为检验起见,仍构成增广矩阵并进行初等变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

把第一行乘以 -2 加到第二行上去,第三行减去第一行,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二行除以 -3,然后第一行和第三行分别减去新第二行,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

至此,右边的矩阵无法通过初等变换化为单位矩阵,因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有逆矩阵.

2. 凸集和凸函数

1) 凸集

假如对 n 维空间的一个集合 $\boldsymbol{X}$ 中任意给出的两点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$,有 $\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{X}$,其中 $\lambda\in[0,1]$,则这个集合叫做凸集.

凸集的意义可作如下的几何解释:由于 λ 在区间$[0,1]$,$\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 表示连接两点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的线段上的一点,因此连接集合中的任意两点的线段必属于集合 $\boldsymbol{X}$.

具有 $\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 形式的点,其中式 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,称为凸组合;而如果 $\lambda\in(0,1)$,则这个凸组合称为严格的.

图 1.2(a)和(b)分别表示一个凸集和非凸集的例子.下式则为某些凸集例子.

(1) $\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant1\}$

(2) $\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$,式中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}$ 是 m 维向量.

(3) $\left\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}\right\},\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant0$

(a) 凸集　　(b) 非凸集

图 1.2 凸集和非凸集例