环结构

Nathan Jacobson 著

王德生 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字:01-2003-7463

内容提要

本书是一本数学专著,内容分根和半单纯性、不可约模和本原环、具有极小条件的环、有极小单边理想的本原环、Kronecker 乘积、完全可约模.线性变换环的 Galois 理论、除环、诣零理想与素理想、结构空间和应用,共 10 章.

本书可供数学系研究生使用,也可供科技数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

环结构 / N. Jacobson 著;王德生译. —北京:高等教育出版社,2004

书名原文:Sturcture of Rings

ISBN 7-04-012954-X

Ⅰ.环... Ⅱ.①N. ... ②王... Ⅲ.环-结构 Ⅳ.O153.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 097670 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 1 月第 1 版
印　　张	17.75	印　　次	2004 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	320 000	定　　价	36.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

本书由

大连市人民政府
辽宁师范大学　资助出版

中译本序言

这是一本迟到的中译本。

1956年,N. Jacobson总结了20世纪40年代一般环论的发展,特别是他本人关于一般(即不加有限条件的)环的那些使一般环论得以生存和发展的重要结果,出版了专著《Structure of Rings》。这是环论发展史上的一件大事,立即在国际环论界引起了轰动。记得这本书出版的当年,在美国数学评论刚刚发表对该书的评介时,在还未看到该书的情况下,А. Г. Курош就立即组织莫斯科大学代数教研组在他家举办讨论班,由А. И. Ширшов等人介绍该书内容。我当时参加了这个讨论班。由此可见国际代数学界对该书出版反应的迅速和热烈程度。此后,1961年该书的俄文译本出版了,1964年该书的修订版出版了。也许在20世纪60年代,至少在"文化大革命"后的80年代初期就应当有一个这本名著的中译本出版。然而,时到今日,已是21世纪了,才看到这个中译本的出版,不能不说是有些迟到了。但是,迟到胜于不到,意义依然不减。如果注意到国内代数学界对该书的需求以及书市上根本见不到该书的情况,就更会觉得这个中译本的出版是值得庆贺的。

当前无论是一般环论还是特殊环论都在继续发展着。当然,既有背景又多联系的一些具体环论的内容更丰富更深入一些,而发展远景也更好一些。在代数中环论是一个重要分支,在数学中环的背景处处可见:数环,多项式环,矩阵环,群环,Lie代数的包络代数,算子代数,微分算子环,以代数几何为背景的一类环,同调代数中的环,Hopf代数中的环,等等。在这里我愿引用I. Kaplansky在题为"Rings and Things"的退休讲演中的一段话:

"The late Einar Hille once remarked that wherever he looked in mathematics he managed to see Semigroup of operators. I feel the same way about rings."

我体会和理解着这位在数学许多分支都做出过重要贡献的环论大师的这句有趣的话。这使我再一次回想到,1981年在芝加哥大学访问四个月后临别时,I. Kaplansky对我说过的一句话:"你还是继续搞环吧!"。当时是我问他:"我不想搞环了,你对我有什么建议吗?",他这样回答我。那时我感觉到的潜台词是"你都五十多岁了,转方向谈何容易"。现在我觉得也许还有另外一种含义:"环是挺有前途的,寻找一个好的方式继续搞吧!"。无论如何,在代数中也好,在数学中也好,环将与多项式、矩阵、群一样永远发展下去,并且都是光芒四射的法

宝。因而,N. Jacobson 的这本名著是不会被数学界忘记的。

N. Jacobson,在20世纪50年代末见面时,是我心目中开创环论新域的英俊大师。在80年代初见面时,我看到的是一位谦和亲切的学者。记得1983年,在张禾瑞先生的主持下他在北京师范大学数学系讲演时,数学楼最大的101阶梯教室挤满了景慕他的热情年青学子,那场面是空前的。读着他们夫妇俩在给我的《Basic Algebra Ⅰ》书上的题词,你会感到他们对北京的热爱。听说他在南京大学讲学时推荐我写的刚出版的《环与代数》一书,我知道他是一位殷切鼓励后辈的长者。1989年在新西伯利亚国际代数会上我看到的他是一位魅力非凡的老人。若是今日他还在世,一定会给这个中译本写上几句话的。愿他在天之灵能看到此书,相信他会很高兴的。

辽宁师范大学的王德生老师是我的师兄谢邦杰教授的早期学生,在80年代初他就着手翻译《Structure of Rings》一书。我们知道翻译这本书是很费气力的。该书的中译本《环结构》的出版算是了却了他多年的心愿。我们都非常感谢他,因为这也了却了所有环论工作者和代数工作者的多年心愿。

刘绍学

2003年6月于北师大丽泽楼

译者的话

N. Jacobson 教授的名著《Structure of Rings》一书是代数学的一部经典专著，自 1956 年出版以来一直在环论文献中占据着无可替代的重要位置。把它翻译过来并出版中译本《环结构》是我多年的心愿和企盼。现在，这个愿望终于实现了，我自然感到由衷的欣慰。

我的环论知识是从谢邦杰，刘绍学，吴品三等三位教授那里学到的。1979 年至 1981 年我在吉林大学学习环论方向研究生课程时，谢邦杰教授讲授的就是《Structure of Rings》一书。1983 年暑期，在安徽屯溪举办的代数讲习班，聘请了北京师范大学刘绍学教授、吴品三教授讲学，两位老师讲授的也是环论的内容。我参加了这期讲习班，很有收获。

1980 年至 1981 年我一边学习一边开始翻译《Structure of Rings》这本书。1981 年和 1985 年辽宁师范大学数学系先后两次将前五章的译稿油印成册，作为高年级学生的选修课讲义使用。期间，吉林大学数学系的研究生也曾使用这个油印本。后来，由于多方面的原因，《Structure of Rings》一书的翻译工作被放置下来，直到 1999 年我又重新把这项工作捡起来，并于 2000 年将该书全部译出。就在这时传来了 N. Jacobson 教授与世长辞的消息。我想这也算是我对这位环论大师献上的一份敬意和怀念吧。

在翻译《Structure of Rings》一书的过程中，已故恩师谢邦杰教授曾给予了热情的鼓励和指导，辽宁师范大学校长助理董学东教授、王晶昕博士、鞍山师范学院副院长王尧教授都提供了很多支持和帮助。在本书的出版过程中，北京师范大学刘绍学教授、吉林大学牛凤文教授给予了很重要的支持，特别是刘绍学教授还特意为本书撰写了序言。福建省教育厅副厅长薛为民教授、辽宁师范大学游若云教授、刘民先生、李素环老师对本书的出版都给予了很多帮助。高等教育出版社王瑜女士为本书的出版做了大量的工作。译者在此一并向他(她)们表示衷心的感谢。译者还要感谢大连市学术专著评审委员会和辽宁师范大学学术专著出版委员会为本书提供的出版资助。

需要说明的是，翻译时考虑到教学过程中书写上的方便，将原文中的德文花体字母符号一律改成为英文大写字母，因此导致对原文中的其他一些字母符号也作了相应的调整。还有一点就是译者水平有限，译文中缺点、错误在所难免，恳请读者指正。

王德生

2003 年 6 月 26 日

序　言

自从作者的《Theory of Rings》(环论)和 Artin, Nesbitt, Thrall 的《Rings with Minimum Condition》(具有极小条件环)出版以来,在(非交换)环理论方面已经取得了很多重要的进展。这些进展是:不具备有限假设的环的结构理论,代数的上同调以及非单纯环(Frobenius 代数,拟 Frobenius 环)的结构理论和表示理论。本书的主要目的就是要对这些进展给予首次的综述。为研究一般环所设计的工具改进了关于具有极小条件环的结构的一些结果,以及有限维代数原来的证明。因此我们考虑了把这些一般性的结果和方法具体化到那些传统的情况上去。所以本书实际包括了可以在上述两本书中找到的关于半单纯环的所有结果。例如具有极小条件的单纯环的有限维单纯子代数的中心化子理论,是作为除环上向量空间的完全线性变换环的 Galois 理论的特殊情况出现的。我们相信,通过更为一般的情形可以得出对这些结果更加深刻的理解。

我们的结构理论还可以应用到很多重要的新的类型的环上,其中特别令人感兴趣的是具有极小理想的本原环,代数的代数以及具有多项式恒等式的代数,而具有极小理想的本原环包括了 Banach 空间的有界算子环。有些结果(例如同构定理)首先是对特殊情况得到的(Eidelheit 定理)。对代数的代数的研究提出了许多有趣的问题。与关于周期群的 Burnside 问题相类似的 Kurosh 问题:每一个有限生成的代数的代数是有限维的吗?是其中最有趣的问题之一。与群的情形形成鲜明对照的是,对于代数的代数已获得了一些重要的肯定的结果。特别地,对于代数的代数,与附加上一些限制条件的 Burnside 问题类似的问题已经有了肯定的答案。这一事实是关于 PI-代数(满足多项式恒等式的代数)的一个更为一般的结果的一个推论。

我们所有考虑的出发点是关于任意环的根的定义。环的根是一个理想,它度量环偏离半单纯性的程度。半单纯环是这样的环,它对于不同的元素有着足够多的不可约表示。有着忠实不可约表示的环叫做本原环。第一章我们对于环与代数讨论根,半单纯性以及本原性的基本性质。第二章我们围绕本原环的稠密定理进行思考。本原环的稠密定理是包括着一个向量空间到另一个向量空间的映射的更为一般的结果的特殊情况,其推广及其证明中用到的引理在第四章中将被用以推导对偶空间的所有基本结果。第六章给出了本原环的稠密定理向完全可约模的推广。第三章来考虑对右理想满足极小条件的环。首先我们讨论

具有极小条件的半单纯环的理论,其次我们把关于幂等元和矩阵单位的一些形式上的结果集中在一起,最后我们考虑半准素环和准素环的概念,并得出这些环的结构定理。第四章讨论具有极小理想的本原环的结构理论,我们确定了这种环的同构,反同构以及求导。在第五章中,我们定义模、代数的 Kronecker 乘积,并且把确定单纯代数 Kronecker 乘积的结构问题转化为可除代数和域的情形。在这些考虑中多重代数和形心的概念起到了重要的作用。第六章我们考虑完全可约模及其中心化子,在这一章的最后部分讨论除环上向量空间的完全线性变换环的 Galois 理论。第七章为研究除环提供基础,这些除环在其中心上可能是无限维的。我们讨论除环的自同构的 Galois 理论,除环的 Kronecker 乘积的结构以及一些可换性定理(例如,有限除环上的 Wedderburn 定理)。在第八章我们要考虑几种诣零根,由 Baer 定义的下诣零根就是其中之一,它与环的素理想的交相一致。我们还对右理想具有极大或者极小条件的环考虑了诣零子系统。第九章我们对环的本原理想的集合定义了拓扑,并且由此得出可以把环作为拓扑空间上的连续函数环来加以表示。这方面的最早结果是关于 Boolean 代数的 Stone 表示定理。在第十章中,我们的结构理论被应用于一般环的可换性定理,并被用来研究 PI-代数和代数的代数,进而得出了 Kurosch 问题的主要结果。

我们总是试图使我们的叙述做到自完备并给出完整的证明,特别是在涉及到那些基本结果的时候。我们仅假定读者了解在任何一本抽象代数的教材中都可以找得到的基本知识。偶尔我们也把证明当作练习,但只是对不太重要的结果才这样做。

对不具备有限条件的环的结构理论做出主要贡献的有 Amitsur, Azumaya, Baer, Chevalley, Dieudonné, Nakayama 和本作者。起初我们打算写一系列注释指明每一个人的贡献。然而,我们不得不放弃了这一计划,因为它将延误本书的出版,而本书已筹划多年。我们通常是引用简短的原文来替代查阅其出处。在每一章结束之后我们列出了与这一章的主题相关的基本论文。我们还增补了对所讨论的课题给出了进一步结果的一些参考论文。本书结尾所列的参考文献对大约 1943 年以来发表的论文而言是相当完整的。更早的资料请查阅我的《Theory of Rings》(环论)(Mathematical Surveys, No. 2, 1943)中的参考文献。

我们深深地感谢许多朋友在原稿准备中所给予的帮助。本书的第一稿是以 M. Weisfeid 准备的讲义为基础的。Dieudonné, A. Rosenberg 和 Zelinsky 阅读了后几稿,并提出了许多重要的修改建议。我们还要感谢 Amitsur 和刚故去不久的 Levitzki 教授,他们通知给我们一些尚未发表的结果。最后,我们要对 C. W. Curtis, F. Quigley, A. Rosenberg, G. Seligman 和 F. D. Jacobson 在一些证明上所给予的有益帮助表示深深的谢意。

新港 1956 年 5 月 1 日

策划编辑　王　瑜
责任编辑　丁鹤龄
封面设计　张　楠
版式设计　马静如
责任校对　王效珍
责任印制　韩　刚

郑重声明

目　　录

第一章　根和半单纯性

在这一章里，我们将定义本原环，半单纯环和根这些基础概念. 尽管这些概念可以用许多观点加以探讨，但是最通常的似乎乃是表示论的观点. 无论如何，在这里我们将采用这一观点. 和本书大部分情形一样，本章中我们所讨论的主题是关于不带算子的环的. 几乎所有的讨论都可以容易地拿到交换环上的代数的较为一般的情形上去. 有时向代数的这一推广很简单地就被指出了. 关于本章的这些概念的推广是在 §9 中进行的，在那儿，我们还考虑了这些概念对于算子区的依赖关系的问题. 在 §11 中给出了说明这些基础概念的一些例子.

§1　表示与模

在这一节，我们来回忆一下环表示论的一些基本的概念. 大概读者对于这些都是熟知的，因此我们仅就一些主要的定义和结果给出简单的概括.

首先，我们想到所谓环 A 的一个表示是指 A 到某一个交换群 M 的自同态环内的一个同态，环 A 的一个反表示是指 A 到某一个交换群的自同态环内的一个反同态. 一个表示（反表示）称为忠实的，如果它是一一的，即是一个同构（反同构）. 设 $a \to \bar{a}$ 是一个作用于 M 的表示，则我们可以由令 $ma = m\bar{a}$，$m \in M$，$a \in A$，来定义积集合 $M \times A$ 到 M 的一个合成. 用这种方法，在下面的意义下，我们得到一个右模.

定义 1　M 称为一个右 A-模，如果

(i) M 中定义了一个合成"+"，使得 $(M, +)$ 是一个交换群，

(ii) A 是一个环，

(iii) 定义了一个 $M \times A$ 到 M 内的合成法则，对于所有的 $x, y \in M$ 和 $a, b \in A$，它满足

(a) $(x+y)a = xa + ya$，

(b) $x(a+b) = xa + xb$，

(c) $x(ab) = (xa)b$.

另外，如果 A 有单位元素 1 并且 $x1 = x$，$\forall x \in M$，则 M 称为单式的. [1]

我们注意到了一个表示决定一个右模. 其逆也是成立的. 如果 M 是一个右 A-模，那么用 $ma_R = ma$ 来定义 M 的映射 a_R. 容易验证 a_R 是 $(M, +)$ 的一个自

同态并且对应 $a \to a_R$ 是一个表示. 于是可知表示和模的概念实质是等价的. 用同样的方法可知反表示和左模的概念实质上是一致的. 后者是用满足从(a),(b)和(c)经由颠倒其中所出现的符号的顺序而得到的关系的乘积 am 代替乘积 ma 来定义的.

现在我们来回忆模论的一些基本概念和初等结果.

定义 2 N 称为模 M 的 A-子模,如果

(i) $(N,+)$是$(M,+)$的子群,

(ii) 对于所有的 $a \in A, y \in N, ya \in N$.

定义 3 设 N 是 M 的一个 A-子模,差 A-模 $M-N$ 定义如下:其构成一个差群$(M,+)-(N,+)$,由定义$(N+x)a=N+xa$,该差群则被认为成一个 A-模. 易知,这个定义与 x 在其所在陪集中的选取无关并且模规则成立.

环 A 自己关于其右乘作为模合成是一个模,相应的表示叫做正则表示. 这个模的子模是环 A 的右理想. 本书中"理想"一词没有修饰语总是指双边理想. 如果 B 是 A 的一个理想,商环将用A/B表示,而如上,差模将表示为 $A-B$.

定义 4 设 M 和 M' 是 A-模,M 到 M' 内的映射 σ 称为$(A$-$)$同态,如果

(i) σ 是$(M,+)$到$(M',+)$内的群同态,

(ii) $(xa)\sigma=(x\sigma)a, \forall x \in M, a \in A$.

如果 σ 是一一的,则其被称为一个$(A$-$)$同构:如果存在一个 M 到 M' 上的同态,则 M' 叫做 M 的同态像. 如果存在 M 到 M' 上的一个同构,则 M 和 M' 叫做同构的模. 环 A 的两个表示称为等价的,如果关联的 A-模是同构的.

我们再来回顾,如果 N 是 M 的子模,并且 $\overline{M}=M-N$,则映射 $\gamma: x \to \overline{x}=x+N$ 是 M 到 $\overline{M}$ 上的同态,称之为 M 到 $\overline{M}$ 上的自然同态. 如果 σ 是 M 到另一个模 N 内的同态,则同态像 $M\sigma=\{x\sigma \mid x \in M\}$ 是 N 的一个子模. 又 σ 的核 K,即是使得 $y\sigma=0$ 的元素 y 的集合,是 M 的一个子模. 如果 L 是含于核 K 中的一个子模,则映射 $\overline{\sigma}: x+L \to x\sigma$ 是单值的(即与 x 在其所在陪集中的选取无关). 因此 $\overline{\sigma}$ 是 $M-L$ 到 N 内的一个同态. 我们称 $\overline{\sigma}$ 为由 σ 诱导出的映射,并且注意 $\sigma=\gamma\overline{\sigma}$,其中 γ 是 M 到 $M-L$ 上的自然同态. $\overline{\sigma}$ 的核是 $K-L$. 因此 $\overline{\sigma}$ 是一个同构当且仅当 $K=L$. 这个结果指出了同态基本定理:M 的任意同态像 $M\sigma$ 同构于差模 $M-K$,K 是 σ 的核.

有时,把一个给定的模考虑成为关于另一个环的模是方便的. 显然,如果 B 是一个子环,则任意 A-模 M 可以考虑成为一个 B-模. 又如果 B 是 A 的一个理想,M 是(A/B)-模,则对 $x \in M, a \in A$,规定 $xa=x(a+B)$,就把 M 定义成为一个 A-模. 由表示的观点这是显然的. 我们所进行的一切是在定义关于环 A 的一个同态,这个同态是作为 A 到 A/B 上的自然同态和 A/B 到 M 的自同态环内的同态的合成来定义的. 又显然有, M 作为 A-模的子模是 M 作为(A/B)-模的

子模,反之亦然.如果 D 是由 M 所决定的 A 的表示核,则显然有 $D\supseteq B$,而 D/B 是 A/B 的表示核.反之,假定给定 A-模 M 和含于 A 的表示核中的 A 的理想 B,则可以定义 $x(a+B)=xa$,并且可以验证这使得 M 成为一个 (A/B)-模.我们概括这些结果于下面的命题中.

命题 1 设 A 是一个环,B 是 A 的一个理想.如果 M 是一个 (A/B)-模,则 M 可视为一个 A-模.反之,如果 M 是一个 A-模,而 B 是一个含于表示核中的理想,则 M 可视为一个 (A/B)-模.在每一种情形下,M 作为 A-模的所有子模和 M 作为 (A/B)-模的所有子模是一致的,并且如果 D 是 A 的表示核,则 D/B 是 A/B 的表示核.

Noether 理想理论中使用的商的表记法对我们是有用的.关于 A-模我们按如下的方法使用它:如果 N 是 M 的 A-子模,S 是 M 的子集,则

$$(N:S)=\{b\mid b\in A, sb\in N, \forall s\in S\}.$$

$(N:S)$ 是 A 的右理想.如果 $x\in M$,则右理想 $(0:x)$ 称为 x 的阶或阶理想.显然

$$(0:M)=\bigcap\{(0:x)\mid x\in M\},$$

而这是一个理想,显然它是由 M 所决定的 A 的表示核.因此 A 的表示是忠实的(即一一的)当且仅当 $(0:M)=\{0\}$.我们又观察到,如果 N 是子模,则 $(N:M)=(0:M-N)$.最后,我们注意根据同态基本定理推得的下面的结果.

命题 2 设 M 是一个 A-模,x 是 M 的一个元素,则 $xA=\{xa\mid a\in A\}$ 是 M 的一个子模,并且 $xA\cong A-(0:x)$.

§2 基本定义

设有 A-模的集合 Σ,关联着每一个 $M\in\Sigma$ 的表示核 $(0:M)$ 是有定义的.集合 $\bigcap\{(0:M)\mid M\in\Sigma\}$ 是 A 的一个理想,我们称之为 Σ 的核.Σ 的核等于 $\{0\}$ 当且仅当对每一个 $0\neq a\in A$,有 $M\in\Sigma$ 使得 a 在由 M 所决定的表示下的像是非零的自同态.如果 Σ 的核为 $\{0\}$,则称 Σ 是忠实的(这一专门术语对于单个的模也是要用到的).

本章的基本概念依赖于不可约模的概念.为了我们的目的,采用下面的定义是方便的.

定义 1 一个 A-模 M 称为不可约的和关联的表示称为不可约的,如果

(i) $MA=\{\sum x_ia_i\mid x_i\in M, a_i\in A\}\neq\{0\}$,

(ii) 除 $\{0\}$ 外 M 没有真子模.显然(i)意味着 $M\neq\{0\}$.

现在我们可以给出将要展开的结构理论的基础的一些定义如下.

定义 2 一个环 A 称为(右)本原的,如果它有一个忠实的不可约模.如果 A 是一个任意的环,设 I 是不可约 A-模的集合,则 I 的核称为环 A 的根.如果