高等学校教学用書

高等数学

（初稿）

上　册

朱公謹編

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学

（初稿）

上册

朱公謹编

高等教育出版社

本書由高等教育部委託交通大学数学教研組朱公謹教授編寫的。可作为高等工業学校 320 到 380 学时类型的高等数学課程的教学用書。因編寫时間短促，沒能廣泛征求意見，先作为初稿出版；希有关方面提出意見，供再版时修正的參考。

高 等 数 学

（初稿）

上 册

朱公謹編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版業營業許可証出字第054号）

上海大东集成联合印刷厂印刷 新华书店發行

統一书号 13010·99 开本 850×1168 1/32 印張 10 15/16

字数 252,000 印数 81,001—85,000 定价（4）¥ 1.00

1956年8月第1版 1960年3月上海第9次印刷

目　　錄

第二篇 一元函数的微積分学

緒　論

我們今天來到大学，开始学習高等数学的时候，首先要問一問，高等数学与初等数学有什么不同？这中間的区别，可从兩方面來了解，第一，从研究的对象來說：初等数学所研討的是常量，而高等数学主要是以变量作为研究的对象。在初等代数学和几何学中所遇見的，是固定的数值以及不变的圖形。例如有了一个代数方程，如何求得滿足这方程的常数（方程的根）；或者看了一些几何圖形，而后考察它們所有的特性，再反过來，討論如何作出具有某些特性的圖形。总之，不外乎是不变的形象。但应特别指出，变量的引用，是数学史上一件大事。恩格斯寫道："笛卡兒[①]的变量是数学中的轉折点。因此，运动和辯証法便進入了数学，因此微分和積分也就立刻成为必要的了"[②]。由於解析几何学中曲線性質的研究，同时又由於現实界中运动問題的要求，萊布尼茲[③]和牛頓[④]各自独立地建立了微積分学。自此以后，随着生產事業的不断發展，高等数学遂一日千里，百花齐放。这对於各种科学的影响，是非常巨大的。事实上，現实世界中事物相依而变的規律性，通过高等数学的方法，才能得到精确的反映。伽利略[⑤]早就說过："自然規律，要用

---

① 笛卡兒 (R. Descartes, 1596—1650)，著名法國哲学家、物理学家、数学家和生理学家，其"几何学"一書奠定了解析几何学的基礎。

② 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社 1955 年版第 217 頁。

③ 萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646—1716)，德國大数学家和唯心主义哲学家。

④ 牛頓 (I. Newton, 1642—1727)，天才的英國物理学家、力学家、天文学家和数学家。

⑤ 伽利略 (Galileo Galilei, 1564—1642)，偉大的意大利天文学家、物理学家与力学家。

数学語言來記錄"。恩格斯也曾指出:"要辯証而唯物地了解自然,就必須熟悉数学和自然科学"①。应用高等数学中变量研究的結果來了解自然,不但可以解释过去,还能預見未來;从而掌握自然,並利用自然为人类大众謀幸福。

第二,从研究的方法來看,初等数学中的推証步驟,依据形式邏輯,是非常正确而周密的。但总的說來,初等数学的解決問題,是个别的,零碎的,点点滴滴的。高等数学却不然,它用辯証唯物的观点,全面而生动地來看各种关系。它从高远的观点,提出普遍性的問題,用有力的工具,深刻而徹底地予以解決。例如,在初等数学中,我們知道一个三角形或一圓的面積怎样算法。高等数学不是这样零星地來討論面積問題,却很普遍地假定有一条某些特性的曲線,从而研究它所圍成的地区怎样度量的方法。应用函数与極限概念,这一包罗廣泛的問題可得到圓滿的解決。这样,一个普遍問題解決之后,就有許多問題随着同时得解。这与近代机械化工業的大量生產可以互相比拟,其規模的浩大,气魄的雄偉,將來自能体会,不必在这里多說。

前面的說明,我們希望不要引起一种很容易產生的錯覺,以为精深的高等数学必然很难学,或者是少数人的嗜好。如果这样想法,眞是大大的錯誤,高等数学絕对不是少数人憑空創造出來,它是为適应大众需要,与实际密切相結合的。恩格斯曾說:"純粹数学的研究对象是現实世界中的空間形狀与数量关系,因此,是非常实在的資料。因为这些資料以最高度的抽象形式出現,可能把它們來自外界的起源掩藏起來,但这种掩藏,即使可能,只是淺薄而表面的。要純粹地來研究这种空間形狀与数量关系,我們必須把它們与其內容完全分离,把这里看作無关緊要的內容完全抽掉"②。这几句話不但明确地說出了数学研究的对象,闡明了数学与現实的密切联系,而且特别指出数学的高度抽象性,更注

① 恩格斯:"反杜林論",第二版序,参看三联書店1953年版第48頁。

② 恩格斯:"反杜林論"参看三联書店1953年版正文第35頁。

意防止人們見了数学对象的抽象而对於数学認識來自外界的起源有所怀疑。这样一來，就給唯心論者以致命的打击，为数学樹立起辯証唯物的科学观，其意义是非常重大的。我們应該知道，所謂抽象，决不是远离实际，相反的，必从現实的事物，从事分析和抽象。从現实事物，抽掉各别的内容而保留基本的特性，愈抽愈淨，抽象的結果愈普遍則应用的范圍自然愈廣了。关於数学理論与实踐的关系，契貝雪夫[①]說得好："理論与实踐相接近会產生最良好的結果，而得到益处的不只是实踐；科学本身就在实踐的影响下發展起來：实踐替科学揭露出新的研究对象或旧时已知对象的新的方面……如果，由於旧方法的新应用或新發展，理論得到了很多益处的話，那末，由於新方法的發明，理論將獲益更多，而在这样的情况下，科学便在实踐中找到了正确的引導者"。再就高等数学的体系來看，是有条不紊，系統嚴密的。对於一种現象，如能明白它的系統或規律，就可懂得所以然的道理，不会覚得希奇难解；因此，从这一角度來看，高等数学不像初等数学的繁瑣零乱，学起來反覚得容易。

我國是世界文化發达最早的國家之一。远在公元前100年左右，已有"周髀算經"与"九章算術"，可說是数学史上極古的兩种作品。这兩部書，后來經过好多次整理，現在所保存的"九章算術"，是刘徽（於公元263年）所編注的。刘徽对於圓周率的創造，很多貢献。他已見到圓内接正多边形的边数愈多，愈和圓周密切貼合；所以先由圓内接6边形起算，再算12，24，48，96各边形，算到内接96边形，便已經知道$\pi=3.14\frac{64}{125}$[②]。后來南北朝宋代的祖冲之(429—500)按刘徽的步驟逐步推廣，並为应当时的需要，將所算得的π改用分数登記，取兩个分

---

① 契貝雪夫（П. Л. Чебышев, 1821—1894），俄罗斯大数学家、彼得堡数学学派的奠基人。

② 見李儼："中國数学發展情形"，載新華月报1955年11号第227—232頁。

数，一为 $\frac{22}{7}$，称为“約率”，一为 $\frac{355}{113}$，称为“密率”。此項約率，在当时何承天(370—447)已有相同例子，以 $\pi=\frac{22}{7}$ 入算。至於密率，則較荷蘭人奥托[①]在1573年的計算几乎早一千年，这可說是一种值得驚異的成績。

此外，我們祖先在几何学与代数学方面还存許多傑出的成就。例如，祖暅之(祖冲之的兒子)創造圓球体積的計算(計算得 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，r＝圓球半徑)是公元600年前后的事。“九章算術”中有“方田”、“商功”各一章；“方田”講田地面積的計算，“商功”講立体几何形，所講方法都是正确的。还有“勾股”一章，專論直角三角形的公理和应用。到后來由於生產建設上的要求，又不断地啓發了特殊的二次、三次及联立一次方程的解开。最特出的，是天元術的創造，再由天元術發展到四元(卽四未知数)。为应演算上的需要，楊輝在1261年所介紹的方法就是三百九十年后才在欧洲出現的巴斯噶[②]三角形(时在1654年)。又秦九韶所著“数書九章”(时在1247年)中关於方程的解法与英國人和湼[③]在1819年所發表的方法完全相同。秦九韶还有所謂“大衍求一術”，是用与欧几里得轉輾相除法相似的方式來求解不定方程問題。宋金元时期的中國数学家，如朱世傑等，有所謂垛積、招差之術，就是現代的級数演算。还应提一提的，是算盤的發明，虽还未能确定何时，总当在1439年以前，这一为人民所乐用的工具在計算数学的歷史上自有它的地位。

明代以后，西洋数学被介紹到我國。徐光啓与意大利人天主教士利瑪竇[④]共譯欧几里得“几何原本”前六卷(1606)，后來又与李之藻等編譯“同文算指”(1613)，“圜容較义”(1609)等書。这种外來的刺激，理

① 奥托(V. Otho，約1550—1605)。
② 巴斯噶(B. Pascal，1623—1662)，法國数学家、物理学家和哲学家。
③ 和湼(W. G. Horner，1786—1837)。
④ 利瑪竇(Matteo Ricci，1552—1610)。

应促進我國数学的發展，但这时，明代的統治階級極端腐化，对於精密科学，只有摧殘而不知提倡。在長期的封建統治之下，生產建設，远落人后。再加以近百年來外國帝國主义的侵入，把我國人民压迫得無以为生，这对於科学的打击，当然是無法形容的。到現在，我國的社会主义建設突飛猛進，而政府对於科学的培养与奬励，無微不至，已使我國的数学研究迅速進展。我們深信，由於社会主义制度的优越性，我國的数学必有一異常燦爛的將來。

第一篇　平面解析几何学

第一章　基本公理

§1. 有向線段及其与数的联系

平面几何学中最簡單而最基本的形象無过於点与直線了。因此，我們的学習，拟从点与直線开始。直線上任何兩点 A 及 B 截取了一个線段；以 A 为起点，B 为終点，从起点到終点指出了線段的方向(圖 1)。这样的線段称为**有向線段**，記作 AB。若起点与終点互易，則得一線段 BA，其長与 AB 相等而方向与 AB 相反。若其一的方向为正，則其他的方向为負；簡寫出來，得

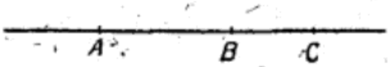

圖 1.

$$AB=-BA, \tag{1.1}$$

或

$$AB+BA=0。 \tag{1.2}$$

又設 A, B, C 是直線上任何三点，則

$$AB+BC=AC,$$

或

$$AB+BC+CA=0。 \tag{1.3}$$

这說明了有向線段接合的公理。顯然，不論 A, B, C 三点在直線上的相互位置怎样，由这三点所确定的有向線段总满足上面的关系。

有向線段說明之后，我們現在把它与数联系起來；說得明白一些，就是要度量它的長度而用数表达出來。为实現这件事，必先有長度單

圖 2.

位。因此，我們在直線上任意取一点 O，叫做原点，再於其右取一点 E，把 OE 当作單位，用数 1 來表达，意思就是規定 OE 的長度为1，OE 的方向为正。这样任意規定好正向(同时也就規定了負向)的直線称为有向直線。如果在有向直線上任何以原点为起点的有向線段如 OA，OB，…等(圖 2)都可用数來表达的話，則由於前面所說的接合公理：

$$OA+AB+BO=0,$$

就得

$$AB=OB-OA,$$

於是任何有向線段 AB 也可以用数來表达了。

这样看來，我們所应該討論的問題是：任何起自原点的有向線段，如 OA，OB，…不論 A，B，…等点在直線上的位置怎样，在选定了長度單位 OE 后，是否必能用一确定的数表达出來？就最簡單的情况來說，若 OA 的長度，恰巧是 OE 的 l 倍，那末，当 OA 的方向与 OE 相同时，可以用 l，相反时，用 $-l$ 來表达 OA；在这里，l 当然是一正整数。其次，若求不到这样一个数 l，但把 OE 等分为 n 段，改取 $\frac{1}{n}$ 作为長度單位，OA 的長度恰好是 $\frac{1}{n}$ 的整数倍。这样，不論 OA 的方向与 OE 相同或相反，必能相应地求得一正的或負的整数 m 及一不等於零的正整数 n，使 OA 等於 $\frac{m}{n}$；这就是說，OA 可由一有理数來表达。当有一有理数 $\frac{m}{n}$，使 $OA=\frac{m}{n}OE$ 时，我們就說 OA 与 OE 兩線段有公度；当 $OE=1$ 时，則称 OA 是与長度單位有公度的線段。实际上，許多有向線段确实是与長度單位有公度的。

說到这里，随着而起的問題，必然是：任何起自原点的有向線段是否必与長度單位有公度呢？在討論这問題之先，应当把有理数的特性，

簡要地敍述一番。

§2. 有理数的閉性与密性

有理数是正負整数、正負分数及零的总称。有理数可以比較大小，依着大小可以序次；序次所根据的公理有：

(一) $a=a$。

(二) 若 $a=b$，則 $b=a$。

(三) 若 $a=b, b=c$，則 $a=c$。

(四) 若 $a\neq b$，則 $a>b, b<a$ 或 $b>a, a<b$。

(五) 若 $a>b, b>c$，則 $a>c$。

其次，还有有理数的运算公理：

(一) 加法及乘法的唯一性公理：

$$a+b,\ a\cdot b \text{ 各为唯一有理数。}$$

(二) 加法及乘法的交換公理：

$$a+b=b+a; \quad a\cdot b=b\cdot a。$$

(三) 加法及乘法的結合公理：

$$a+(b+c)=(a+b)+c; \quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)。$$

(四) 联系加法与乘法的分配公理：

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c。$$

(五) 減法唯一性公理：对於一切数 a 及 b，必有唯一的 x，滿足 $x+a=b$，就是 $x=b-a$。又不論 a 是什么数，必有 $a-a=0$。

(六) 除法唯一性公理：对於任何不等於零的 a，必有唯一的 x，滿足 $x\cdot a=b$，就是 $x=\frac{b}{a}$。又不論 a 是什么数，只要不等於零，必有 $\frac{a}{a}=1$。

(七) 序次的單調性公理：若 $a>b$，則对於任何 c 必有 $a+c>b+c$。若 $a>0, b>0$，則 $a\cdot b>0$。

这些公理乃由现实界的数量关系抽象而來。在这些公理的假定下，有理数的加減乘除就有必然法則可以依循。所当注意的，以零除任何数，是無意义的事，必須加以嚴禁。因a若等於零，欲以a除$b(b\neq 0)$，也就是說要找一个乘零后不等於零的数，当然不可能；若a，b都等於零，也不可能有唯一的数，乘零后等於零。因此，無論如何，以零除任何数，在数学中是不許可的①。除了这件事应加注意外，我們根据公理把有理数加減乘除所產生的結果，必又是一个有理数。有理数的这一特性，称为閉性。

其次，任何兩有理数之間，必又存在着一有理数。若a及b是任何兩不同的有理数，而且，$b>a$，則$\frac{a+b}{2}$必是一个介於a与b之間的有理数：$a<\frac{a+b}{2}<b$，因为

$$b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}>0, \text{即 } b>\frac{a+b}{2};$$

$$\frac{b+a}{2}-a=\frac{b-a}{2}>0, \text{即 } \frac{a+b}{2}>a。$$

由此可見任何兩有理数，不論相差怎样小，必更有一有理数，介於其間。这一特性，常称为有理数的密性。

前在§1講有向線段的度量时，已經知道許多有向線段可用有理数來表达。現在講了有理数的特性，可以反过來，利用有向線段作圖，來闡明有理数在几何学上的意义。試在直線上任意取一点O，再於其右取一点E，由O到E的方向作为直線的正向。然后使O点对应於零，使OE的終点E对应於1。这样，对於任何有理数$\frac{m}{n}$，我們必能在直線上求得一个对应的点。这种与有理数$\frac{m}{n}$相对应的点，称做有理点。与正有理数对应的点在O点之右，与負有理数对应的点在O点之左，从此有理数的大小关系，可由有理点的位次关系顯示出來。有理数

① 否則由$8-8=9-9$，$8(1-1)=9(1-1)$將有$8=9$，是絕無意义的事。

的密性反映於有理点，便是任何以有理点作为端点的線段，不論怎样短，必定含有無窮多的有理点；因此，我們說，有理点在直線上处处密佈。

以上說明了有理数的閉性与密性。所当注意的，这兩种特性是有理数所具备，但非整数所能有；只要想一想，整数加減乘除的結果未必是整数，又在兩整数之間未必更有整数，便可以明白了。

在前面講有理数的密性时，已說过，由於每兩有理数之間又有一有理数，可从而推想其間必有無窮多的有理数。所謂無窮多，意思是多得不可勝数。"無窮多"在这里是形容詞，是說不出、举不尽的多。例如，正整数有無窮多，举了一个，又是一个，接踵而來，永無尽头。又如一切偶数，一切奇数也都無窮多。我們还应該知道，虽然在每兩有理数之間有無窮多的有理数，也就是說，在直線上每兩有理点之間有無窮多的有理点，但是直線上的点却要比無窮多的有理点更多！其說見下。

把無窮多或有窮多的数总起來通盤地加以討論，就有所謂無窮集或有窮集。有窮集很簡單，如 1，2，3，4 四个数可組成一有窮集，大於 1 而小於 500 的素数① 也可成为一有窮集。同样，我們可以想像無窮多的数总起來而成为無窮集。例如，一切正整数，一切偶数，一切奇数，或一切有理数，都是無窮集。一般地說，凡是具有某种特性的一切事物，不論它的內容怎样(或是数，或是点，或是任何其他东西)，都可想像成为集，其中事物叫做集的元素；元素無窮多时，叫做無窮集。例如，直線線段上的点，無論是否包括兩端点在內，就成为一無窮集。高等数学中，主要是以無窮集为討論的对象。討論無窮集，必須愼重其事，万不可把尋常用於有窮集的思想方法不加考慮地随便应用。在無窮的領域中，自有其特殊的思想法則，我們学習数学分析时，將循序漸進地一一加以鑽研。现在，初次見到無窮集的例子，拟首先提出一个基本重要的概念來講明，这就是一一对应的概念；从这一概念，可以認識無窮多

① 整数僅能被 1 及其本身除尽，别無其他因子的，叫做素数。