

高等学校教学用书

# 高等数学

(初稿)

上册

朱公謹編

高等教育出版社

高等学校教学用书



高 等 数 学

(初稿)

上 册

朱公謹編

高等教育出版社

新华书店

PDG

本書由高等教育部委託交通大學數學教研組朱公謹教授編寫的。可作為高等工業學校320到380學時類型的高等數學課程的教學用書。因編寫時間短促，沒能廣泛徵求意見，先作為初稿出版，希有關方面提出意見，供再版時修正的參考。

高 等 數 學  
(初稿)  
上 冊

---

朱公謹編

高等教育出版社出版 北京宣武門內大街25號  
(北京市書刊出版業登記許可證出字第954號)

上海大東書成聯合印刷廠印刷 新華書店發行

---

統一書號15.110.99 開本650.11/32 印張10 15/16  
字數22,000 印數81,000—85,000 定價(4)半1.00  
1956年8月第1版 1960年3月上海第9次印刷

# 目 錄

|          |   |
|----------|---|
| 緒論 ..... | 1 |
|----------|---|

## 第一篇 平面解析几何学

|                |   |
|----------------|---|
| 第一章 基本公理 ..... | 6 |
|----------------|---|

|                        |    |
|------------------------|----|
| § 1. 有向線段及其与数的联系 ..... | 6  |
| § 2. 有理数的閉性与密性 .....   | 8  |
| § 3. 一一对应 .....        | 11 |
| § 4. 实数連續性公理 .....     | 13 |
| § 5. 無理数与無尽小数 .....    | 15 |
| § 6. 实数概念小結 .....      | 18 |
| § 7. 实数的絕對值 .....      | 19 |
| § 8. 有向角及其与数的联系 .....  | 21 |
| § 9. 有向線段的射影 .....     | 24 |

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| 附註 (1) 数学归纳法, (2) 無窮多的一种特征, (3) 無理数与無尽連分数 ..... | 25 |
|-------------------------------------------------|----|

|                 |    |
|-----------------|----|
| 第二章 坐标与方程 ..... | 28 |
|-----------------|----|

|                         |    |
|-------------------------|----|
| § 10. 笛卡兒直角坐标系 .....    | 28 |
| § 11. 坐标軸的平移 .....      | 29 |
| § 12. 兩点間的距离 .....      | 30 |
| § 13. 定比分点 .....        | 31 |
| § 14. 曲線与方程 .....       | 33 |
| § 15. 方向余弦与方向数 .....    | 38 |
| § 16. 矢徑在有向直線上的射影 ..... | 42 |
| § 17. 極坐标 .....         | 42 |

|                   |    |
|-------------------|----|
| 第三章 直線与一次方程 ..... | 45 |
|-------------------|----|

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| § 18. 直線方程的法式 .....             | 45 |
| § 19. 直線的斜率 .....               | 46 |
| § 20. 二元一次方程 .....              | 47 |
| § 21. 直線方程通式与法式的溝通 .....        | 49 |
| § 22. 直線到点的垂直距离 .....           | 51 |
| § 23. 直線方程的参数式 .....            | 52 |
| § 24. 坐标变换, 直線方程对坐标变换的不变性 ..... | 54 |
| § 25. 直線的極坐标方程 .....            | 56 |

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 26. 兩直線的交角                                                                            | 58  |
| § 27. 必要与充分条件                                                                           | 61  |
| § 28. 二元一次方程組                                                                           | 62  |
| § 29. 行列式的特性                                                                            | 65  |
| § 30. 三元一次方程組                                                                           | 69  |
| § 31. 兩直線的交点                                                                            | 72  |
| § 32. 直線束                                                                               | 73  |
| * § 33. 三条直線的交点                                                                         | 75  |
| 附註 (1) 直線段的参数式, (2) 直線方程的兩点式由行列式表达, (3) 方程个数少於未知数个数时的情况, (4) 四元一次方程組問題, (5) 三条直線線性相关的条件 | 79  |
| 第四章 圓錐曲線略論                                                                              | 80  |
| § 34. 圓的一般方程                                                                            | 80  |
| § 35. 橢圓及双曲線的方程                                                                         | 81  |
| § 36. 橢圓及双曲線的准線                                                                         | 85  |
| § 37. 圓錐曲線的極坐标方程                                                                        | 88  |
| § 38. 圓及橢圓的参数方程                                                                         | 89  |
| § 39. 一般二次方程的簡化举例                                                                       | 90  |
| 第二篇 一元函数的微積分学                                                                           |     |
| 第五章 函数概念                                                                                | 95  |
| § 40. 函数的定义                                                                             | 95  |
| § 41. 隱函数与顯函数                                                                           | 97  |
| § 42. 函数作圖                                                                              | 98  |
| § 43. 最簡單的几种函数                                                                          | 101 |
| § 44. 复合函数                                                                              | 103 |
| § 45. 反函数                                                                               | 105 |
| 第六章 極限                                                                                  | 107 |
| § 46. 数列的極限                                                                             | 107 |
| § 47. 数列發散的情况                                                                           | 114 |
| § 48. 数列極限存在的情况                                                                         | 116 |
| § 49. 数列極限存在的准則                                                                         | 120 |
| § 50. 数列極限的有理运算                                                                         | 124 |
| § 51. 数列極限存在与無窮小                                                                        | 126 |
| * § 52. 数列極限的簡單应用举例                                                                     | 127 |
| § 53. 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的極限                                           | 129 |
| § 54. 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow c$ 时的極限                                                | 132 |
| § 55. 關於函数極限的几条定理                                                                       | 135 |
| § 56. 函数極限不存在的情况                                                                        | 137 |
| § 57. 無窮小的比較                                                                            | 141 |
| 附註 (1) 数列極限定义的补充說明, (2) 用聚点說明数列極限, (3) 聚点存在定                                            |     |



|                                                                                                                      |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 理, (4) 審斂准則的證明, (5) 柯西的普遍審斂准則, (6) 柯西審斂准則在<br>函數極限問題上的應用, (7) 函數的極限合併到數列的極限 .....                                    | 142        |
| <b>第七章 連續函數</b> .....                                                                                                | <b>148</b> |
| § 58. 函數在一點上及在區間內的連續性 .....                                                                                          | 148        |
| § 59. 從連續函數產生連續函數 .....                                                                                              | 151        |
| § 60. 連續函數的特性 .....                                                                                                  | 153        |
| § 61. 連續函數的反函數 .....                                                                                                 | 155        |
| § 62. 對數函數及指數函數 .....                                                                                                | 159        |
| 附註 (1) 奇次代數方程有一實根的證明, (2) 連續函數在閉區間內的一致連續,<br>(3) 關於指數函數的補充說明, (4) 對數發明史上一些事實 .....                                   | 161        |
| <b>第八章 導數與微分</b> .....                                                                                               | <b>166</b> |
| § 63. 曲線在一點上的斜率 .....                                                                                                | 166        |
| § 64. 自然現象的瞬時變化率 .....                                                                                               | 167        |
| § 65. 函數在一點上及在區間內的可導性 .....                                                                                          | 169        |
| § 66. 函數的可導性與連續性 .....                                                                                               | 173        |
| § 67. 可導函數的和、積、商 .....                                                                                               | 176        |
| § 68. 可導函數的複合函數 .....                                                                                                | 179        |
| § 69. 可導函數的反函數 .....                                                                                                 | 182        |
| § 70. 對數函數及指數函數的可導性 .....                                                                                            | 188        |
| § 71. 雙曲函數 .....                                                                                                     | 190        |
| § 72. 初等函數的求導問題 .....                                                                                                | 193        |
| § 73. 羅爾定理 .....                                                                                                     | 198        |
| § 74. 拉格朗日定理 .....                                                                                                   | 200        |
| § 75. 微分 .....                                                                                                       | 203        |
| § 76. 高階導數與高階微分 .....                                                                                                | 207        |
| § 77. 二階導數與曲線凹向 .....                                                                                                | 208        |
| 附註 (1) 導數存在與連續, (2) 作圖求導法, (3) 無窮大的比較, (4) 一個連續<br>可導而各階導數在一點上都等於零的函數, (5) 上凹函數 .....                                | 210        |
| <b>第九章 導數概念在函數研究中的應用</b> .....                                                                                       | <b>215</b> |
| § 78. 極值的充分條件 .....                                                                                                  | 215        |
| § 79. 拉格朗日定理的推廣 .....                                                                                                | 218        |
| § 80. 極值問題舉例 .....                                                                                                   | 222        |
| § 81. 不定式問題 .....                                                                                                    | 225        |
| § 82. 函數值的近似計算 .....                                                                                                 | 228        |
| § 83. 方程的近似解法 .....                                                                                                  | 231        |
| § 84. 函數作圖問題 .....                                                                                                   | 234        |
| § 85. 從曲線的參數方程討論曲線的特性 .....                                                                                          | 238        |
| § 86. 從曲線的極坐標方程討論曲線的特性 .....                                                                                         | 243        |
| 附註 (1) 不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ , (2) $e$ 為無理數的證明, (3) 不能展開的函數, (4) 函數<br>展開的柯西余項式, (5) 笛卡兒葉形線, (6) 外擺線與內擺線 ..... | 247        |

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 第十章 定積分與不定積分 .....                                                                         | 254 |
| § 87. 面積問題 .....                                                                           | 254 |
| § 88. 定積分概念 .....                                                                          | 256 |
| § 89. 中值定理 .....                                                                           | 260 |
| § 90. 牛頓-萊布尼茲公式 .....                                                                      | 235 |
| § 91. 基本積分表 .....                                                                          | 239 |
| § 92. 積分的物理意義 .....                                                                        | 273 |
| 附註 (1) 作圖求積分法, (2) 再論對數及指數函數 .....                                                         | 274 |
| 第十一章 積分法 .....                                                                             | 279 |
| § 93. 積分法要旨 .....                                                                          | 279 |
| § 94. 換元法 .....                                                                            | 280 |
| § 95. 分部積分法 .....                                                                          | 285 |
| § 96. 有理函數的積分 .....                                                                        | 289 |
| § 97. 三角及雙曲函數的積分 .....                                                                     | 294 |
| § 98. 幾種可以有理化的函數類型 .....                                                                   | 296 |
| § 99. 不能用初等函數表達的積分 .....                                                                   | 300 |
| § 100. 定積分的近似計算 .....                                                                      | 301 |
| § 101. 勞義積分 .....                                                                          | 304 |
| 附註 (1) 泰勒定理的另一證明, (2) 表達 $\pi$ 的華里斯乘積, (3) $n!$ 隨 $n \rightarrow \infty$ 趨<br>大情況的討論 ..... | 310 |
| 第十二章 微積分概念在幾何學與物理學上的簡單應用 .....                                                             | 313 |
| § 102. 閉合曲線所圍的面積 .....                                                                     | 313 |
| § 103. 弧長 .....                                                                            | 319 |
| § 104. 曲率 .....                                                                            | 324 |
| § 105. 質量重心 .....                                                                          | 329 |
| § 106. 轉動慣量 .....                                                                          | 331 |
| § 107. 物理學中的一階微分方程舉例 .....                                                                 | 334 |
| § 108. 自由降落與簡諧振動 .....                                                                     | 336 |
| 附註 (1) 漸屈線的一種特性, (2) 兩曲線的 $n$ 階接觸, (3) 牛頓引力的勢能 .....                                       | 340 |
| 參考書目 .....                                                                                 | 344 |

## 緒 論

我們今天來到大學，開始學習高等數學的時候，首先要問一問，高等數學與初等數學有什麼不同？這中間的區別，可從兩方面來了解，第一，從研究的對象來說：初等數學所研討的是常量，而高等數學主要是以變量作為研究的對象。在初等代數學和幾何學中所遇見的，是固定的數值以及不變的圖形。例如有了一個代數方程，如何求得滿足這方程的常數（方程的根）；或者看了一些幾何圖形，而後考察它們所有的特性，再反過來，討論如何作出具有某些特性的圖形。總之，不外乎是不變的形象。但應特別指出，變量的引用，是數學史上一件大事。恩格斯寫道：“笛卡兒<sup>①</sup>的變量是數學中的轉折點。因此，運動和辯證法便進入了數學，因此微分和積分也就立刻成為必要的了”<sup>②</sup>。由於解析幾何學中曲線性質的研究，同時又由於現實界中運動問題的要求，萊布尼茲<sup>③</sup>和牛頓<sup>④</sup>各自獨立地建立了微積分學。自此以後，隨着生產事業的不斷發展，高等數學遂一日千里，百花齊放。這對於各種科學的影響，是非常巨大的。事實上，現實世界中事物相依而變的規律性，通過高等數學的方法，才能得到精確的反映。伽利略<sup>⑤</sup>早就說過：“自然規律，要用

① 笛卡兒 (R. Descartes, 1596—1650)，著名法國哲學家、物理學家、數學家和生理學家，其“幾何學”一書奠定了解析幾何學的基礎。

② 恩格斯：“自然辯證法”，人民出版社 1955 年版第 217 頁。

③ 萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646—1716)，德國大數學家和唯心主義哲學家。

④ 牛頓 (I. Newton, 1642—1727)，天才的英國物理學家、力學家、天文學家和數學家。

⑤ 伽利略 (Galileo Galilei, 1564—1642)，偉大的意大利天文學家、物理學家與力學家。



数学語言來記錄”。恩格斯也曾指出：“要辯證而唯物地了解自然，就必須熟悉数学和自然科学”<sup>①</sup>。应用高等数学中变量研究的結果來了解自然，不但可以解釋过去，还能預見未來；从而掌握自然，並利用自然为人类大众謀幸福。

第二，从研究的方法來看，初等数学中的推証步驟，依据形式邏輯，是非常正确而周密的。但总的說來，初等数学的解決問題，是个別的，零碎的，点点滴滴的。高等数学却不然，它用辯證唯物的观点，全面而生动地來看各种关系。它从高远的观点，提出普遍性的問題，用有力的工具，深刻而徹底地予以解決。例如，在初等数学中，我們知道一个三角形或一圓的面積怎样算法。高等数学不是这样零星地來討論面積問題，却很普遍地假定有一条某些特性的曲線，从而研究它所圍成的地区怎样度量的方法。应用函数与極限概念，这一包罗廣泛的問題可得到圓滿的解決。这样，一个普遍問題解決之后，就有許多問題随着同时得解。这与近代机械化工業的大量生產可以互相比拟，其規模的浩大，气魄的雄偉，將來自能体会，不必在这里多說。

前面的說明，我們希望不要引起一种很容易產生的錯覺，以为精深的高等数学必然很难学，或者是少数人的嗜好。如果这样想法，真是大大的錯誤，高等数学絕對不是少数人憑空創造出來，它是为适应大众需要，与实际密切相結合的。恩格斯曾說：“純粹数学的研究对象是现实世界中的空間形狀与数量关系，因此，是非常实在的資料。因为这些資料以最高度的抽象形式出現，可能把它們來自外界的起源掩藏起來，但这种掩藏，即使可能，只是淺薄而表面的。要純粹地來研究这种空間形狀与数量关系，我們必須把它們与其内容完全分离，把这里看作無關緊要的内容完全抽掉”<sup>②</sup>。这几句話不但明确地說出了数学研究的对象，闡明了数学与现实的密切联系，而且特別指出数学的高度抽象性，更注

① 恩格斯：“反杜林論”，第二版序，參看三联書店 1953 年版第 48 頁。

② 恩格斯：“反杜林論”參看三联書店 1953 年版正文第 35 頁。

意防止人們見了数学对象的抽象而對於数学認識來自外界的起源有所怀疑。这样一來，就給唯心論者以致命的打击，为数学樹立起辯証唯物的科学观，其意义是非常重大的。我們應該知道，所謂抽象，決不是远离实际，相反的，必从现实的事物，从事分析和抽象。从现实事物，抽掉各別的内容而保留基本的特性，愈抽愈淨，抽象的結果愈普遍則应用的範圍自然愈廣了。關於数学理論与实践的关系，契貝雪夫<sup>①</sup>說得好：“理論与实践相接近会产生最良好的結果，而得到益处的不只是实践；科学本身就在实践的影响下發展起來：实践替科学揭露出新的研究对象或旧时已知对象的新的方面……如果，由於旧方法的新应用或新發展，理論得到了很多益处的話，那末，由於新方法的發明，理論將獲益更多，而在这样的情况下，科学便在实践中找到了正确的引導者”。再就高等数学的体系來看，是有条不紊，系統嚴密的。對於一种現象，如能明白它的系統或規律，就可懂得所以然的道理，不会觉得希奇难解；因此，从这一角度來看，高等数学不像初等数学的繁瑣零乱，学起來反觉得容易。

我國是世界文化發達最早的國家之一。远在公元前100年左右，已有“周髀算經”与“九章算術”，可說是数学史上極古的兩種作品。這兩部書，后来經過好多次整理，現在所保存的“九章算術”，是刘徽（於公元263年）所編注的。刘徽對於圓周率的創造，很多貢獻。他已見到圓內接正多边形的边数愈多，愈和圓周密切貼合；所以先由圓內接6边形起算，再算12，24，48，96各边形，算到內接96边形，便已經知道 $\pi = 3.14 \frac{64}{125}$ <sup>②</sup>。后来南北朝宋代的祖冲之（429—500）按刘徽的步驟逐步推廣，並为应当时的需要，將所算得的 $\pi$ 改用分数登記，取兩個分

① 契貝雪夫（П. Л. Чебышев, 1821—1894），俄罗斯大数学家、彼得堡数学學派的奠基人。

② 見李儼：“中國数学發展情形”，載新華月報1955年11号第227—232頁。

数，一为  $\frac{22}{7}$ ，称为“約率”，一为  $\frac{355}{113}$ ，称为“密率”。此項約率，在当时何承天(370—447)已有相同例子，以  $\pi = \frac{22}{7}$  入算。至於密率，則較荷蘭人奧托<sup>①</sup>在1573年的計算几乎早一千年，这可說是一种值得驚異的成績。

此外，我們祖先在几何学与代数学方面还有許多傑出的成就。例如，祖暅之(祖冲之的兒子)創造圓球體積的計算(計算得  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ， $r$  = 圓球半徑)是公元600年前后的事。“九章算術”中有“方田”，“商功”各一章；“方田”講田地面積的計算，“商功”講立体几何形，所講方法都是正确的。还有“勾股”一章，專論直角三角形的公理和应用。到后来由於生產建設上的要求，又不断地啓發了特殊的二次、三次及联立一次方程的解开。最特出的，是天元術的創造，再由天元術發展到四元(即四未知数)。为应演算上的需要，楊輝在1261年所介紹的方法就是三百九十年后才在欧洲出現的巴斯噶<sup>②</sup>三角形(时在1654年)。又秦九韶所著“數書九章”(时在1247年)中關於方程的解法与英國人和涅<sup>③</sup>在1819年所發表的方法完全相同。秦九韶还有所謂“大衍求一術”，是用与欧几里得轉輾相除法相似的方式來求解不定方程問題。宋金元时期的中國数学家，如朱世傑等，有所謂垛積、招差之術，就是現代的級数演算。还应提一提的，是算盤的發明，虽还未能确定何时，总当在1439年以前，这一为人民所乐用的工具在計算数学的歷史上自有它的地位。

明代以后，西洋数学被介紹到我國。徐光啓与意大利人天主教士利瑪竇<sup>④</sup>共譯欧几里得“几何原本”前六卷(1606)，后来又与李之藻等編譯“同文算指”(1613)，“圓容較義”(1609)等書。这种外來的刺激，理

① 奧托 (V. Otho, 約 1550—1605)。

② 巴斯噶 (B. Pascal, 1623—1662)，法國数学家、物理学家和哲学家。

③ 和涅 (W. G. Horner, 1786—1837)。

④ 利瑪竇 (Matteo Ricci, 1552—1610)。

应促進我國數學的發展，但這時，明代的統治階級極端腐化，對於精密科學，只有摧殘而不知提倡。在長期的封建統治之下，生產建設，遠落人後。再加以近百年來外國帝國主義的侵入，把我國人民壓迫得無以為生，這對於科學的打擊，當然是無法形容的。到現在，我國的社會主義建設突飛猛進，而政府對於科學的培養與獎勵，無微不至，已使我國的數學研究迅速進展。我們深信，由於社會主義制度的優越性，我國的數學必有一異常燦爛的將來。

# 第一篇 平面解析几何学

## 第一章 基本公理

### §1. 有向線段及其与数的联系

平面几何学中最簡單而最基本的形象無过於点与直線了。因此，我們的學習，拟从点与直線开始。直線上任何兩点  $A$  及  $B$  截取了一个



圖 1.

線段；以  $A$  为起点， $B$  为終点，从起点到終点指出了線段的方向（圖 1）。这样的

線段称为有向線段，記作  $AB$ 。若起点与終点互易，則得一線段  $BA$ ，其長与  $AB$  相等而方向与  $AB$  相反。若其一的方向为正，則其他的方向为負；簡寫出來，得

$$AB = -BA, \quad (1.1)$$

或

$$AB + BA = 0. \quad (1.2)$$

又設  $A, B, C$  是直線上任何三点，則

$$AB + BC = AC,$$

或

$$AB + BC + CA = 0. \quad (1.3)$$

这說明了有向線段接合的公理。顯然，不論  $A, B, C$  三点在直線上的相互位置怎样，由这三点所确定的有向線段总滿足上面的关系。

有向線段說明之后，我們現在把它与数联系起來；說得明白一些，就是要度量它的長度而用数表达出來。为实现这件事，必先有長度單

位。因此，我們在直線上任意取一點  $O$ ，叫做原點，再於其右取一點  $E$ ，把  $OE$  當作單位，用數 1 來表

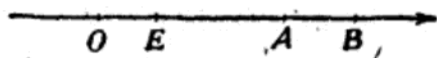


圖 2.

達，意思就是規定  $OE$  的長度為 1， $OE$  的方向為正。這樣任意規定好正向（同時也就規定了負向）的直線稱為有向直線。如果在有向直線上任何以原點為起點的有向線段如  $OA$ ， $OB$ ， $\dots$  等（圖 2）都可用數來表達的話，則由於前面所說的接合公理：

$$OA + AB + BO = 0,$$

就得

$$AB = OB - OA,$$

於是任何有向線段  $AB$  也可以用數來表達了。

這樣看來，我們所應該討論的問題是：任何起自原點的有向線段，如  $OA$ ， $OB$ ， $\dots$  不論  $A$ ， $B$ ， $\dots$  等點在直線上的位置怎樣，在選定了長度單位  $OE$  後，是否必能用一確定的數表達出來？就最簡單的情況來說，若  $OA$  的長度，恰巧是  $OE$  的  $l$  倍，那末，當  $OA$  的方向與  $OE$  相同時，可以用  $l$ ，相反時，用  $-l$  來表達  $OA$ ；在這裡， $l$  當然是一正整數。其次，若求不到這樣一個數  $l$ ，但把  $OE$  等分為  $n$  段，改取  $\frac{1}{n}$  作為長度單位， $OA$  的長度恰好是  $\frac{1}{n}$  的整數倍。這樣，不論  $OA$  的方向與  $OE$  相同或相反，必能相應地求得一正的或負的整數  $m$  及一不等於零的正整數  $n$ ，使  $OA$  等於  $\frac{m}{n}$ ；這就是說， $OA$  可由一有理數來表達。當有一有理數  $\frac{m}{n}$ ，使  $OA = \frac{m}{n} OE$  時，我們就說  $OA$  與  $OE$  兩線段有公度；當  $OE = 1$  時，則稱  $OA$  是與長度單位有公度的線段。實際上，許多有向線段確實是與長度單位有公度的。

說到這裡，隨着而起的問題，必然是：任何起自原點的有向線段是否必與長度單位有公度呢？在討論這問題之先，應當把有理數的特性，



簡要地敘述一番。

## § 2. 有理数的閉性与密性

有理数是正負整数、正負分数及零的总称。有理数可以比較大小，依着大小可以序次；序次所根据的公理有：

- (一)  $a = a$ 。
- (二) 若  $a = b$ ，則  $b = a$ 。
- (三) 若  $a = b, b = c$ ，則  $a = c$ 。
- (四) 若  $a \neq b$ ，則  $a > b, b < a$  或  $b > a, a < b$ 。
- (五) 若  $a > b, b > c$ ，則  $a > c$ 。

其次，还有有理数的运算公理：

- (一) 加法及乘法的唯一性公理：

$$a + b, a \cdot b \text{ 各为唯一有理数。}$$

- (二) 加法及乘法的交換公理：

$$a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a。$$

- (三) 加法及乘法的結合公理：

$$a + (b + c) = (a + b) + c; \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)。$$

- (四) 联系加法与乘法的分配公理：

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c。$$

- (五) 減法唯一性公理：對於一切数  $a$  及  $b$ ，必有唯一的  $x$ ，滿足  $x + a = b$ ，就是  $x = b - a$ 。又不論  $a$  是什么数，必有  $a - a = 0$ 。

- (六) 除法唯一性公理：對於任何不等於零的  $a$ ，必有唯一的  $x$ ，滿足  $x \cdot a = b$ ，就是  $x = \frac{b}{a}$ 。又不論  $a$  是什么数，只要不等於零，必有  $\frac{a}{a} = 1$ 。

- (七) 序次的單調性公理：若  $a > b$ ，則對於任何  $c$  必有  $a + c > b + c$ 。  
若  $a > 0, b > 0$ ，則  $a \cdot b > 0$ 。

这些公理乃由现实界的数量关系抽象而來。在这些公理的假定下,有理数的加減乘除就有必然法則可以依循。所当注意的,以零除任何数,是無意义的事,必須加以嚴禁。因 $a$ 若等於零,欲以 $a$ 除 $b$  ( $b \neq 0$ ),也就是說要找一个乘零后不等於零的数,当然不可能;若 $a, b$ 都等於零,也不可能有唯一的数,乘零后等於零。因此,無論如何,以零除任何数,在数学中是不許可的<sup>①</sup>。除了这件事应加注意外,我們根据公理把有理数加減乘除所產生的結果,必又是一个有理数。有理数的这一特性,称为閉性。

其次,任何兩有理数之間,必又存在着一有理数。若 $a$ 及 $b$ 是任何兩不同的有理数,而且, $b > a$ ,則 $\frac{a+b}{2}$ 必是一个介於 $a$ 与 $b$ 之間的可有理数: $a < \frac{a+b}{2} < b$ ,因为

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0, \text{即 } b > \frac{a+b}{2};$$

$$\frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2} > 0, \text{即 } \frac{a+b}{2} > a.$$

由此可見任何兩有理数,不論相差怎样小,必更有一有理数,介於其間。这一特性,常称为有理数的密性。

前在§1講有向線段的度量时,已經知道許多有向線段可用有理数來表达。現在講了有理数的特性,可以反過來,利用有向線段作圖,來闡明有理数在几何学上的意义。試在直線上任意取一点 $O$ ,再於其右取一点 $E$ ,由 $O$ 到 $E$ 的方向作为直線的正向。然后使 $O$ 点对应於零,使 $OE$ 的終点 $E$ 对应於1。这样,對於任何有理数 $\frac{m}{n}$ ,我們必能在直線上求得一个对应的点。这种与有理数 $\frac{m}{n}$ 相对应的点,称做有理点。与正有理数对应的点在 $O$ 点之右,与負有理数对应的点在 $O$ 点之左,从此有理数的大小关系,可由有理点的位次关系顯示出來。有理数

① 否則由 $8-8=9-9, 8(1-1)=9(1-1)$ 將有 $8=9$ ,是絕無意义的事。

的密性反映於有理点，便是任何以有理点作为端点的線段，不論怎样短，必定含有無窮多的有理点；因此，我們說，有理点在直線上处处密佈。

以上說明了有理数的閉性与密性。所当注意的，这两种特性是有理数所具备，但非整数所能有；只要想一想，整数加減乘除的結果未必是整数，又在兩整数之間未必更有整数，便可以明白了。

在前面講有理数的密性时，已說过，由於每兩有理数之間又有一有理数，可从而推想其間必有無窮多的有理数。所謂無窮多，意思是多得不可勝数。“無窮多”在这里是形容詞，是說不出、举不尽的多。例如，正整数有無窮多，举了一个，又是一个，接踵而來，永無尽头。又如一切偶数，一切奇数也都無窮多。我們还應該知道，虽然在每兩有理数之間有無窮多的有理数，也就是說，在直線上每兩有理点之間有無窮多的有理点，但是直線上的点却要比無窮多的有理点更多！其說見下。

把無窮多或有窮多的数总起來通盤地加以討論，就有所謂無窮集或有窮集。有窮集很簡單，如 1, 2, 3, 4 四个数可組成一有窮集，大於 1 而小於 500 的素数<sup>①</sup>也可成為一有窮集。同样，我們可以想像無窮多的数总起來而成為無窮集。例如，一切正整数，一切偶数，一切奇数，或一切有理数，都是無窮集。一般地說，凡是具有某种特性的一切事物，不論它的內容怎样（或是数，或是点，或是任何其他东西），都可想像成為集，其中事物叫做集的元素；元素無窮多时，叫做無窮集。例如，直線線段上的点，無論是否包括兩端点在內，就成為一無窮集。高等数学中，主要是以無窮集为討論的对象。討論無窮集，必須慎重其事，万不可把尋常用於有窮集的思想方法不加考慮地随便应用。在無窮的領域中，自有其特殊的思想法則，我們學習数学分析时，將循序漸進地一一加以鑽研。現在，初次見到無窮集的例子，拟首先提出一个基本重要的概念來講明，这就是——对应的概念；从这一概念，可以認識無窮多

① 整数僅能被 1 及其本身除尽，別無其他因子的，叫做素数。