



(上册)

高等数学

GAODENG SHUXUE

上海交通大学应用数学系 组编

上海交通大学出版社

高等数学

(上册)

上海交通大学应用数学系 组编

郑麒海 钱芝蓁 汪 静 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本教材分上、下两册.

上册包括:函数;极限与连续;导数与微分;中值定理与导数的应用;定积分与不定积分和微分方程六章.

下册包括:空间解析几何;多元函数微分学;多元函数积分学和级数四章.

本书每节后附有适量的习题,书末附有全部习题答案.

本书特点是由浅入深,推理简明,便于自学.

本书可作高等院校工科、经济管理与农科类专业的高等数学教材,也可供自学读者及有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 上册/郑麒海、钱芝葵、汪静编 —上海:上海交通大学出版社,2001
ISBN 7-313-02721-4

I. 高... II ①郑 ②钱 ③汪静 III 高等数学—高等学校—教材 IV 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001) 第 040516 号

高等数学

(上册)

郑麒海、钱芝葵、汪静编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海锦佳装璜印刷发展公司印刷 全国新华书店经销

开本:890mm×1240mm 1/32 印张:9.125 字数:250 千字

2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印数:1-4050

ISBN7-313-02721-4/O·138 定价:14.50 元

版权所有 侵权必究

前 言

21 世纪是科学技术迅速发展的时期,高等教育的教学改革也正朝着扩大办学规模、提高办学效益与质量的目标而不断深入.本教材是编者在结合多年课堂教学实践的基础上,根据学校教育发展多层次、多标准要求而编写的.

本教材在编写过程中尽量从实际问题引入数学概念.在叙述基本理论、基本概念时不失严密性,力求通俗易懂、由浅入深;在内容选取上,除保证必要的系统性外,尽量注意针对性与应用性,并注意加强处理实际问题的基本知识与基本方法;在例题与习题的配置上,紧密结合相关内容,难度适中,以利于读者对基本内容的理解、消化与吸收,并适量配置了部分经济管理方面应用的例题与习题.

本教材分为上、下两册.上册内容为一元函数微积分与微分方程;下册为多元函数微积分与无穷级数.上册约需 90 学时,下册约需 54 学时.由于各学科的需求不一,对本教材中加 * 号的内容可根据具体情况取舍.

本书可作高等院校全日制非数学类各专业(工科类、经济管理类、农科类等)及成人教育各专业学生的教材或教学参考书;也可供自学读者和有关科技工作者参考.

本书第 1~2 章由郑麒海副教授撰写,第 3~4 章由钱芝蕻副教授撰写,第 5~6 章由汪静副教授撰写.孙薇荣教授仔细审阅了本书全稿,提出了宝贵的意见并始终给予指导,在此,编者深表感谢.

限于编者的水平与经验,本书难免有不当之处,恳请读者指正.

编 者

2001 年 4 月

目 录

1 函数	1
1.1 预备知识	1
1.2 函数概念	3
习题 1-2	6
1.3 函数的简单性态	7
习题 1-3	10
1.4 反函数	11
习题 1-4	12
1.5 复合函数	12
习题 1-5	13
1.6 初等函数	14
1.6.1 基本初等函数	14
1.6.2 初等函数	19
习题 1-6	19
1.7 函数关系的建立	19
习题 1-7	21
2 极限与连续	23
2.1 数列极限	23
2.1.1 数列	23
2.1.2 等差数列与等比数列	24
2.1.3 数列极限	24
2.1.4 收敛数列的性质	26
习题 2-1	28

2.2	函数的极限	28
2.2.1	函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限	28
2.2.2	函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限	30
2.2.3	函数极限的性质	32
2.2.4	函数极限与数列极限的关系	33
	习题 2-2	33
2.3	无穷小量与无穷大量	34
2.3.1	无穷小量	34
2.3.2	无穷大量	35
2.3.3	无穷小与无穷大的关系	37
	习题 2-3	37
2.4	极限的运算法则	37
	习题 2-4	40
2.5	函数极限存在准则 两个重要极限	42
2.5.1	极限存在准则 1——单调有界数列必有极限	42
2.5.2	极限存在准则 2——夹逼定理	43
2.5.3	重要极限之一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	45
2.5.4	重要极限之二: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	46
2.5.5	无穷小的比较	48
	习题 2-5	49
2.6	函数的连续性	51
2.6.1	函数连续的定义	51
2.6.2	函数的间断点及其分类	52
2.6.3	初等函数的连续性	54
2.6.4	闭区间上连续函数的性质	55
	习题 2-6	57
3	导数与微分	60
3.1	导数的概念	60

3.1.1	导数的定义	60
3.1.2	可导与连续的关系	64
3.1.3	导数的几何意义	67
3.1.4	导函数	68
	习题 3-1	70
3.2	求导法则	73
3.2.1	导数的四则运算	73
3.2.2	复合函数的求导法则	76
3.2.3	隐函数求导法	80
	习题 3-2	84
3.3	高阶导数	87
	习题 3-3	91
3.4	微分及其应用	91
3.4.1	微分的定义	91
3.4.2	微分的几何意义	92
3.4.3	微分的运算	93
3.4.4	微分的应用	95
	习题 3-4	96
4	中值定理与导数的应用	98
4.1	中值定理	98
4.1.1	罗尔中值定理	98
4.1.2	拉格朗日中值定理	100
4.1.3	柯西中值定理	104
	习题 4-1	105
4.2	未定式的定值法——罗必塔法则	106
4.2.1	未定式 $\frac{0}{0}$ 的定值法	106
4.2.2	未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的定值法	110

4.2.3 其他未定式的定值法	112
习题 4-2	116
4.3 函数的单调性、极值与最值	117
4.3.1 函数的单调性	117
4.3.2 函数的极值	118
4.3.3 极值的应用问题——最值	121
习题 4-3	124
4.4 曲线的凸性与拐点	126
习题 4-4	129
4.5 函数图形的描绘	129
4.5.1 曲线的渐近线	130
4.5.2 函数图形的描绘	131
习题 4-5	134
5 定积分与不定积分	135
5.1 定积分的概念	135
5.1.1 引例	135
5.1.2 定积分的定义	136
5.1.3 定积分的几何意义	138
习题 5-1	139
5.2 定积分的基本性质	140
习题 5-2	143
5.3 原函数与不定积分	144
5.3.1 原函数与不定积分的概念	144
5.3.2 不定积分的性质及基本积分表	146
习题 5-3	148
5.4 微积分的基本定理	149
5.4.1 变上限函数	150
5.4.2 微积分的基本定理	152
习题 5-4	154

5.5	积分计算	155
5.5.1	第一类换元法	156
5.5.2	第二类换元法	160
5.5.3	分部积分法	164
	习题 5-5	169
5.6	几种特殊类型函数的积分	172
5.6.1	有理函数的积分	172
5.6.2	三角函数有理式的积分	176
5.6.3	简单无理函数的积分	179
	习题 5-6	180
5.7	广义积分	181
5.7.1	无穷区间上的广义积分	181
5.7.2	无界函数的广义积分	183
	习题 5-7	185
5.8	定积分的应用	186
5.8.1	元素法	186
5.8.2	平面图形的面积	187
5.8.3	立体的体积	191
5.8.4	平面曲线的弧长	193
5.8.5	定积分在物理方面的应用	195
5.8.6	函数的平均值	197
	习题 5-8	198
6	微分方程	202
6.1	微分方程的基本概念	202
	习题 6-1	204
6.2	一阶微分方程	205
6.2.1	变量可分离方程	205
6.2.2	齐次微分方程	207
6.2.3	一阶线性方程	209

习题 6-2	212
6.3 特殊高阶微分方程	214
6.3.1 $y''=f(x)$ 型	214
6.3.2 $y''=f(x,y')$ 型	215
6.3.3 $y''=f(y,y')$ 型	216
习题 6-3	217
6.4 线性微分方程解的结构	217
6.4.1 二阶线性齐次方程解的结构	218
6.4.2 二阶线性非齐次方程解的结构	219
习题 6-4	220
6.5 常系数线性微分方程的解法	221
6.5.1 二阶常系数线性齐次方程的解法	221
6.5.2 二阶常系数线性非齐次方程的解法	223
习题 6-5	229
6.6 微分方程应用举例	230
习题 6-6	236
附录 积分表	238
习题答案	250

1 函 数

高等数学是一门研究变量与变量的关系——函数的学科. 在初等数学中, 对函数的概念、性质、图形已作了详细的叙述, 本章只是对函数的主要内容作些复习和小结.

1.1 预备知识

(A) 区间

设 $\mathbb{R}$ 是实数集, $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a < b$, 称

数集 $\{x | a < x < b\}$ 是以 a, b 为端点的开区间, 记为 (a, b) .

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 是以 a, b 为端点的闭区间, 记为 $[a, b]$.

数集 $\{x | a < x \leq b\}$

与数集 $\{x | a \leq x < b\}$ 是以 a, b 为端点的左开右闭与左闭右开区间, 分别记为 $(a, b]$ 与 $[a, b)$.

上述四种区间都是有限区间.

数集 $\{x | x > a\}$, $\{x | x \geq a\}$, $\{x | x < b\}$, $\{x | x \leq b\}$ 及 $\{x | x \in \mathbb{R}\}$ 为无穷区间, 分别记为 $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ 及 $(-\infty, +\infty)$.

(B) 邻域

设 $a \in \mathbb{R}$, δ 为正实数, 称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 是 a 的 δ 邻域, 简称 a 的邻域 (图 1-1), 记为 $\cup(a, \delta)$, 即 $\cup(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$.

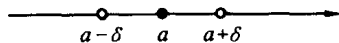


图 1-1

称 $\cup(a, \delta) - \{a\}$ 为 a 的 δ 去心邻域, 记为 $\dot{\cup}(a, \delta)$, 即 $\dot{\cup}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

(C) 绝对值与绝对值不等式

数 x 到原点的距离称为 x 的绝对值, 用 $|x|$ 表示, 即

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值有如下运算性质:

$$(1) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad (2) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

绝对值不等式:

$$(1) |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

证 $|x| < a \Leftrightarrow$ 当 $x \geq 0$ 有 $x < a$, 当 $x < 0$ 有 $-x < a$, 即 $x > -a \Leftrightarrow -a < x < a$

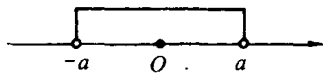


图 1-2

(图 1-2).

$$(2) |x| > b \Leftrightarrow x > b \text{ 或者 } x < -b.$$

证 $|x| > b \Leftrightarrow$ 当 $x \geq 0$ 时有 $x > b$, 当 $x < 0$ 时有 $-x > b$, 即 $x < -b$, 所以 $|x| > b \Leftrightarrow x > b$ 或者 $x < -b$ (图 1-3).

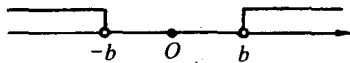


图 1-3

$$(3) |x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

证 因为 $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$, 相加得 $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, 由不等式(1)得

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

又 $|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |y|$, 移项得

$$|x| - |y| \leq |x + y|,$$

故

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

读者可自行证明 $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

不等式(3)通常被称为二边之和大于第三边, 二边之差小于第三边.

$$(4) ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

证 由不等式(3)有 $|x - y| \geq |x| - |y|$,

及 $|x - y| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|)$, 即 $|x| - |y| \geq -|x - y|$,

由不等式(1)得 $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

1.2 函数概念

定义 1.1 设 D 是实数 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 对 D 内每一个 x , 根据一确定的法则 f , 有惟一的实数 y 与之对应, 则称 f 是一个函数, 记为 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 是函数的自变量, y 是函数的因变量; D 是函数 f 的定义域, 函数 f 的定义域通常也记为 $D(f)$. 数集 $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ 为函数 f 的值域, 记为 $Z(f)$.

需要指出的是: (1) 这里 f 是函数, 而 $f(x)$ 是函数 f 在 x 处的函数值. (2) 当一个函数没有指出自变量 x 的范围时, 该函数的定义域是使该函数有意义的点的全体, 即该函数的自然定义域.

函数定义的精髓是“确定的对应法则及函数的定义域”, 即函数的两大要素. 至于自变量与因变量各用什么字母是不重要的. 如函数 $y = f(x), x \in D; u = f(t), t \in D$; 的对应法则相同, 都是 f , 且定义域都是 D . 因而这两个函数相同, 可看作是同一个函数. 而函数 $y = \frac{x}{x}$ 与 $g = 1$, 前者的定义域为 $x \neq 0$, 后者的定义域为一切实数, 由于定义域不同, 这两个函数是不相同的.

不同的法则可用不同的记号表示, 例如 $y = f(x)$ 或 $y = g(x)$ 等. 有时也用 $y = y(x)$ 来表示 y 是 x 的函数.

根据函数定义, $y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ 是一个函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 取定 $(-\infty, +\infty)$ 内 $-x$ 后, 有惟一的 y 值与它对应, 只是在 $(-\infty, 0]$ 与 $(0, +\infty)$ 内用两个解析式表示. 这种表达形式的函数称为分段函数. 注意: 分段函数是一个函数, 不能因为用了两个解析式而认为是两个函数. 下面是两个常见的分段函数.

例 1.1 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

见图 1-4 所示.

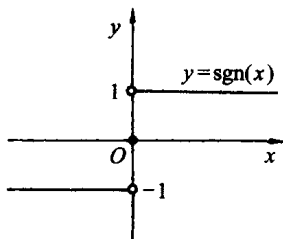


图 1-4

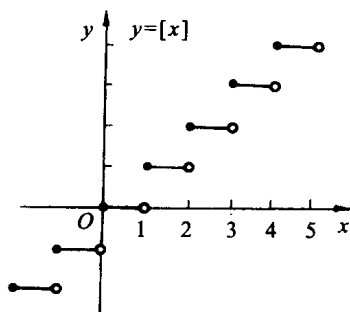


图 1-5

例 1.2 取整函数 $y = [x]$, 即对任意实数 x , 对应的 y 是不超过 x 的最大整数, 如 $[1.5] = 1$; $[-1.5] = -2$; $[0.3] = 0$. 见图 1-5 所示.

下面再举求函数定义域和函数值的例子.

例 1.3 求函数 $y = \sqrt{3x+2} + \arcsin \frac{x-1}{2}$ 的定义域.

解 由于二次根式的被开方数不能为负数, 所以 $3x+2 \geq 0$, 得 $x \in [-\frac{2}{3}, +\infty)$; 由反正弦函数的定义域知 $-1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$, 得 $-2 \leq x-1 \leq 2$, 即 $x \in [-1, 3]$, 所以函数 $y = \sqrt{3x+2} + \arcsin \frac{x-1}{2}$ 的定义域为 $D(f) = [-\frac{2}{3}, +\infty) \cap [-1, 3] = [-\frac{2}{3}, 3]$.

例 1.4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数: (1) $f(\sin x)$; (2) $f(x+a) - f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

解 (1) $0 \leq \sin x \leq 1$, $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, k 为整数.

(2) 由 $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -a \leq x \leq 1-a, \\ a \leq x \leq 1+a, \end{cases}$ 可得 $a \leq x \leq 1-a$,

这里必须 $1-a \geq a$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$. 所以

当 $a < \frac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为 $[a, 1-a]$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数的定义域为 ϕ .

例 1.5 设分段函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leq \frac{2}{\pi}, \\ |x|, & |x| > \frac{2}{\pi}. \end{cases}$

求函数值 $f\left(\frac{2}{\pi}\right), f(-2)$.

解 当 $x = \frac{2}{\pi}$ 时, $|x| = \frac{2}{\pi}$,

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin \frac{1}{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi};$$

当 $x = -2$ 时, $|x| = 2 > \frac{2}{\pi}$, $f(-2) = |-2| = 2$.

例 1.6 写出函数 $f(x) = |2x+1| + |x-2|$ 的分段表示式.

解 由绝对值的定义: 当 $x < -\frac{1}{2}$, $|2x+1| = -(2x+1)$,

当 $x \geq -\frac{1}{2}$, $|2x+1| = 2x+1$; 当 $x < 2$, $|x-2| = 2-x$, 当 $x \geq 2$,

$|x-2| = x-2$; 所以

$$f(x) = \begin{cases} 1-3x, & x < -\frac{1}{2}, \\ x+3, & -\frac{1}{2} \leq x < 2, \\ 3x-1, & x \geq 2. \end{cases}$$

习题 1-2

1. 试确定下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x};$$

$$(3) y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1-x)};$$

$$(4) y = \frac{x}{\tan x};$$

$$(5) y = \lg(1 - 2\cos x);$$

$$(6) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}.$$

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

$$(1) f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2\ln x;$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x-1}.$$

$$3. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases} \text{ 求: } \varphi(3), \varphi(2), \varphi(0), \varphi(0.5),$$

$\varphi(-0.5).$

$$4. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \text{ 求: } \varphi(1), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2).$$

5. 用分段函数表示下列函数:

$$(1) y = |3x - 2|;$$

$$(2) y = |3-x| - |2x-4|;$$

$$(3) y = |2x+1| + |1-3x|.$$

$$6. \text{ 设 } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ 已知 } f(-2) = 11, f(0) = 1, f(2) = 7,$$

求 a, b, c .

1.3 函数的简单性态

(A) 单调性

设函数 $y=f(x), x \in D(f)$. 若对 $\forall x_1, x_2 \in D(f)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$, 称函数 f 在 $D(f)$ 上为严格单调增函数; 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$, 称函数 f 在 $D(f)$ 上为严格单调减函数. 严格单调增函数和严格单调减函数统称为严格单调函数.

当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 称函数 f 为单调增函数; 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \geq f(x_2)$, 称函数 f 为单调减函数, 单调增函数和单调减函数统称为单调函数.

显然, 严格单调函数必然是单调函数.

此外, 我们可以讨论函数在其定义域子集上的单调性. 例如函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数, 但其在 $(-\infty, 0)$ 上是单调减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数, 即函数 $y=x^2$ 是分段单调函数.

例 1.7 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为严格单调增函数.

证 设 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2) \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right] < 0, \\ f(x_1) &< f(x_2). \end{aligned}$$

所以 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为严格单调增函数.

(B) 有界性

设函数 $y=f(x), x \in D(f)$. 若存在正数 M , 使得对 $\forall x \in D \subseteq D(f)$, 有 $|f(x)| \leq M$, 称函数 f 在 D 上有界. 若 f 在其定义域 $D(f)$ 上有界, 则称函数 f 是有界函数.

若函数 f 在 D 上不是有界, 则称 f 在 D 上为无界; 也就是说, 对 $\forall M > 0$, 总有一点 $x_0 \in D$, 有 $|f(x_0)| > M$.

如函数 $y=\frac{1}{x}$, 当 $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 有 $\left|\frac{1}{x}\right| < 3$, 故函数 $y=\frac{1}{x}$ 在