(上册)

高等数学

GAODENG SHUXUE

上海交通大学应用数学系 组编

上海交通大学出版社

高 等 数 学

（上册）

上海交通大学应用数学系　组编

郑麒海　钱芝蓁　汪　静　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本教材分上、下两册.

上册包括:函数;极限与连续;导数与微分;中值定理与导数的应用;定积分与不定积分和微分方程六章.

下册包括:空间解析几何;多元函数微分学;多元函数积分学和级数四章.

本书每节后附有适量的习题,书末附有全部习题答案.

本书特点是由浅入深,推理简明,便于自学.

本书可作高等院校工科、经济管理与农科类等专业的高等数学教材,也可供自学读者及有关科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 上册/郑麒海、钱芝蓁、汪静编 —上海:上海交通大学出版社,2001
ISBN 7-313-02721-4

Ⅰ.高.. Ⅱ ①郑 ②钱 ③汪静 Ⅲ 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001) 第 040516 号

高等数学
(上册)
郑麒海、钱芝蓁、汪静编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)
电话:64071208 出版人:张天蔚
上海锦佳装璜印刷发展公司印刷 全国新华书店经销
开本:890mm×1240mm 1/32 印张:9.125 字数:250 千字
2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷
印数:1-4050
ISBN7-313-02721-4/O·138 定价:14.50 元

前　　言

21 世纪是科学技术迅速发展的时期，高等教育的教学改革也正朝着扩大办学规模、提高办学效益与质量的目标而不断深入. 本教材是编者在结合多年课堂教学实践的基础上，根据学校教育发展多层次、多标准要求而编写的.

本教材在编写过程中尽量从实际问题引入数学概念. 在叙述基本理论、基本概念时不失严密性，力求通俗易懂、由浅入深；在内容选取上，除保证必要的系统性外，尽量注意针对性与应用性，并注意加强处理实际问题的基本知识与基本方法；在例题与习题的配置上，紧密结合相关内容，难度适中，以利于读者对基本内容的理解、消化与吸收，并适量配置了部分经济管理方面应用的例题与习题.

本教材分为上、下两册. 上册内容为一元函数微积分与微分方程；下册为多元函数微积分与无穷级数. 上册约需 90 学时，下册约需 54 学时. 由于各学科的需求不一，对本教材中加 * 号的内容可根据具体情况取舍.

本书可作高等院校全日制非数学类各专业(工科类、经济管理类、农科类等)及成人教育各专业学生的教材或教学参考书；也可供自学读者和有关科技工作者参考.

本书第 1～2 章由郑麒海副教授撰写，第 3～4 章由钱芝蘩副教授撰写，第 5～6 章由汪静副教授撰写. 孙薇荣教授仔细审阅了本书全稿，提出了宝贵的意见并始终给予指导，在此，编者深表感谢.

限于编者的水平与经验，本书难免有不当之处，恳请读者指正.

编　者

2001 年 4 月

目　录

1 函 数

高等数学是一门研究变量与变量的关系——函数的学科.在初等数学中,对函数的概念、性质、图形已作了详细的叙述,本章只是对函数的主要内容作些复习和小结.

1.1 预备知识

(A) 区间

设$\mathbb{R}$是实数集,$a,b\in\mathbb{R}$,且$a<b$,称

数集$\{x|a<x<b\}$是以a,b为端点的开区间,记为(a,b).

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$是以$a,b$为端点的闭区间,记为$[a,b]$.

数集$\{x|a<x\leqslant b\}$

与数集$\{x|a\leqslant x<b\}$是以a,b为端点的左开右闭与左闭右开区间,分别记为$(a,b]$与$[a,b)$.

上述四种区间都是有限区间.

数集$\{x|x>a\}$,$\{x|x\geqslant a\}$,$\{x|x<b\}$,$\{x|x\leqslant b\}$及$\{x|x\in\mathbb{R}\}$为无穷区间,分别记为$(a,+\infty)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,b]$及$(-\infty,+\infty)$.

(B) 邻域

设$a\in\mathbb{R}$,δ为正实数,称开区间$(a-\delta,a+\delta)$是a的δ邻域,简称a的邻域(图1-1),记为$U(a,\delta)$,即$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$.

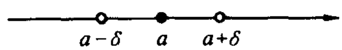

图 1-1

称$U(a,\delta)-\{a\}$为a的δ去心邻域,记为$\dot{U}(a,\delta)$,即$\dot{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

(C) 绝对值与绝对值不等式

数 x 到原点的距离称为 x 的绝对值，用 $|x|$ 表示，即

$$|x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

绝对值有如下运算性质：

(1) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$，　　　(2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

绝对值不等式：

(1) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

证　$|x| < a \Leftrightarrow$ 当 $x \geqslant 0$ 有 $x < a$，当 $x < 0$ 有 $-x < a$，即 $x > -a \Leftrightarrow -a < x < a$（图1-2）.

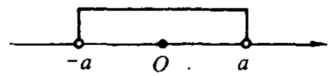

图 1-2

(2) $|x| > b \Leftrightarrow x > b$ 或者 $x < -b$.

证　$|x| > b \Leftrightarrow$ 当 $x \geqslant 0$ 时有 $x > b$，当 $x < 0$ 时有 $-x > b$，即 $x < -b$，所以 $|x| > b \Leftrightarrow x > b$ 或者 $x < -b$（图 1-3）.

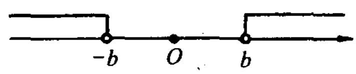

图 1-3

(3) $|x| - |y| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

证　因为 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$，$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$，相加得 $-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$，由不等式(1)得

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

又　$|x| = |x + y + (-y)| \leqslant |x + y| + |y|$，移项得

$$|x| - |y| \leqslant |x + y|,$$

故

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

读者可自行证明　$|x| - |y| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$.

不等式(3)通常被称为二边之和大于第三边，二边之差小于第三边.

(4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

证　由不等式(3)有 $|x - y| \geqslant |x| - |y|$，

及　$|x - y| \geqslant |y| - |x| = -(|x| - |y|)$，即 $|x| - |y| \geqslant -|x - y|$，

由不等式(1)得　$||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

1.2　函数概念

定义 1.1　设 D 是实数$\mathbb{R}$ 的非空子集,对 D 内每一个 x,根据一确定的法则 f,有惟一的实数 y 与之对应,则称 f 是一个函数,记为 $y=f(x),x\in D$. 其中 x 是函数的自变量,y 是函数的因变量;D 是函数 f 的定义域,函数 f 的定义域通常也记为 $D(f)$. 数集$\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$为函数 f 的值域,记为 $Z(f)$.

需要指出的是:(1)这里 f 是函数,而 $f(x)$是函数 f 在 x 处的函数值.(2)当一个函数没有指出自变量 x 的范围时,该函数的定义域是使该函数有意义的点的全体,即该函数的自然定义域.

函数定义的精髓是"确定的对应法则及函数的定义域",即函数的两大要素.至于自变量与因变量各用什么字母是不重要的.如函数 $y=f(x),x\in D;u=f(t),t\in D$;的对应法则相同,都是 f,且定义域都是 D. 因而这两个函数相同,可看作是同一个函数.而函数 $y=\dfrac{x}{x}$与 $g=1$,前者的定义域为 $x\neq0$,后者的定义域为一切实数,由于定义域不同,这两个函数是不相同的.

不同的法则可用不同的记号表示,例如 $y=f(x)$或 $y=g(x)$等.有时也用 $y=y(x)$来表示 y 是 x 的函数.

根据函数定义,$y=\begin{cases}x+1,x\geqslant0,\\x-1,x<0\end{cases}$是一个函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$. 取定$(-\infty,+\infty)$内一 x 后,有惟一的 y 值与它对应,只是在$(-\infty,0]$与$(0,+\infty)$内用两个解析式表示.这种表达形式的函数称为分段函数.注意:分段函数是一个函数,不能因为用了两个解析式而认为是两个函数.下面是两个常见的分段函数.

例 1.1　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ \ \ 0, x=0,\\ \ \ 1, x>0.\end{cases}$$

见图 1-4 所示．

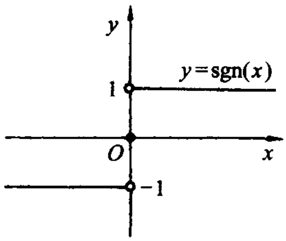

图 1-4

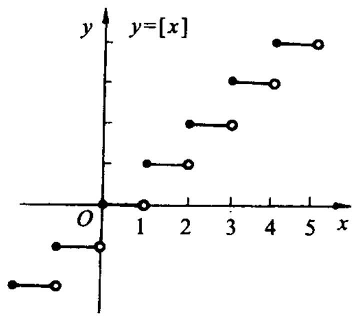

图 1-5

例 1.2 取整函数 $y=[x]$，即对任意实数 x，对应的 y 是不超过 x 的最大整数，如$[1.5]=1$；$[-1.5]=-2$；$[0.3]=0$. 见图 1-5 所示．

下面再举求函数定义域和函数值的例子．

例 1.3 求函数 $y=\sqrt{3x+2}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$的定义域．

解 由于二次根式的被开方数不能为负数，所以 $3x+2\geqslant 0$，得$x\in\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$；由反正弦函数的定义域知$-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，得$-2\leqslant x-1\leqslant 2$，即 $x\in[-1,3]$，所以函数 $y=\sqrt{3x+2}+\arcsin\dfrac{x-1}{2}$的定义域为

$D(f)=\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)\cap[-1,3]=\left[-\dfrac{2}{3},3\right]$.

例 1.4 设函数 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，求函数：(1) $f(\sin x)$；(2) $f(x+a)-f(x-a)\ (a>0)$的定义域．

解 (1) $0\leqslant\sin x\leqslant 1$， $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$k$ 为整数．

(2) 由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ 可得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，

这里必须 $1-a\geqslant a$，即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$. 所以

当 $a<\frac{1}{2}$时，函数的定义域为$[a,1-a]$；

当 $a=\frac{1}{2}$时，函数的定义域为$\left\{\frac{1}{2}\right\}$；

当 $a>\frac{1}{2}$时，函数的定义域为 ϕ.

例 1.5 设分段函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & 0<|x|\leqslant\frac{2}{\pi}, \\ |x|, & |x|>\frac{2}{\pi}. \end{cases}$

求函数值$f\left(\frac{2}{\pi}\right)$，$f(-2)$.

解 当 $x=\frac{2}{\pi}$时，$|x|=\frac{2}{\pi}$，

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}=\frac{2}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\pi};$$

当 $x=-2$ 时，$|x|=2>\frac{2}{\pi}$，$f(-2)=|-2|=2$.

例 1.6 写出函数 $f(x)=|2x+1|+|x-2|$的分段表示式.

解 由绝对值的定义：当 $x<-\frac{1}{2}$，$|2x+1|=-(2x+1)$，当 $x\geqslant-\frac{1}{2}$，$|2x+1|=2x+1$；当 $x<2$，$|x-2|=2-x$，当 $x\geqslant2$，$|x-2|=x-2$；所以

$$f(x)=\begin{cases} 1-3x, & x<-\frac{1}{2}, \\ x+3, & -\frac{1}{2}\leqslant x<2, \\ 3x-1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

习题 1-2

1. 试确定下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(2) $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$;

(4) $y=\dfrac{x}{\tan x}$;

(5) $y=\lg(1-2\cos x)$;

(6) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\ln x^2$，　$g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$，　$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ 求：$\varphi(3)$，$\varphi(2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(0.5)$，$\varphi(-0.5)$.

4. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求：$\varphi(1)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$.

5. 用分段函数表示下列函数：

(1) $y=|3x-2|$;

(2) $y=|3-x|-|2x-4|$;

(3) $y=|2x+1|+|1-3x|$.

6. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，已知 $f(-2)=11$，$f(0)=1$，$f(2)=7$，

求 a,b,c.

1.3 函数的简单性态

(A) 单调性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$. 若对 $\forall x_1,x_2\in D(f)$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，称函数 f 在 $D(f)$ 上为严格单调增函数；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，称函数 f 在 $D(f)$ 上为严格单调减函数．严格单调增函数和严格单调减函数统称为严格单调函数．

当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，称函数 f 为单调增函数；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，称函数 f 为单调减函数，单调增函数和单调减函数统称为单调函数．

显然，严格单调函数必然是单调函数．

此外，我们可以讨论函数在其定义域子集上的单调性．例如函数 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数，但其在 $(-\infty,0)$ 上是单调减函数，在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数，即函数 $y=x^2$ 是分段单调函数．

例 1.7 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为严格单调增函数．

证 设 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

$$=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]<0,$$

$$f(x_1)<f(x_2).$$

所以 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为严格单调增函数．

(B) 有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$．若存在正数 M，使得对 $\forall x\in D\subseteq D(f)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，称函数 f 在 D 上有界．若 f 在其定义域 $D(f)$ 上有界，则称函数 f 是有界函数．

若函数 f 在 D 上不是有界，则称 f 在 D 上为无界；也就是说，对 $\forall M>0$，总有一点 $x_0\in D$，有 $|f(x_0)|>M$.

如函数 $y=\dfrac{1}{x}$，当 $\forall x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<3$，故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在