

輔仁大學理科叢書第一

微分幾何學

劉景芳編

中華民國三十年三月印行

輔仁大學理科叢書第一

微分幾何學

劉景芳編

江苏工业学院图书馆
藏书章

中華民國三十年三月印行

民國三十年三月出版

輔仁大學
叢書第一

微分幾何學一冊

每冊定價大洋七元

外埠酌加運費匯費

* 有 編 譯 權 *
* 翻 印 必 究 *

編譯者

劉景芳

發行者

北平輔仁大學

印刷者

北平廣安門外南河沿子27號
楊樹島印刷局
電話南局二五四七號

PREFACE.

In the first volume of his famous work : "*Cours d'Analyse Mathématique*", the great French mathematician *Edouard Goursat* gives a very good, though concise, introduction to classical Differential Geometry. The subject itself is rather abstract and presents many difficulties for beginners, so that Goursat's three chapters are not easily grasped by students, even though they have mastered the French language.

My friend and colleague, Dr. Liu Ching-fang, professor of Mathematics at our University, undertook the great task of translating this treatise into the Chinese language. His work, however, means much more than a simple translation, for he completed and adapted the original text with such clear explanations that Chinese students of Mathematics will find it easy to read and understand.

I heartily congratulate Dr. Liu for the great service he has rendered to his students and I hope his work will be very useful to the noble class of young Chinese mathematicians.

Augustine Jaensch.

Peking, Fu Jen University, March 20, 1941.

余序

劉君景芳天資明敏，好深沈之思，年甫逾冠，負笈西歐，專攻時人家言。學成歸國，即以教導後進爲己任。雖以學者稟賦有高下，致力有勤惰，因而所得者有深淺之不同，但以君善因材施教，講解詳明，故從之遊者，均得各如其願以去。近更於教授之暇，將世界名著法人古爾薩氏解析數學之一部，譯成中文，將以出而問世，而索予一言爲序。嗚乎，予何足以序君書。古人之爲人作序也，必求有其文，次須有其位，不然，未或率爾爲之也。故顧亭林氏有言曰，人之患在好爲人序，可不慎哉。予於數學，粗涉藩籬，未窺美富。特以衰年無俚，藉博升斗之精，惟朝夕芻米僕賃之資是務。非敢論列是非，高談數理也。何足以序君書。強而行之，不足爲君書重，徒自暴其慳且妄耳。雖然，予雖不敢序君書，而君書自爲年來我國數理上有數之合作。其譯筆之簡潔不苟，習題之分配適宜，在在均足見良工心苦。蓋以蘊之於內也，有明晰堅確之見，則其筆之於書也，自無游移歧惑之辭。君書出世後，將見教學雙方，交受其益。其不脛而走，殆可預卜矣。尤有進者，劉君學有專長，孜孜不倦，於古氏之書，既已寢饋其中，旁通而曲暢之矣，倘能以此爲嚆矢，將古氏書全部均譯成中文，以餉學子，其有裨於我國數學前途者，不尤爲重大歟。不禁馨香禱祝以求之者矣。予曩曾有志編譯微積分學講義，歲月因循，屢作屢輟，嘆汗青之無日，而頭則已白矣。覽君大著，尤不勝荒落之懼也。

民國三十年二月十日余斡文於北平輔仁大學。

張 序

現在國內各大學所通用之高等數學課本，幾全部爲英文者，此終爲過渡時期，而非文化昌明國家所應有之現象也。教育當局及國內學者似應極力改正此事，而在可能範圍中，以國語教授。但西文中譯，有兩種難處：

- 一、名詞之創造。即關於高等數學名詞幾全部缺乏，而成爲譯註者之第一難處。
- 二、語句之構成。以中文解釋高等數學，常感覺難以明瞭；讀譯文者總覺不如讀西文易于了解。此因我國語言文字實尙未有解釋高等數學之習慣也。此爲譯註者之第二難處。

因有此二種困難，故國內學者對於高等數學之編譯，均視爲畏途而不肯入手，即從事者，亦往往半途而廢。今吾友劉君景芳執教于輔仁大學，授課之餘，感覺國內缺乏高等數學之中文課本，毅然欲將古爾薩氏解析數學三卷加以譯註，其犧牲自己之時力，利濟學子之熱心，與不畏難，不自阻，勇往直前之精神，實有足多者。現劉君已將三卷中第一卷之下半部，即微分幾何學部分，譯註完畢，輔仁當局商之劉君，由校中刊行，於是此書即將公之於世矣。

余曾詳讀一週，見其譯筆正確明潔，而處處又能保存原書之風格，更爲難得。其中又有稍加變更之處，取其適合於我國教育現狀也。例如原書舉例過少時，習者對於解析學如無相當根柢，一讀之後，似難得到明確概念；今編者隨時酌增適當之例題一，二則，務求讀者可得正文之正確明晰概念。又如分段加入之新穎練習題目中，有完全解答者，有僅加暗示者，有僅附以答案者，是確能誘導學生，使之不知不覺得以升堂而入室；劉君可謂獨具匠心者矣。

關於解析數學一門，在法國頗有若干巨大名著，均自成一家言，馳名世界。例如古爾薩 (Goursat)，畢加爾 (Picard)，若爾當 (Jordan) 諸大師之巨著

是；就中尤以古氏之書，彌足珍貴。其英文譯本，不但流行於我國，亦甚通用於英美。余留學法國巴黎大學時，適值古氏為該校數學系之主要教授，是以對於古氏之書，亦略知皮毛。僅其第一、二兩卷，即幾乎包羅國內各大學所教授之一切解析學科，誠簡要明晰，盡善盡美之不朽著作；其第三卷之大部分，則不屬大學教材，而為研究高深數學所不可少之資料，故合其一、二、三、三卷，直可謂集解析學之大成矣。

余往時亦曾有意譯述此書，終因疎惰成性，未克有成。今讀劉君此編，不禁愧感交集。尚望劉君繼續將古氏全書加以譯註，其有益于國內數學界，豈淺鮮哉。

張 翼 軍

民國三十年二月三日

自序

本書共分三卷，係就法國古爾薩氏解析數學 (Goursat: Cours d'analyse Mathématique) 第十，十一，十二，三章編譯而成（按古氏書，王尙濟氏有中文譯本，僅及原書之半；又熊慶來氏所著高等算學分析一書，即取古氏此書爲藍本）。正文以原書第五版爲根據；次序則據第一版赫德理克氏 (Hedrik) 英文譯本，因其分論平扭兩種曲線，且陳述曲率理論較爲詳盡故也。又曲面上一族曲線之正交軌道線（特殊如水平割線與坡線）亦爲最能引人注目之曲線；雖古氏原書略而不言，但吾國大學生習微分幾何學時，實屬需要，故酌爲補入。

至編者從事此種譯述工作之動機：則以爲各國大學教學，雖教材內容儘可採自各種文字書籍，而講述必用其本國語言，教本必用其本國文字，其以別人語言文字爲主者，惟殖民地爲然。吾國自海通以來，科學類採西文教本，容或有不得已之苦衷；然試觀今日吾國學術界之成果，究不如取世界名著中之足以爲代表者，精譯詳解，以資利用，且仍不失爲補救科學落後之良劑。久之，庶能洞明其精蘊所在，而收融會貫通之效也。

我國自提倡科學以來，歷年遣派學生遠涉重洋，浩費巨資，姑置不論；即就預備外國文字一端，亦決非短期間所能了事。故四十年前之前輩，須先經如此過程，對於主修學科，往往淺嘗輒止；而後生亦祇有步履先進之所爲，永歷同一過程，永至同一程度而止。如此循環，我中華民族之科學知識，尙何進步建設之可言耶？欲祛此弊，只有先取世界科學中代表之名著，精譯而詳解之，俾青年學子能由本國文字窺得各門學科之途徑，其能通外國語言文字者，從事學習，亦可先立鞏固基礎，再作進一步之探求；則吾國科學前途，庶有彀乎。

編者承乏輔仁大學講席有年，深感學生用外國教本之苦，而所任解析學一類課程，欲直選中文教本而不可得。乃取古氏書，且譯且講，並準吾國情形，酌增內容。今垂五年，已累十章（第八章至第十二章，又第十八章至第二十二章）。學校當局商印為理科叢書之一，因先將微分幾何學部分整理付之印刷既竟，略書數語弁首，尚冀海內賢達，進而教之。

本書譯成，承輔仁大學理學院院長嚴池司鐸（Augustine Jaensch S. V. D.），余敬吾（斡文）先生、張令聞（翼軍）先生賜序，謹致謝忱。

劉景芳識於北平輔仁大學

民國三十年三月二十二日

凡 例

1. 本書所用專門名詞，除習見者外，多係編者自擬。
2. 凡專門名詞，於初見時，加橫線於其下；與其相應之英文名詞見中西名詞對照表中。

3. 凡人名均於初見時兼書原文於後，並以括號括之。
4. 凡應注意之處，原文皆用斜體字以別之；本書則於其下加一橫線
4. 本書所用標點符號中，有「……」一種，為別書所不常引用者，例如第 137 頁第 16 行至第 20 行：

是故「直線 G 此時所轉成之」可展曲面與 Σ' 相切於 A' 點，因曲面 Σ' 上 A' 點處之切面為「直線 G 及曲線 γ' 上 A' 點處之切線」所形成之平面，而「直線 G 所轉成之」可展曲面上 A' 點處之切面亦包含「直線 G 及曲線 γ' 上 A' 點處之切線」也。

6. 編譯時，曾參考下列諸書：

- (1). 熊慶來：高等算學分析；
- (2). Robert J. T. Bell : Elementary Treatise on Coordinate Geometry ;
- (3). William G. Graustien : Differential Geometry ;
- (4). G. Demartres ; Cours de Géométrie Infinitésimale ;
- (5). R. Deltheil : Cours de Mathématiques Générales ;
- (6). E. Lainé : Précis d'Analyse Mathématique ;
- (7). Fabry : Problèmes d'Analyse Mathématique ;
- (8). Abbé Potron · Exercices de Calcul différentiel et intégral ;
- (9). G. Julia : Exercices d'Analyse ;

- (10). Marcel-Yvon : Solutions de Problèmes de Calcul différentiel
et calcul intégral.
-

微分幾何學

目 錄

第一卷 平面曲線

第一章 論包羅線

節 目	頁 數
1. 包羅線之尋求.....	1
2. 直線之包羅線.....	6
3. 圓之包羅線.....	8
習題一 (1-6).....	10

第二章 曲率

4. 曲率半徑	13
習題二 (1-3)	17
5. 縮閉線與伸開線	17
6. 擺線	21
7. 垂鏈形曲線與等切曲線	24
8. 橢圓之縮閉線	26
習題三 (1-6)	28
9. 自立方程式.....	30
習題四 (1-3)	32

第三章 平曲線之接觸

10. 接觸次數	34
11. 解析法	36

12. 吻合曲線	39
13. 吻合曲線之性質	42
習題五 (1—3)	45
習題六 (第一卷總習題 1—10)	46

第 二 卷 扭 線

第 一 章 吻 合 平 面

14. 定義與方程式	54
15. 停立吻合平面	56
16. 停立切線	59
17. 若干種特殊曲線	60
習題七 (1—6)	63

第 二 章 曲 面 之 包 羅 面

18. 具有一參變數之一族曲面	65
19. 具有二參變數之一族曲面	66
20. 可展曲面	67
21. 可展曲面之偏微分方程式	70
習題八 (1—3)	72
22. 一族扭線之包羅線	74
習題九 (1—3)	77

第 三 章 扭 線 之 曲 率 與 扭 率 — 縮 閉 線

23. 球面指示線	80
24. 曲率半徑	81
25. 主法線. 曲率中心	83
26. 極直線. 極曲面	85
習題十 (1—3)	86

27. 扭率	86
28. 福來內氏 (Frenet) 公式	89
29. x, y, z 依 s 之展式	91
習題十一 (1—3)	94
30. 伸開線與縮閉線	97
31. 螺旋線	101
32. 貝特昂氏 (J. Bertrand) 曲線	104
習題十二 (1—7)	106
第 四 章 二扭線之接觸. 曲線與曲面之接觸	
33. 二扭線之接觸	111
34. 吻合曲線	114
35. 一曲線與一曲面之接觸	116
36. 吻合球	118
37. 曲面之吻合直線	119
習題十三 (1—8)	121
第 五 章 關於直線群之理論	
38. 直紋曲面	126
習題十四 (1—3)	134
39. 二元直線羣. 焦曲面	135
習題十五 (1)	140
40. 曲面之法線所形成之二元直線群	141
習題十六 (1—2)	146
41. 三元直線群	147
習題十七 (第二卷總習題 1—16)	150

第三卷 曲面

第一章 在一定曲面上所畫出之曲線之曲率

42. 基本公式. 墨尼艾氏 (Meusnier) 定理	167
43. 關於 $(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)$ 與 $(D du^2 + 2D_1 du dv + D_2 dv^2)$ 兩個二次式之理論	173
44. 尤拉氏 (Euler) 定理, 曲率指示線	175
45. 主要曲率半徑	180
習題十八 (1—13)	185

第二章 一曲面上最能惹人注目之各種曲線

46. 正交軌道線	189
47. 水平割線與坡線	191
習題十九 (1—4)	195
48. 地形圖誌	194
習題二十 (1)	195
49. 漸近觸線	196
習題二十一 (1—16)	199
50. 直紋曲面之漸近觸線	206
習題二十二 (1—2)	208
51. 配偶曲線	209
習題二十三 (1—3)	213
52. 主曲率線	215
習題二十四 (1—4)	219
53. 一曲面之縮閉面	222
54. 羅德里克氏 (Olinde Rodrique) 公式	225
55. 若西慕斯達氏 (Joachimsthal) 定理	227

56. 杜雨班氏 (Dupin) 定理	228
習題二十五 (1—3)	233
57. 測地扭率	235
習題二十六 (1)	239
58. 應用以上所述之各種理論於若干類曲面	239
習題二十七 (1—7)	244

第 三 章 二曲面上點與點間之對應法

59. 球面表示法	253
60. 能合曲面	256
61. «能合在一平面上» 之各種曲面	261
習題二十八 (1)	264
62. 地平曲率. 測地線	265
63. 總曲率. 高思氏 (Gauss) 定理.	269
習題二十九 (1—4)	273
64. 同形變換法	278
65. 一平面在其他一平面上之同形表示法	281
66. 同形平面地理圖	283
習題三十 (1)	286
習題三十一 (第三卷總習題 1—7)	287
中西名詞對照表	307

微分幾何學

第一卷 平面曲線

第一章 論包羅線

1. 包羅線之尋求。——設一平曲線 C 之方程式中含有一參變數 a , 例如

$$(1) \quad f(x, y, a) = 0,$$

若使 a 連續變化, 則曲線 C 之形狀與位置通常亦因之而連續變化, 於是可得一族曲線, 茲以 (C) 表示之. 若 (C) 中所有之曲線皆與某一定曲線 E 相切, 此曲線 E 將名曰 (C) 族曲線之包羅線; (C) 族中諸曲線, 吾人將名之曰被包羅線. 既予一族平曲線 (C) , 其包羅線是否存在? 果存在, 究應如何確定: 此即目前所欲解決之問題.

假定包羅線 E 存在. 設一被包羅線 C 與參變數之數值 a 相對應, 並命 E 與 C 之接觸點 M 之坐標為 (x, y) ; 若然, 則 x, y 均為參變數 a 之函數, 譬如命

$$x = \varphi(a), \quad y = \psi(a);$$

此二函數雖尚在未知之列, 但其能適合於方程式 (1), 可斷言也. 欲確定此二函數, 必須利用 « 當 a 變化時, M 點所畫出之曲線之切線與曲線 C 之切線, 互相重合 » 一種特徵. 茲以 $\delta x, \delta y$ 表示被包羅線 C 之切線之指向係數, 並以 $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}$ 分別表示 $\varphi(a), \psi(a)$ 二未知函數之紀數; 於是可見: 如欲 E 與 C 相切, 必須有

$$(2) \quad \frac{\frac{dx}{da}}{\delta x} = \frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}.$$