1999年理工类硕士研究生入学考试

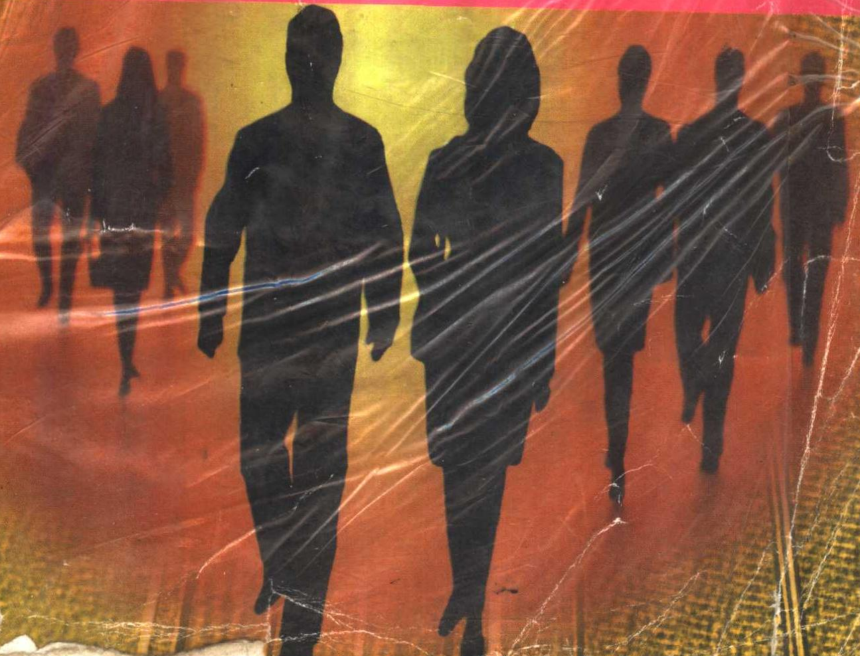
数学复习指南

北京启航考试学校 组编

主编 赵达夫 刘晓

人大版考研

中国人民大学出版社



图书在版编目（CIP）数据

1999 年理工类硕士研究生入学考试数学复习指南/赵达夫，刘晓主编.
北京：中国人民大学出版社，1998

ISBN 7-300-02622-2/G·413

Ⅰ.19…
Ⅱ.①赵… ②刘…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 11341 号

1999 年理工类硕士研究生入学考试数学复习指南
北京启航考试学校 组编
主 编 赵达夫 刘 晓

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路 157 号 邮码 100080）
经 销：新华书店
印 刷：涿州市星河印刷厂

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：44
1998 年 6 月第 1 版 1998 年 6 月第 1 次印刷
字数：1 008 000

定价：48.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

出 版 说 明

在中国人民大学出版社、北方交通大学数学系、北京启航考试学校三方的精心策划和周密组织下，经过选题策划、提纲讨论、分工编写、修改定稿等艰苦细致的工作之后，《1999年理工类硕士研究生入学考试数学复习指南》（以下简称《复习指南》）和《1999年理工类硕士研究生入学考试数学题型分析及模拟试题》（以下简称《题型分析与模拟试题》）终于与广大读者见面了.

为使广大读者更好地了解本书，特作如下说明.

一、编写依据

1. 编写内容和范围依据. 我们对国家教委制定的《全国攻读硕士学位研究生入学考试数学考试大纲》数学一和数学二的考试内容和考试要求进行了综合整理，这是本书编写内容和范围的依据.

2. 编写重点依据. 通过对历年尤其是近三年来理工类考研数学试题的系统扫描、筛选和分析，归纳、总结出复习重点和出题规律，这是本书编写重点的依据.

3. 编写难度依据. 本书编写老师近年来在考研辅导班中征集了大量的疑难问题，其中大部分为广大考生不易掌握的难点问题，这是确定本书编写难度的重要依据.

二、本书特色

本书不仅具有作为考研用书的系统全面、重点突出、难点突出的基本特色，还在以下几方面具有鲜明的特点：

1. 强化复习内容的横向和纵向联系. 如第一篇第一章第一讲中，一共总结了20种求极限的方法，涉及函数、连续、导数、微分中值定理、定积分、级数等章的内容，知识跨度大，涉及高等数学部分的大部分知识. 避免了复习用书教材化的致命弊端，对广大考生的备考极为有利.

2. 注重解题思路和解题技巧的培养. 在本书中，不仅对单个典型例题进行解题思路分析和技巧介绍，而且对每一类型的题目（若干个典型例题）都进行全面总结，归纳解题技巧和方法. 避免了"就题论题"的题海战术，做到举一而反三，对广大考生的复习有事半功倍之效.

3. 着眼考生整体需要，专题复习与专题练习相结合，综合复习与全真模拟相结合. 在《复习指南》中，在注重复习内容的全面性、系统性的同时，更为注重复习的重点和难点，以保证广大考生对应试内容有计划、有步骤地进行强化复习，在《题型分析及模拟试题》中，注重复习的综合性和实战性，以确保广大考生及时检测复习效果，巩固复习成果，强化临场实战感.

三、本书结构

全书分三篇共十八章(详见目录),与《大纲》考试内容完全一致.

按第×讲(专题)来安排每章的内容,是本书在结构安排上的最大特色. 在每一讲中,内容按专题进行编写,知识跨度大,突破了传统的章节安排,使编写形式与内容更为统一.

本书总体策划和具体组编由北京启航考试学校负责,北方交通大学工科数学部主任赵达夫教授、数学系主任刘晓副教授任主编,参与编写的人员有赵达夫、刘晓、龚漫奇、吴灵敏、王秋媛等专家教授. 这些专家教授多年参与考研试卷的阅卷工作,多年在本校及北京启航考试学校进行考研数学的教学工作,具有较高的学术造诣和丰富的教学经验. 本书编写的具体分工如下:第一篇的第四章和第七章,第二篇的第四、五章由赵达夫编写;第三篇由刘晓编写;第一篇的第一、二、五章和第二篇的第三章由龚漫奇编写;第一篇的第三、六章和第二篇的第一、二章由吴灵敏编写. 全书最后由赵达夫、刘晓审校、定稿. 此外,孙玉冰(北京启航考试学校数学教研室),黎维、韩光跃(北京大学),由小川、何建宇(清华大学),刘亚光(中国人民大学),夏勇、丁庆华(北京师范大学),唐正斌(北京科技大学),陈文俊、蒋轩(北京理工大学),王龙、孙宇婷(北方交通大学),杜杏叶、张艳梅(北京农业大学),朱晓娟、刘新华(北京航空航天大学),段火元(中国地质大学)等助理研究员参与了资料的搜集、整理和部分研究工作,在此一并致谢.

由于时间仓促,本书仍难免有许多不足之处,敬请业界同仁和广大读者批评指正. 来信请寄"北京 9633 信箱启航考试学校教材资料部(邮编 10086)",以利再版修订和完善.

作　者

1998 年 5 月

目　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

本章导读

【大纲要求】

一、考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；反函数、复合函数、隐函数和分段函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；简单应用问题的函数关系的建立；数列极限与函数极限的定义以及它们的性质；函数的左右极限；无穷小；无穷大；无穷小的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad ;\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理).

二、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数的概念，了解函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.
6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数连续性的概念，会判断函数间断点的类型.
11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)，并会应用这些性质.

注:这一部分,对数学一、二、三、四四种试卷基本上是相同的,而考试要求中的 6、7、8、9 项,数学三、四两种试卷都降低了一个层次,请选择这两种试卷的考生注意.

【本章结构与主要内容】

本章分两讲,第一讲是如何计算一个含有极限号的式子,其中重点是用洛必达法则求各种不定式的极限. 第二讲是函数、极限、连续剩余部分的内容,重点是寻找函数的间断点并判断其类型,以及复合函数、分段函数与函数记号的有关运算. 另外关于函数的介值定理和求方程根(或函数 0 点)的题目,主要放在第二章第三讲中,请读者留意.

第一讲　极限的计算

一、基本概念、内容、定理、公式

1. 利用函数的连续性.

(1) 如 $f(x)$ 在 x_0 连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 初等函数在其定义区间内连续.

(3) 如 $f(x)$ 在 $\lim\varphi(x)$ 处连续,则 $\lim f(\varphi(x))=f(\lim\varphi(x))$ (即可将极限号移入连续函数的内部).

2. 利用$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

3. 基本初等函数在其定义的开区间的端点处的单向极限值.

(1) 常(常数函数):$f(x)=c,D=(-\infty,+\infty),C(\pm\infty)=C$.

(2) 幂(幂函数):$f(x)=x^\alpha,D\supset(0,+\infty)$.

1) 当 $\alpha=0$ 时,$f(x)=1$ 为常数函数.

2) 当 $\alpha>0$ 时,$(+\infty)^\alpha=+\infty,(0^+)^\alpha=0^+$.

注:符号$(+\infty)^\alpha$的含义是$(+\infty)^\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha$,同理$(0^+)^\alpha=\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha$.

3) 当 $\alpha<0$ 时,$(+\infty)^\alpha=0^+,(0^+)^\alpha=+\infty$.

4) 当 α 是有理数时,设 $\alpha=\dfrac{p}{q}$,其中 p、q 是整数,且 p、q 互质.

如 q 为奇数,p 为奇数,则 $\alpha>0$ 时,$(-\infty)^\alpha=-\infty,(0^-)^\alpha=0^-$;$\alpha<0$ 时,$(-\infty)^\alpha=0^-,(0^-)^\alpha=\cancel{0}\infty$

如 q 为奇数,p 为偶数,则 $\alpha>0$ 时,$(-\infty)^\alpha=+\infty,(0^-)^\alpha=0^+$;$\alpha<0$ 时,$(-\infty)^\alpha=0^+,(0^-)^\alpha=+\infty$.

如 q 为偶数,则 $f(x)=x^\alpha$ 在$(-\infty,0)$上无定义.

5) 当 α 为无理数时,$f(x)=x^\alpha$ 在$(-\infty,0)$上无定义.

(3) 指(指数函数):$f(x)=a^x,D=(-\infty,+\infty)$.

1) 如 $a>1$,则 $a^{+\infty}=+\infty,a^{-\infty}=0^+$;

2) 如 $0<a<1$,则 $a^{+\infty}=0^+,a^{-\infty}=+\infty$.

(4) 对(对数函数):$f(x)=\log_a x,D=(0,+\infty)$

1) 如 $a>1$,则 $\log_a(+\infty)=+\infty,\log_a(0^+)=-\infty$;

2) 如 $0 < a < 1$，则 $\log_a(+\infty) = -\infty, \log_a(0^+) = +\infty$.

(5) 三(三角函数)：$f(x) = \sin x$ 或 $\cos x$，$D = (-\infty, +\infty)$，$\sin(\pm\infty) =$ 不存在，$\cos(\pm\infty) =$ 不存在. 由于其他三角函数都可用 $\sin x$、$\cos x$ 及 1 乘除而得，所以其极限值均可由极限的四则运算法则求出，故这里不再讨论.

(6) 反(反三角函数)：$f(x) = \arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$，$D = (-\infty, +\infty)$.

$$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^{+}; \quad \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^{-};$$

$$\operatorname{arccot}(-\infty) = \pi^{-}; \quad \operatorname{arccot}(+\infty) = 0^{+}.$$

由于 $\arcsin x$，$\arccos x$ 的定义域为闭区间，所以其极限值可由连续性求得，不应在此讨论.

注：此处所列符号的含义：$f(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$，$f(x_0^{\pm}) = \lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$，如 $\log_a(0^+) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$.

4. 无穷大与无穷小的四则运算.

(1) 定式.

1) $\dfrac{1}{\infty} = 0\left(\dfrac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm}\right), \dfrac{1}{0} = \infty\left(\dfrac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty\right)$；

2) $\infty \overset{\times}{\div} a(a \neq 0) = \infty$($a > 0$ 时 $(\pm\infty) \overset{\times}{\div} a = \pm\infty$；$a < 0$ 时，$(\pm\infty) \overset{\times}{\div} a = \mp\infty$)；

3) $\infty \times \infty = \infty$ $((\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty, (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty)$；

4) $\infty \pm a = \infty$ $((\pm\infty) \pm a = \pm\infty)$；

5) $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$.

(2) 不定式.

1) $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$； 2) $\infty \cdot 0$；

3) 除上述定式 5) 中所列以外的 $\infty \pm \infty$.

注：这里的每一个符号都代表以该符号为极限的函数. 如 $\infty \times a(a \neq 0) = \infty$ 表示当 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\square} g(x) = a \neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)g(x) = \infty$.

5. 有关极限不存在的函数的四则运算.

(1) 定式.

1) $a \pm$ 不存在 $=$ 不存在；

2) $a(a \neq 0) \times$ 不存在 $=$ 不存在；

3) $1 \div$ (不存在但不为 ∞) $=$ 不存在.

(2) 不定式.

1) 不存在 $\overset{+}{\underset{\div}{\overset{-}{\times}}}$ 不存在；2) $0 \times$ 不存在.

6. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

我们将这一结论简记为：有界 $\times 0 = 0$.

7. 极限的四则运算法则.

$$\lim_{x\to\square}\left[f(x)\substack{+\\-\\\times\\\div}g(x)\right]\xlongequal{\text{当右边存在时}}\left[\lim_{x\to\square}f(x)\right]\substack{+\\-\\\times\\\div}\left[\lim_{x\to\square}g(x)\right]$$

注 1:在计算极限的过程中,应随时注意利用下列命题分出可算部分的极限以简化计算:

(1) 如$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=a$,则$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=a\pm\lim\limits_{x\to\square}g(x)$;

(2) 如$\lim\limits_{x\to\square}h(x)=b\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to\square}[h(x)g(x)]=b[\lim\limits_{x\to\square}g(x)]$.

注 2:利用本法则和 e^x,$\ln x$ 的连续性,还可推出:

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}\xlongequal{\text{当右边存在时}}\left[\lim_{x\to\square}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}$$

$$(\because\ 左=\lim_{x\to\square}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{[\lim\limits_{x\to\square}g(x)]\ln[\lim\limits_{x\to\square}f(x)]}=右)$$

8. $\lim\limits_{x\to\square}f(\varphi(x))\xlongequal[\text{或 }x\to\square\text{ 时 }\varphi(x)\to\Delta\text{ 且 }f\text{ 连续}\quad\text{则令 }u=\varphi(x)]{\text{如 }x\to\square\text{ 时 }\varphi(x)\to\Delta\text{ 且 }\varphi(x)\neq\Delta\quad\text{则令 }u=\varphi(x)}\lim\limits_{u\to\Delta}f(u)$.

注:(1) 上式只有在右边存在成为∞时方能成立.(2) 常用的换元思路是:将趋于0的式子做元(即如果存在 $g(x)\to 0$,则可令 $u=g(x)$).如 $x\to\infty$ 时可令 $u=\dfrac{1}{x}$;$x\to a$ 时可令 $u=x-a$.(3) 子列定理:如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$ 且 $n\to\infty$ 时 $x_n\to\square$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\xlongequal{\text{令 }x=x_n}\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.

9. 利用子列定理证明“$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=$不存在”.

找两个数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,使 $n\to\infty$ 时 $x_n\to\square$,$y_n\to\square$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$.

10. 洛必达法则:

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal[\text{当右边存在或为}\infty\text{时}]{“\frac{0}{0}”\text{或}“\frac{\infty}{\infty}”}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

11. 利用下述结论(我们称其为指数增长快于幂增长,幂增长快于对数增长):

如 $a>1$,$\alpha>0$,$\beta>0$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\alpha x}}{x^{\beta}}=+\infty\quad 且\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{(\log_a x)^{\beta}}=+\infty$$

12. 利用恒等变形法则:如果在$x\to\square$的过程中(例如在$x\to x_0$的过程中就是在x_0的某空心邻域内),$f(x)=g(x)$,则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)$.

几种常用的变形方法:

(1)$f(x)^{g(x)}\equiv e^{g(x)\ln f(x)}$ (凡底与指数中都含有极限变量 x 时,均可用此恒等变形方法).

(2) 对于“$0\cdot\infty$”型不定式,利用相乘等于颠倒相除化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式,即 $0\cdot\infty=\dfrac{0}{\left(\dfrac{1}{\infty}\right)}=\dfrac{0}{0}$,$0\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\left(\dfrac{1}{0}\right)}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

(3) 对于“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型不定式,分子分母同除以最大的无穷大.

(4) 通分化减：此法常可将“$\infty-\infty$”型不定式化为“$\frac{0}{0}$”型不定式. 具体过程为 $\infty-\infty=\frac{1}{0_1}-\frac{1}{0_2}=\frac{0_2-0_1}{0_1 0_2}=\frac{0}{0}$.

(5) 分子或分母有理化：当分子或分母含有因式“$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$”时，分子分母同乘其共轭根式“$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$”.

(6) 利用 $A-B=B(AB^{-1}-1)$ 化为常见的无穷小：$a^{\square}-1$ 或 $(1+\square)^{\alpha}-1$ $(\square\to 0)$.

(7) 利用 $\frac{A}{B}=\frac{A\,\substack{\times\\ \div}\,C}{B\,\substack{\times\\ \div}\,C}$ 或 $A=A\pm B\mp B$.

(8) 各类 n 项求和公式及拆项求和法.

(9) 其他.

13. 利用 $\square\to 0$ 时 $(1+\square)^{\frac{1}{\square}}\to \mathrm{e}$ 推出的下述结论：

如 $\lim f(x)=1$，则

$$\lim f(x)^{g(x)}=\lim\left\{(1+[f(x)-1])^{\frac{1}{[f(x)-1]}}\right\}^{[f(x)-1]g(x)}=\mathrm{e}^{\lim[f(x)-1]g(x)}$$

14. 利用两边夹法则：

如果在 $x\to\square$ 的过程中，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\lim\limits_{x\to\square}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.

15. 利用等价“$\sim$”代换：

(1) 等价“$\sim$”的定义：如 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $x\to\square$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 等价，记为 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to\square)$.

(2) 几种常见的等价无穷小：当 $\square\to 0$ 时，$\sin\square\sim\square$，$\arcsin\square\sim\square$，$\tan\square\sim\square$，$\arctan\square\sim\square$，$\ln(1+\square)\sim\square$，$\mathrm{e}^{\square}-1\sim\square$，$a^{\square}-1=\mathrm{e}^{\square\ln a}-1\sim\square\ln a$，$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square$，$1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^2$.

(3) 如 $\alpha\sim\alpha'$ $(x\to\square)$，则 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha\beta=\lim\limits_{x\to\square}\alpha'\beta$ 且 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to\square}\frac{\beta}{\alpha'}$.

(4) 如 $\alpha=0(\beta)$ $(x\to\square)$ 即 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{\alpha}{\beta}=0$，则 $\beta+\alpha\sim\beta(x\to\square)$.

注：利用此项性质以及 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$(1+x)^{\alpha}$，$\ln(1+x)$ 的幂级数展式，即可很容易地记住(2)中的内容. 如由 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+0(x)$ $(x\to 0)$ 可知，$(1+x)^{\alpha}-1=\alpha x+0(x)\sim\alpha x(x\to 0)$. 实际上小 0 型泰勒公式就是更精细的等价公式，$\because f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+0(x^n)$ $(x\to 0)$ $\Longleftrightarrow f(x)-[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}]=\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+0(x^n)\sim\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n(x\to 0)$.

16. 利用导数的定义：

当 $f'(x_0)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

17. 利用带皮亚诺型余项的泰勒公式(即小 0 型泰勒公式和小 0 的计算公式:

(1) 如 $f^{(n)}(x_0)$ 存在,则

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + 0(x-x_0)^n \quad (x \to x_0)$$

(2) $0(f(x)) \pm 0(f(x)) = 0(f(x))$;$g(x) \cdot 0(f(x)) = 0(g(x)f(x))$;$0(kf(x)) = 0(f(x))$;$0(0(f(x))) = 0(f(x))$;$0(f(x) + 0(f(x)) = 0(f(x))$

18. 利用微分中值定理求极限.

19. 利用定积分定义:

当$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在时,$\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

一般常取$[a,b] = [0,1]$,$x_k = \dfrac{k}{n}$,$\xi_k = \dfrac{k}{n}$,此时 $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$,$\lambda = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{\Delta x_k\} = \dfrac{1}{n}$,

$\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim\limits_{n \to \infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}$. 即常用公式为:$\lim\limits_{n \to \infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

20. 利用级数与数列极限的关系.

二、典型例题

例 1.1 利用函数的连续性求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\sin x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x)}{e^x + 1}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2 + \ln(3-x)}{\arctan(x-1)}$ (4) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2 + \ln(1+x)}{e^x - 1}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

解:(1) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin 1}{1} = \sin 1$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x)}{e^x + 1} = \dfrac{\ln(1+\cos 0)}{e^0 + 1} = \dfrac{\ln 2}{2}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2 + \ln(3-x)}{\arctan(x-1)} = \dfrac{2^2 + \ln(3-2)}{\arctan(2-1)} = \dfrac{4+0}{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{16}{\pi}$

(4) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2 + \ln(1+x)}{e^x - 1} = \dfrac{1^2 + \ln(1+1)}{e^1 - 1} = \dfrac{1 + \ln 2}{e - 1}$

(5) $\because \ln x$ 连续,$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right) = \ln 1 = 0$

小结:如 $f(x)$ 是初等函数,且 $f(x_0)$ 存在,则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,即初等函数的极限值就是其函数值,这就是所谓的“代值”. (1)、(2)、(3)、(4) 四个小题都是用这种“代值”的方法直接得到了结果,而第(5) 小题由于 $\ln\left(\dfrac{\sin 0}{0}\right)$ 没有定义,所以不能用“代值”的方法直接

求得. 但由于 $\ln x$ 是连续函数，则根据本讲内容 1.(3) 中 $\lim f(\varphi(x)) = f[\lim\varphi(x)]$，即极限号可以进入连续函数的内部，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 是一个熟知的极限，故而得出最后结果.

例 1.2　求下列基本初等函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5)$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}x^{-\frac{1}{3}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-0.1}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}x^{-\frac{2}{5}}$　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$　　(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$　　(12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$　　(14) $\lim\limits_{x\to-1^+}\arccos x$

在 $x\to\square$ 过程中
$f(x)$ 无定义

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$　　(16) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3$

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3$　　(18) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$

(19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$

解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5) = -5$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}x^{-\frac{1}{3}} = -\infty$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-0.1} = 0$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}x^{-\frac{2}{5}} = +\infty$　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x = +\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x = 0$　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x =$ 不存在

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$　　(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x =$ 不存在　　(12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

(13) ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x = 0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x = \pi$

∴ $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x =$ 不存在

(14) $\lim\limits_{x\to-1^+}\arccos x = \arccos(-1) = \pi$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3 = +\infty$　　(16) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3 = -\infty$

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3 = \infty$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} =$ 不存在，∵ $x = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \cdots, \to 0$ 时 $\sqrt{x}$ 无定义

(19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x =$ 不存在，∵ $x = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}, \cdots, \to\infty$ 时 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$ 无定义

小结：(一) 此题所涉及的内容主要都是本讲内容 3 中的结论. 这些结论都是每个考生

应该熟知的，有些结论可以根据基本初等函数的图形来记忆. 如 $y=\ln x$ 的图形，当曲线向右无限延展时曲线向上无限伸展，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；而曲线向 x 轴靠近时曲线向下无限伸展，故 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. 又如 $y=\cos x$ 的曲线向左右无限延展时，它上下摆动不靠近任意一条水平直线，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x=$ 不存在. (二)(6)(7)(8) 和(13) 小题是利用本讲内容 2，两个单向极限不相等时双侧极限不存在，而(15)(16)(17) 小题是对于 $\pm\infty,\infty$ 的解释. 实际上 $+\infty$，$-\infty$ 都属于 ∞ 的范围，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\infty$ 是正确的，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\neq-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^3\neq+\infty$. (三)(18)(19) 小题是说明在 $x\to\square$ 的过程中，如 $f(x)$ 无定义，则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 无意义，而许多同学(包括许多书籍) 常会忽视这一点. (四)(14) 小题利用的是函数的连续性，故读者也要注意在做这一类题目时，也会出现一些不属于这类题目的一些内容.

例 1.3　求下列极限，当极限不存在时需注明是否为无穷大：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x-e^x}{x^2+x-2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-x}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2^x\ln2-2\cos(2x)}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}x^n$

解：(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x-e^x}{x^2+x-2}=\infty$ ($\because\sin1-e\neq0$)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\overset{\text{“}\frac{a}{0}\text{”}}{=\!=}\begin{cases}\infty & a\neq0\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x-0}=1 & a=0\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-x}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}=-\infty$ ($\because\dfrac{e^{\frac{1}{-\infty}}-e^{-(-\infty)}}{\cos\left(\frac{1}{-\infty}\right)}=\dfrac{e^0-e^{+\infty}}{\cos0}=-\infty$)

(4) $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=$ 不存在 $\neq\infty$，$\because\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty\ \lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ($\because\dfrac{\ln0^+}{0^+}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$)

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$ ($\because\sqrt{(-\infty)^2+1}-(-\infty)=+\infty$)

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ($\because\sin x$ 有界，$\dfrac{1}{x}\to0$)

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{2^x\ln 2-2\cos(2x)}$ = 不存在 $\neq\infty$，$\because\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 有界，$x^2\to 0$，$\therefore x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\to 0$. 又 $\because\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ = 不存在，$\therefore\dfrac{1}{2^0\ln 2-2\cos 0}\cdot(1+0-$ 不存在$)$ = 非 0 存在 $\cdot$（存在 $-$ 不存在）= 非 0 存在 $\cdot$ 不存在 = 不存在.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ = 不存在 $\neq\infty$

$\because$ n 为偶数时 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{2k}=1$

n 为奇数时 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{2k-1}=-1$

（实际上这里用的是本讲内容 9. 取两个数列 $\{n_k\}=\{2k\}$，$\{m_k\}=\{2k-1\}$ $k\in N$，使 $k\to\infty$ 时，$n_k\to\infty$，$m_k\to\infty$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{n_k}=1\neq\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{m_k}=-1$）

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

利用本讲内容 9，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，则 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$，$y_n\to 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi)\sin(2n\pi)=0\neq\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}\sin\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\infty$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ = 不存在

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$，$\because(-1)^n$ 有界，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n=\infty$，$\because\lim\limits_{n\to\infty}|(-2)^n|=\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$

(13) $$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0 & |x|<1\\ +\infty & x>1\\ \infty & x<-1\\ 1 & x=1\\ \text{不存在} & x=-1\end{cases}$$

小结：(一)(1) 至(6) 小题主要是利用本讲内容 4.

(二)(7)、(8)、(9)、(13) 四个小题都用到了本讲内容 6，"有界 $\times 0=0$". 注意几个常见的有界函数：$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|(-1)^n|\leqslant 1$，$|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$|\text{arccot}\,x|\leqslant\pi$. 另外第(8) 小题主要利用本讲内容 5"不存在的计算".

(三)(9)、(10) 两小题用到了本讲内容 9，但从解题思路上来讲，应从这两题的函数的图形着手. $f(n)=(-1)^n$ 是一串上下跳动的点列，所以两子列可选上边一串点和下边一串点；而 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是以 $\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 为振幅的变化趋势，且在0点左右有无限次振荡的一条曲线，所以两子列可取振幅上的一串点和过 x 轴的一串点.

(四) 注意第(13) 小题中含有两个字母 n 与 x，其中 n 是极限变量(在 lim 下的字母是极限变量)，而 x 应看做常数. 一般地，在计算极限的过程中，只有"lim" 下的字母看做变量，其他字母都要看做常数，且极限计算的结果中一定不含有"lim" 下的字母. 所以此题的

结果一定不含 n 而可能含有 x，实际上这类题目的结果就是非极限变量的函数(常为分段函数). 如果做这种题目感到困难时，可先固定非极限变量为几个常数，算出结果后再找出解题的办法. 如不会做此题时，可先令 $x=0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3,-3,1,-1$ 等计算 $\lim\limits_{n\to\infty}0^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}3^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}1^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$，然后再做一般的 x 值.

(五) 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^x=$ 不存在，这是因为"$\lim\limits_{n\to\infty}$"中的 n 必须是自然数. 另外在(12)、(13) 题中利用了以下推理：如 $\lim\limits_{x\to\square}|f(x)|=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$.

例 1.4　利用洛必达法则及适当的变形求下列极限(参看本讲内容 10、12、13、)：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\alpha x}}{x^\beta}$　$(a>1,\alpha,\beta>0)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$　$(a_n,b_m\neq 0,n,m\in N)$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x$　$(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$　　(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2-5n+2})$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$　$(a>0)$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$　其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x} & x>0\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$　$(a,b\in R)$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x\ln 2-2x}{1-0}=2^2\ln 2-2\cdot 2=4\ln 2-4$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\alpha x}}{x^\beta}\xlongequal{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\alpha x}(\alpha\ln a)}{\beta x^{\beta-1}}$

易见 $(a^{\alpha x})^{(n)}=a^{\alpha x}(\alpha\ln a)^n\to+\infty$

而 $(x^\beta)^{(n)}=\beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n+1)x^{\beta-n}$

所以当 $n<\beta$ 时 $(x^\beta)^{(n)}\to+\infty$

　　当 $n=\beta$ 时 $(x^\beta)^{(n)}\to\beta!$

　　当 $n>\beta$ 时 $(x^\beta)^{(n)}\to 0$

故对此极限连续使用洛必达法则，可由一个接一个的"$\frac{\infty}{\infty}$"型到达 $\frac{\infty}{\beta!}=\infty$ 或 $\frac{\infty}{0}=\infty$.

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

分析：此题为 $0\cdot\ln 0^+=0\cdot\infty$ 型不定式，由本讲内容 12.(2) 应做变形 $0\cdot\infty=\dfrac{0}{\left(\dfrac{1}{\infty}\right)}=\dfrac{0}{0}$ 或 $0\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\left(\dfrac{1}{0}\right)}=\dfrac{\infty}{\infty}$，具体到本题就是 $x\ln x=\dfrac{x}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)}$ 或 $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}$，由于

$$\frac{(x)'}{\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'}=\frac{1}{\left(\dfrac{-1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)}=-x\ln^2 x,\quad \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}=-x$$

所以做第二种变形好一些.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)}\overset{“\frac{\infty}{\infty}”}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

结论：对于 $f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$ 型不定式，是变形为 $\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}$ 还是变形为 $\dfrac{g(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}$ 呢？一般说来变形要有利于求导，所以一般应把对数函数 ln□，反三角函数 arc□ 放在直接求导的位置上，即应算 $(\Delta\ln\square)'$，$(\Delta\mathrm{arc}\square)'$，而不应算 $\left(\dfrac{\Delta}{\ln\square}\right)'$，$\left(\dfrac{\Delta}{\mathrm{arc}\square}\right)'$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}\quad(a_n,b_m\neq 0;n,m\in N)$

分析：此题属于“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型题目，由本讲内容 12.(3) 分子分母同除以最大的无穷大. 故当 $n>m$ 时分子分母同除以最大的无穷大 x^n；当 $m>n$ 时同除以 x^m；当 $m=n$ 时同除以 $x^n=x^m$.

解：

$$原式=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)+a_{n-2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\cdots+a_0\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}{b_m\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n-m}+b_{m-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n-m+1}+\cdots+b_0\left(\dfrac{1}{x}\right)^n} & n>m\\[2ex] \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n\left(\dfrac{1}{x}\right)^{m-n}+a_{n-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{m-n+1}+\cdots+a_0\left(\dfrac{1}{x}\right)^m}{b_m+b_{m-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)+b_{m-2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\cdots+b_0\left(\dfrac{1}{x}\right)^m} & m>n\\[2ex] \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)+a_{n-2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\cdots+a_0\left(\dfrac{1}{x}\right)^n}{b_m+b_{m-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)+b_{m-2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\cdots+b_0\left(\dfrac{1}{x}\right)^m} & n=m\end{cases}$$

$\because\ l>0$ 时 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^l\to 0$，且 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$