中学数理化复习丛书

平面几何

PINGMIAN JIHE

奚定华 编

ZHONGXUE SHULIHUA FUXI CONGSHU

上海科学技术出版社

内 容 简 介

为了帮助初、高中毕业班教师搞好总复习阶段的教学，也为了帮助初、高中学生搞好总复习，我们约请了一些有多年教学经验的教师编写了《中学数理化复习丛书》。本丛书一套十种：数学六种、物理两种、化学两种。

本书包括：相交线和平行线，三角形，四边形，相似形，圆，轨迹和作图，平面几何的综合问题等内容，比较全面、系统地对初中阶段平面几何知识和技能串点成线，强调归纳总结，纵横联系；对其中的重点和难点进行了分析和讲解；精选例题和习题，例题着重揭示方法和规律，习题选取上注意知识的覆盖面；在编排上考虑到教师复习的需要，由浅入深，分清层次。最后还采取小专题的形式，编排一章综合运用，用代数、三角、解析几何的知识来解一些几何题，以供高中毕业班复习时选用。

中学数理化复习丛书

平 面 几 何

龚定华 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 143,000

1985 年 8 月第 1 版 1985 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—128,800

统一书号：13119·1247 定价：0.89 元

引　言

平面几何是中学数学的基本内容之一，它包括直线形和圆两大部分．这门学科的特点是：概念定理比较多，逻辑思维要求比较高，解题方法比较灵活．因此它往往是学生感到比较困难的学科，是学生学习数学的薄弱环节．由于在学习时对概念没有充分理解，定理没有牢固掌握，特别是不能灵活地运用它们来解决有关的问题，常常会给复习工作带来一定的困难．针对这一情况，在复习时要注意以下几点：

一、加强基础，突出重点

在全面复习和系统整理知识的基础上抓住最基本的内容，要求学生牢固掌握，熟练应用．从整个平面几何来看，它包括相交线和平行线、三角形、四边形、相似形、圆等内容．其中重点要抓住全等三角形、相似三角形和圆这三部分内容，这是掌握整个平面几何知识的关键．对于每一部分内容也要通过知识的归类，突出最重要的概念和定理．例如，相似形这一部分内容，主要抓住两个概念（成比例线段和相似多边形）和五组定理（平行线分线段成比例定理、三角形内角平分线性质定理、相似三角形判定定理、性质定理和射影定理）．对于每一个重要的概念和定理，在复习时必须揭示本质、反复出现、多次练习、不断深化，务必要求学生透彻理解、切实掌握、灵活运用，从而以点带面，举一反三，触类旁通．

二、掌握方法，提高能力

平面几何问题千变万化，解题方法灵活多样，学生常常感到不知所措，无从下手．在复习时要强调掌握基本方法，提高分析问题和解决问题的能力．要抓住以下三个基本方法．

1．基本的思考方法

综合法和分析法是两种基本的思考方法，这是解几何问题一切方法之“本”，在复习教学中，要通过教师示范，学生练习，熟练掌握这两种方法．要使学生既善于从已知条件出发，通过剖析图形，联想到有关的几何概念和定理，推出中间结论，然后逐步得到最后的结论；又善于从结论出发，通过分析，把所要解决的问题转化为另一个问题，把所要证明的结论转化为另一个结论，变复杂为简单，变未知为已知，从而解决问题．

2．基本的证明方法

平面几何的证明问题按其结论来分，大致可以分为以下几种：

- 平面几何证明题
  - 度量关系
    - 等量关系
      - 相等
      - 和差倍分
      - 比例式（等积式）
    - 不等量关系
  - 位置关系
    - 点线
      - 共线点
      - 共点线
    - 线线
      - 平行
      - 垂直
    - 点圆
      - 共圆点
      - 共点圆
    - 线圆相切
    - 圆圆相切

其中最基本的是相等关系和比例式，也就是证明线段相等、角相等和线段的比例式、等积式．这两类问题是平面几何

中最常见，也是最基本的证明问题，其他很多问题可以通过分析转化为这两类问题．例如，证明线段的和差问题常常可以用截长法或补短法把它转化为线段相等的问题．证明线段的倍分问题常常可以用加倍法或折半法把它转化为线段相等的问题．如已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，延长AB到D，使$BD=AB$，E是AB的中点．求证：$CD=2CE$．

用加倍法，作$BF\parallel EC$，交AC延长线于F，则$BF=2CE$．问题转化为证明$CD=BF$（图1）．用折半法，取CD的中点M，连结BM，则$CM=\frac{1}{2}CD$．问题转化为证明$CM=CE$（图2）．

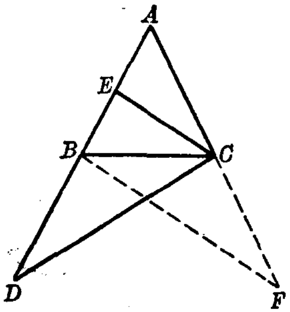


图 1

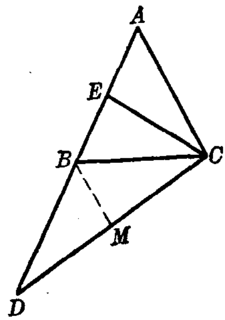


图 2

因此对于这两类问题，在复习时要让学生反复练习，熟练掌握它们的证明方法．

3．添置辅助线的常用方法

添辅助线往往是学生感到最棘手的问题．它的方法很多，需要对图形作具体的分析．但由于每一种图形有它特定的性质，因此它的辅助线也有一些常用的添置方法．要让学生通过复习总结各种常见图形的辅助线的添法，找出它们的

规律，提高解题的能力.

例如与圆有关的图形的辅助线有以下几种常用的添置方法：

(1) 有弦常添弦心距[图 3(1)]；

(2) 有直径常添直径上的圆周角[图 3(2)]；

(3) 有切线常添过切点的半径[图 3(3)]；

(4) 有两个圆常添连心线[图 3(4)]；

(5) 有相交圆常添公共弦[图 3(5)]；

(6) 有相切圆常添公切线[图 3(6)]；

(7) 有四边形对角互补或两个三角形同底同旁等顶角，常添辅助圆[图 3(7)].

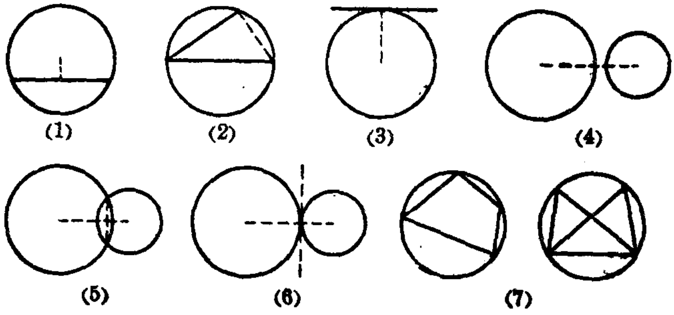


图 3

三、纵横联系，综合应用

在复习时，除了加强本学科知识的前后联系以外，还必须加强它与其他数学学科的联系，特别是高中阶段复习时，更要注意综合应用. 要求学生在掌握平面几何基本概念、定理、图形性质的基础上，既能解决有关的平面几何综合问题，又能应用平面几何的知识和方法解决有关的代数、三角、立体几何和解析几何等问题.

目　　录

第一章　相交线和平行线

本章是平面几何中最基本的内容，因此复习好这一章是进一步复习其他各章的基础．它的特点是基本概念比较多，在复习时必须让学生正确理解这些概念，通过系统的归纳、分析比较，掌握它们之间的区别和联系．本章的复习要求是让学生掌握线段、角、垂线和平行线的概念以及它们的判定和性质，其中特别要抓住角的概念和平行线的判定和性质，这是本章复习的重点．

一　线段、射线和直线

这里要求学生掌握两点：

1．线段、射线和直线的区别和联系

线段有两个端点，射线有一个端点，直线没有端点．

线段向一方延长可得到射线，向两方延长可得到直线，它是射线和直线的一部分．

射线反向延长可得到直线，它是直线的一部分．

2．直线和线段的基本性质

经过两点有一条直线，并且只有一条直线．

在所有连结两点的线中，线段最短．

从基本技能来看，通过复习要让学生能熟练地进行线段和差倍分的计算和证明.

例 已知线段 AB，延长 AB 到 C，使 $BC=\frac{1}{3}AB$，D 为 AC 的中点. 如果 $CD=4\text{cm}$，求 AB 的长(图 1-1).

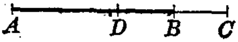


图 1-1

解 $\because$ D 是 AC 的中点,

$$\therefore\quad AD=CD=4(\text{cm}).$$

$$\because\quad BC=\frac{1}{3}AB,\quad \therefore\quad AB=3BC,$$

$$\therefore\quad DC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB+BC)=2BC,$$

则
$$BC=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}\times 4=2(\text{cm}).$$

$$DB=CD-BC=2BC-BC=BC=2(\text{cm}).$$

$$\therefore\quad AB=AD+DB=4+2=6(\text{cm}).$$

二 角

这是本章复习的重点之一. 它包括角的定义、度量、分类和两个角的关系等内容. 对于角的定义要掌握两个，既要知道以一点为公共端点的两条射线所组成的图形，叫做角，又要了解角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的. 其中特别要注意复习两个角的关系，这部分概念比较多. 从数量关系来看，有余角和补角；从位置关系来看，有邻角、对顶角、同位角、内错角和同旁内角等. 不但要求学生正确地理解每一个概念的定义，通过对比，弄清它们之间的区别；而且通过一些反面的例子，或者似是而非，容易混淆的问题(例如，习题一

中的1(4)、(8)，2(2)、(3)等）让学生鉴别和辨析，从而使学生真正掌握这些概念。在此基础上，再通过一些有关角的计算和证明问题，让学生熟练地运用这些概念。

例1 已知一个角的补角比它的余角的3倍少34°，求这个角的度数。

解 设这个角的度数为$x°$，则它的补角的度数为$(180-x)°$，它的余角的度数为$(90-x)°$。

由题意，得

$$180-x=3(90-x)-34.$$

解这个方程，得

$$x=28.$$

答：这个角是28°。

这个计算题用的是代数解法，比纯几何的方法简便。

例2 如图1-2，已知：AB、CD都是直线，$\angle 1=100°$，$\angle 2=32°28'$，OF是$\angle AOD$的平分线。求$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$的度数。

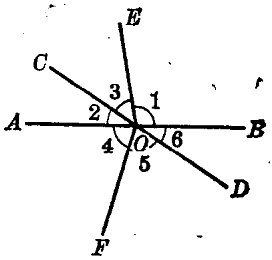


图 1-2

解 ∵ AB是直线，

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$，

∴ $\angle 3=180°-\angle 1-\angle 2$
$=180°-100°-32°28'$
$=47°32'$。

∵ AB、CD都是直线，

∴ $\angle 2$和$\angle 6$是对顶角，

$$\therefore\quad \angle 6=\angle 2=32°28',$$

$$\angle 4=\angle 5=\frac{1}{2}(180°-\angle 6)=\frac{1}{2}(180°-32°28')$$
$$=73°46'.$$

三 垂 线

通过复习要求学生掌握垂线的概念和它的两条基本性质.

例 求证两个邻补角的平分线互相垂直.

已知：$\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 互为邻补角，OE 和 OF 分别是 $\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 的平分线(图 1-3).

求证：$OE \perp OF$.

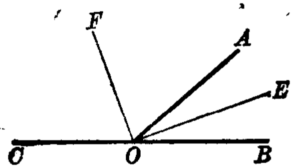


图 1-3

证明 $\because$ $\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 互为邻补角，

$\therefore \quad \angle AOB+\angle AOC=180°$.

又 OE 是 $\angle AOB$ 的平分线，

$$\therefore \quad \angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

同理，

$$\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOC,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \angle EOF&=\angle AOE+\angle AOF\\&=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle AOC)\\&=\frac{1}{2}\times 180°=90°,\end{aligned}$$

即 $OE \perp OF$.

在这个例题中，命题的题设和结论不明确，要让学生把它转化为“如果……，那么……”的形式．即“如果两个角是邻补角，那么它们的角平分线互相垂直”．进一步再把它写成“已知”和“求证”的形式．这是平面几何的基本训练，一开始复习时就必须注意加强.

四 平 行 线

这是本章最重要的内容. 平行线是平面几何中的基本图形, 它的应用比较广泛. 通过复习要让学生掌握平行线的概念、平行公理、判定定理和性质定理, 并能熟练地应用它们进行论证和计算.

通过系统归纳可以得出, 平行线的判定定理有以下五条:

(1) 同位角相等, 则两直线平行.

(2) 内错角相等, 则两直线平行.

(3) 同旁内角互补, 则两直线平行.

(4) 如果两直线都和第三条直线垂直, 则这两直线平行.

(5) 如果两直线都和第三条直线平行, 则这两直线平行.

平行线性质定理有以下六条:

(1) 两直线平行, 则同位角相等.

(2) 两直线平行, 则内错角相等.

(3) 两直线平行, 则同旁内角互补.

(4) 如果一条直线和两平行线中的一条垂直, 则这条直线也和另一条垂直.

(5) 两条平行线间的距离处处相等.

(6) 如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边, 则这两个角相等或互补.

要求学生能熟练地应用这些定理解决以下三类问题:

1. 证明两直线平行

例 1 如图 1-4, 已知: $\angle BED=\angle 1+\angle 2$. 求证: $AB\parallel CD$.

证法一 延长 BE 交 CD 于 F, 则

$$\angle BED=\angle 2+\angle 3.$$

$$\because \quad \angle BED=\angle 1+\angle 2,$$

$$\therefore \quad \angle 1=\angle 3,$$

$$\therefore \quad AB \parallel CD.$$

这是应用内错角相等证明两直线平行，也可以应用同旁内角互补来证明.

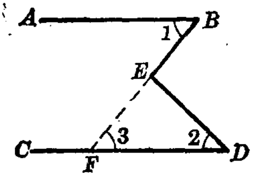


图 1-4

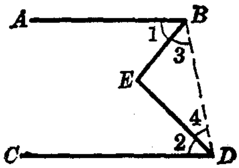


图 1-5

证法二 连结 BD(图 1-5),

则 $$\angle BED+\angle 3+\angle 4=180^\circ.$$

$$\because \quad \angle BED=\angle 1+\angle 2,$$

$$\therefore \quad \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ,$$

即 $$\angle ABD+\angle BDC=180^\circ,$$

$$\therefore \quad AB \parallel CD.$$

也可以应用两直线同时平行于第三条直线，则这两直线平行来证明.

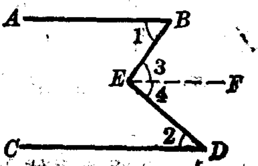


图 1-6

证法三 作 $EF \parallel AB$(图 1-6),

则 $\angle 1=\angle 3$.

$$\because \quad \angle BED=\angle 1+\angle 2,$$

$$\therefore \quad \angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2,$$

$$\therefore \quad \angle 4=\angle 2,$$

$$\therefore \quad EF \parallel CD,$$

则 $AB /\!/ CD$.

这个问题的证法很多，除了上面三种证法以外，还有其他证法．但从上面的证明中我们可以看出，要用平行线判定定理来证明两直线平行，关键是要有第三条直线，通过研究这两条直线和第三条直线的关系（平行、垂直，有关的角相等或互补）来证明两直线平行，这是证明两直线平行的最基本的方法．而这种方法的实质是把证明两直线平行的问题转化为证明两个角相等的问题．

除了用平行线判定定理证明两直线平行以外，还可以用三角形中位线、平行四边形和比例线段等来证明两直线平行，这些方法的实质，是把证明两直线平行的问题转化为证明两条线段相等或线段比例式的问题，我们将在以后各章分别加以说明．

2．应用平行线的性质证明的问题

例 2 如图 1–7，已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$．求证：$\angle A=\angle F$．

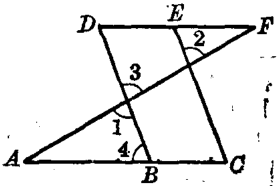


图 1–7

证明 $\because$ $\angle 1=\angle 3$,

$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$,

$\therefore$ $BD /\!/ CE$,

$\therefore$ $\angle 4=\angle C$.

而 $\angle C=\angle D$, $\therefore$ $\angle 4=\angle D$,

$\therefore$ $DF /\!/ AC$, $\therefore$ $\angle A=\angle F$.

例 3 如图 1–8，已知：$DE\perp AC$ 于 E，$BC\perp AC$，$FG\perp AB$ 于 G，$\angle 1=\angle 2$．求证：$CD\perp AB$．

证明 $\because$ $DE\perp AC$, $BC\perp AC$,

$\therefore\quad DE \parallel BC,\quad \therefore\quad \angle 2=\angle 3.$

又 $\quad\because\quad \angle 1=\angle 2,\quad \therefore\quad \angle 1=\angle 3,$

$\therefore\quad GF \parallel CD.$

$\because\quad GF \perp AB,\quad \therefore\quad CD \perp AB.$

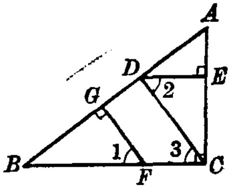


图 1-8

这里把证明两个角相等，两条直线垂直的问题转化为证明两条直线平行的问题，然后应用平行线的性质定理来加以证明．这种转化的思想方法是平面几何证明问题的基本思想方法，在复习时必须反复加强训练．

3．有关平行线的角的计算问题

例4 如图 1-9，已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=73°26'$，求 $\angle 4$ 的度数．

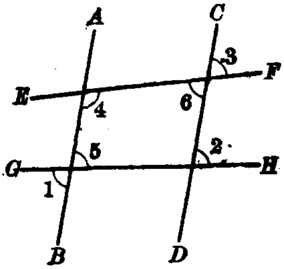


图 1-9

解 $\because\quad \angle 1=\angle 5,$

$\angle 1=\angle 2,$

$\therefore\quad \angle 5=\angle 2,$

$\therefore\quad AB \parallel CD,$

$\therefore\quad \angle 4+\angle 6=180°.$

又 $\quad \angle 3=\angle 6,$

$\therefore\quad \angle 4=180°-\angle 3=180°-73°26'=106°34'.$

习 题 一

1． 是非题：（对的写“✓”，错的写“×”）

(1) 在所有连结两点的线中，直线最短．（　）

(2) 连结两点间的线段，叫做两点间的距离．（　）

(3) 两条射线所组成的图形，叫做角．（　）

(4) 有公共顶点的两个角,叫做对顶角. ( )

(5) 从直线外一点到这条直线的垂直线段的长,叫做点到直线的距离. ( )

(6) 如果两条直线被第三条直线所截,那么同旁内角互补. ( )

(7) 在同一平面内,如果 $a /\!/ b$, $b /\!/ c$, 那么 $a /\!/ c$. ( )

(8) 在同一平面内,如果 $a \perp b$, $b \perp c$, 那么 $a \perp c$. ( )

(9) 在同一平面内,如果两条线段既不平行,又不重合,那么它们必相交. ( )

(10) 如果一个角的两边分别垂直于另一个角的两边,那么这两个角相等. ( )

2. 选择题:

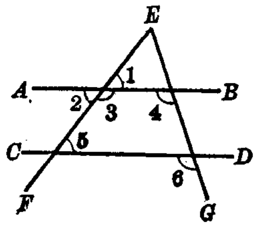
(1) 钝角减去锐角所得的差是

(A) 锐角; (B) 直角; (C) 钝角; (D) 不一定. ( )

(2) 如果两个角互为补角,那么这两个角

(A) 都是锐角; (B) 都是钝角; (C) 一个锐角,一个钝角; (D) 不一定. ( )

(3) 如图,已知: $AB /\!/ CD$, 在 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$ 中,



[第 2(3)题]

(i) 同位角有

(A) 1 对; (B) 2 对; (C) 3 对; (D) 4 对. ( )

(ii) 内错角有

(A) 1 对; (B) 2 对; (C) 3 对; (D) 4 对. ( )

(iii) 同旁内角有

(A) 1 对; (B) 2 对; (C) 3 对; (D) 4 对. ( )

3. 填充题:

(1) 线段 $AB=5\text{cm}$, 延长 AB 到 C, 使 $BC=2AB$, D 为 AB 的中点,则 $DC=$ ____ cm;

(2) 一个角的余角和这个角的补角的比为 2:5, 则这个角为____