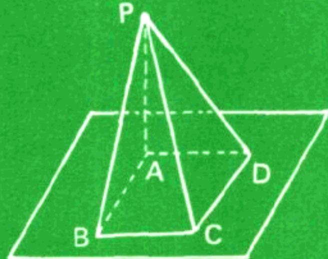
投考國內大學

數學總複習



廖碧華等編

科 進 出 版 社 出 版

投考國內大學
數學總複習　　廖碧華等編

科進出版社出版　　電話3-457842
香港九龍官塘康寧道41號十五樓第五座

嶺南印刷公司印刷　　電話5-497470
香港德輔道西西安里13號地下

1979年4月初版
1980年2月再版

全國高等學校招生考試複習大綱

数　学

要　求

1．牢固掌握基本的概念、定理和公式。正确掌握各有关概念之间的关系和各有关定理之间的关系。对于常用公式，力求在运用中自然记忆，不要死记硬背。在复习中，也要熟悉公式的推导过程。

2．具有熟练的运算能力、逻辑推理和逻辑表达的能力，以及空间想象的能力。

3．能沟通不同部分的知识和方法，并能熟练综合运用它们来解决具体问题的能力（特别要注意代数在三角和几何上的应用，三角在解决几何问题上的作用，几何图象在解决代数和三角问题上的作用。）

本大纲分代数、几何、三角、平面解析几何四个部分。内容的排列不代表复习的次序。

考虑到当前中学数学教学的实际情况，排列组合、极限、极坐标和复数等内容，今年暂不列入大纲。

（一）代　数

一、数的有关概念

1．正数与负数、有理数与无理数、实数、实数的分类。

2．数轴、绝对值。

3. 有理数的四则运算。

二、代数式

1. 单项式与多项式、整式与分式、有理式与根式。

2. 关于代数式乘法的几个基本公式:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$,

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$。

3. 正数的平方根与算术平方根。

4. 关于二次根式的几个公式:

$\sqrt{a^2}=|a|$;

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$;

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}, (a\geqslant 0, b>0)$。

5. 最简根式,同类根式,二次根式的四则运算,分母有理化。

三、因式分解

1. 提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法、配方法。

2. 某些高次整系数多项式在有理数范围或实数范围内的分解,例如:

$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$.

四、方程

1. 方程与方程组,系数与未知数,整式方程的次数、方程(或方程组)的根(或解)。

2. 一元一次方程与一元二次方程、可化为一次或二次方程的高次方程。

3. 一元二次方程的根与系数的关系、根与判别式的关系。

4. 分式方程、根式方程(无理方程)、增根的判别。

5. 二元与三元一次方程组的解法。

6. 简单的二元二次方程组。

五、不等式

1. 不等式和不等式组。

2. 不等式的性质。一元一次不等式、一元一次不等式组、一元二次不等式的解法，$|x|<a$ 与 $|x|>a$ 型的不等式及其解法，解的几何表示。

六、指数与对数

1. 正整数指数幂、零指数幂、分指数幂、负指数幂及其运算。

2. 对数与指数的关系、对数的基本运算法则、换底公式。

3. 常用对数及其在数值运算中的应用、常用对数表的用法。

七、函数和它们的图象

1. 常量与变量、自变量与因变量、函数及其定义域。

2. 一次函数、二次函数、正比例函数、反比例函数、指数函数、对数函数，它们的的图象与性质(定义域、正值与负值、奇偶性、单调性等)。

八、数列

等差数列与等比数列、通项与 n 项和公式。

（二）几　何

一、平面几何的基础知识

1. 线段、射线、直线、相交线，角、角度制、角的分类，两角互补、两角互余，两直线的垂直，对顶角。

2. 平行线的概念、性质与判定定理。

二、三角形

1. 三角形三边的关系，内角和定理、外角同内角的关系。

2. 三角形（包括直角三角形）全等的判定定理，按已知条件作三角形的方法。

3. 线段的垂直平分线与角的平分线的性质，用圆规、直尺作线段的垂直平分线与角的平分线的方法。

4. 三角形的角平分线、中线与高的概念，等腰三角形的性质与判定定理。

5. 平行截割定理。

6. 相似三角形（包括直角三角形）的判定定理、相似三角形对应角的平分线、对应边上的中线、高的比的性质。

7. 勾股定理、直角三角形中的比例中项定理。

三、多边形

1. 凸多边形内角和公式。

2. 平行四边形的概念、性质与判定定理，三角形的中位线定理。

3. 矩形、菱形、正方形的概念、性质与判定定理。

4. 梯形的概念，梯形的中位线定理，等腰梯形的性质与

判定定理。

5. 矩形、正方形、平行四边形、三角形与梯形面积的计算公式。

6. 相似多边形的概念，相似多边形周长的比与面积的比的性质。

四、圆

1. 三点定圆问题，三角形外接圆的作法。

2. 弧度制的概念、它同角度制的关系。

3. 圆心角、半径与弧长的关系。

4. 弧、弦、直径，圆心角、圆周角、弦切角等概念及有关定理。

5. 相交弦定理。

6. 正多边形的概念，用圆规、直尺分圆周为 4、5、6 等分的方法，作正方形、正五边形、正五角星形、正六边形的方法。

7. 切线的性质、判定与切线长定理，过圆上或圆外一点作圆的切线的方法，作三角形内切圆的方法。

8. 两圆的位置关系，两圆相切的性质与判定，两圆公切线的性质。

9. 圆周长与圆面积的计算公式，弧长与扇形面积的计算公式，计算弓形面积的方法。

五、立体几何

1. 空间两条直线的位置关系，不共面(异面)直线间的角。

2. 直线与平面的位置关系，直线与平面的交角，三垂线定理。

3. 平面与平面的位置关系。

4. 棱柱、棱锥、棱台的概念，计算它们的表面积与体积的方法。

5. 直圆柱、直圆锥、直圆台、球的概念，计算它们的表面积与体积的方法。

（三）三　　角

一、三角函数定义及其基本性质

1. 任意角的概念与角的正弦、余弦、正切、余切的定义。

2. 当角由 0 变到 2π 时，三角函数值的变化。

3. 0、$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$、2π 等特殊角的三角函数值。

4. 三角函数的定义域、增减性与周期性。

5. 同一角的各三角函数的关系。

6. 三角函数的图象。

二、三角函数式的变换

1. 余角函数公式。

2. 化任意角的三角函数为锐角的三角函数公式（诱导公式）。

3. 两角和或差的正弦、余弦、正切函数公式。

4. 倍角和半角的正弦、余弦、正切函数公式。

5. 和差化积公式（$\sin\alpha\pm\sin\beta$，$\cos\alpha\pm\cos\beta$），积化和差公式。

三、三角方程

1. 由一角的正弦、余弦、正切函数的值，求该角的通值。

2. 反三角函数及其主值(反正弦、反余弦、反正切)。

3. 简单的三角方程。

四、解三角形

1. 三角函数表的用法、三角函数对数表的用法。

2. 直角三角形的解法。

3. 正弦定理、余弦定理,斜三角形的解法。

(四) 平面解析几何

一、直线

1. 直角坐标系,平面上点与坐标的关系，两点间距离公式,线段的定比分点公式。

2. 曲线与方程之间的对应关系。

3. 直线方程的点斜式、斜截式、两点式及直线方程的一般形式。

4. 两条直线的平行、垂直的条件，两条直线交点坐标的求法,求两条直线交角的公式。

二、二次曲线

1. 圆的方程：$x^2+y^2=r^2$, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

2. 抛物线的定义、标准方程、性质(对称轴、顶点、开口方向、焦点、准线)及图形。

3. 椭圆的定义、标准方程、性质(对称轴、对称中心、顶点、长半轴、短半轴、离心率、焦点、准线)及图形。

4. 双曲线的定义、标准方程、性质(对称轴、对称中心、顶点、实半轴、虚半轴、离心率、焦点、准线、渐近线)及图形。

5. 坐标轴的平移公式,利用它化简方程

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (A、C\text{不同时为零})$$

为圆、椭圆、双曲线、抛物线的标准方程,或一对直线的方程。

三、直线与二次曲线、二次曲线与二次曲线的关系

1. 直线与上述二次曲线的关系(相切、相交、相离),求切点坐标或交点坐标。

2. 了解求两条二次曲线交点坐标的方法,并在某些简单的情况下会求出交点坐标。

四、参数方程

直线 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt;\end{cases}$

圆 $\begin{cases}x=x_0+a\cos\theta\\y=y_0+a\sin\theta;\end{cases}$

椭圆 $\begin{cases}x=x_0+a\cos\theta\\y=y_0+b\sin\theta;\end{cases}$

抛物线 $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt^2.\end{cases}$

(x_0、y_0、a、b 都是常数,t、θ 都是参数。)

会从上述参数方程消去参数,利用参数方程求曲线交点的坐标。例如,利用直线的参数方程求它同二次曲线的交点坐标。

前　　言

爲便於投考國內大學的應屆畢業生，知識青年及港澳青年進行複習，我們編寫了這本《投考國內大學數學總複習》。

這本數學總複習，基本上是按國內現行中學數學課本的內容和要求編寫的。同時還編入了一些略高於課本要求的綜合性的例題和習題。這些內容，可作爲複習時參考。（在書中內容前面加有“*”）

本書內容包括教育部公佈的《全國高校招生考試複習大綱》的全部要求，並列入了今後可能列入大綱要求的反三角函數，排列組合、數學歸納法、參數方程和極坐標作爲參考。

對於本書可能出現的缺點和錯誤，懇請讀者賜教。

廖碧華等

一九七九年四月於九龍

目　录

一 数

基 础 知 识

1. 数的概念

随着生产实践的发展，不断提出新的问题，促使数的概念也逐步扩充．在算术里最初只有自然数（也就是正整数）和零，有了量的分割的概念，便引进了分数，这时就把数的范围扩展到了正有理数和零．有了正负数的概念后，便把数的范围扩展到有理数．引进无理数后，又把数的范围扩展到实数．由于负数开平方运算的研究，从而产生虚数单位i，并把数的范围扩展到复数．即：把形如$a+bi$（a、b都为实数）的数，叫做复数．这里，当$b=0$时，$a+bi$就是实数a；当$a=0$时，$a+bi$就是纯虚数bi．

用数的系统表表示如下：

- 复数 $(a+bi)$（a、b都是实数）
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（有限小数和无限循环小数）
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数（无限不循环小数）
      - 正无理数
      - 负无理数
  - 虚数 $(b\neq 0)$　$a+bi$（当$a=0$时，为纯虚数bi）

2. 数的几何表示法

(1) 数轴和实数在数轴上的表示　数轴是一条规定了方向、原点和长度单位的直线. 任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任何一个点都表示一个实数. 也就是说，实数和数轴上的点有一一对应的关系.

(2) 复数平面和复数在复数平面上的表示　表示复数的坐标平面叫做复数平面. 如图 1 — 1 复数$a+bi$和复数平面上的点 (a,b) 是一一对应的. 很明显，当$b=0$时，复数$a+bi$即为实数a，它与x轴上的点是一一对应的；当$a=0$时，复数$a+bi$即为纯虚数bi，它与y轴上的点是一一对应的.

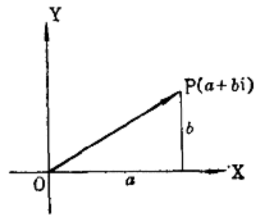


图　1 - 1

复数 $a+bi$ 与平面上以坐标原点为起点，以点 (a,b) 为终点的向量是一一对应的.

3.　数的绝对值

(1) 实数的绝对值　$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$.

几何意义：在数轴上对应于实数a的点到原点的距离.

(2) 复数的绝对值（即复数的模）$r=\sqrt{a^2+b^2}$.

几何意义：对应于复数$a+bi$的向量的长.

4.　共轭复数

(1) 相反的数　对于实数，a和$-a$是互为相反的数.

(2) 共轭复数　对于复数，$a+bi$与$a-bi$是互为共轭的复数.

5.　复数的三角函数表示式

(1) 表示法　$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$．其中 θ 为实轴的正向 OX 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所夹的角，叫做这个复数的幅角，r 为 $a+bi$ 的模．（图 1－2）

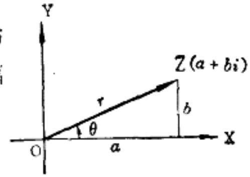


图　1－2

(2) 互化法则

① 复数的代数式化成三角函数式

由 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 求模，

由 $tg\theta=\dfrac{b}{a}$ 以及 θ 角的终边所在的象限来决定幅角的主值．$0\leqslant\theta<2\pi$

实数 a 的模数是 $|a|$，正实数的幅角主值是 0，负实数的幅角主值是 π；纯虚数 bi 的模数是 $|b|$，如 $b>0$，则 bi 的幅角主值是 $\dfrac{\pi}{2}$，如 $b<0$，则 bi 的幅角主值是 $\dfrac{3}{2}\pi$．

② 复数的三角函数式化成代数式

由　$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$ 求出．

6．数的大小比较

(1) 实数可以比较大小　在数轴上两个点表示的两个实数，在右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大．

(2) 复数不能比较大小

虚数和虚数，虚数和实数都不能比较大小．

(3) 复数相等和复数等于零的条件

① $a+bi=c+di \rightleftarrows a=c,\ b=d$；

② $a+bi=0 \rightleftarrows a=0,\ b=0$．

7．数的运算

(1) 有理数的运算　四则运算和乘方.

(2) 实数的运算　在进行实数的四则运算和乘方时，对于无理数，一般按指定的精确度，用和它近似的有理数代替后再进行计算.

实数的开方：

① 方根　如果$x^n=a$，(n是大于1的整数)那么x叫做a的n次方根. 求a的n次方根的运算，叫做把a开n次方.

② 方根的性质

奇次方根的性质　在实数范围内，正数的奇次方根是一个正数，负数的奇次方根是一个负数.

偶次方根的性质　当n是偶数时，正数a的偶次方根有两个，即$\pm\sqrt[n]{a}$；负数的偶次方根没有意义.

零的任何次方根仍是零.

③ 算术根　正数a的正的方根叫做算术根，用$\sqrt[n]{a}$表示　当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根

根据算术平方根的定义，可以得到一个实数的平方的算术平方根：

当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a^2}=a$；

当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=-a$.

总起来可以写成$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$.

(3) 复数的运算

① 复数代数式的运算

加减法：$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$；

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$；

除法：$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

② 复数的三角函数式的运算

乘法： $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)];$$

一般地，有

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

$$=r_1r_2\cdots\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)].$$

乘方：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$；

除法： $\dfrac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)];$$

开方： $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的$n$次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$(k=0,1,\cdots\cdots,n-1).$$

例　　题

1. 化简：

(1) $\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}$，$(-3<x<2)$

(2) $\sqrt{1-2\sin36^\circ\cos36^\circ}$.

解 (1) 当$-3<x<2$时，

$$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}=-(x-2)-(x+3)$$
$$=-2x-1;$$

(2) $\sqrt{1-2\sin36^\circ\cos36^\circ}$