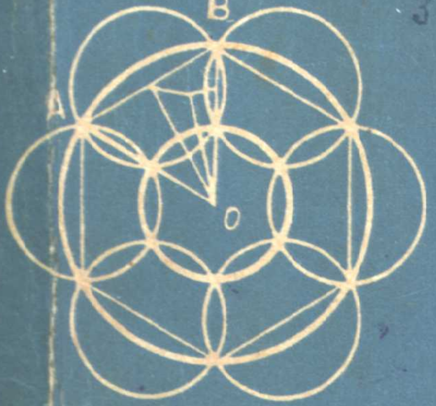
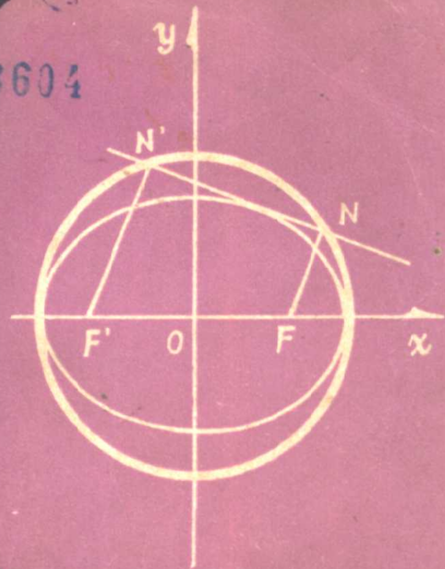
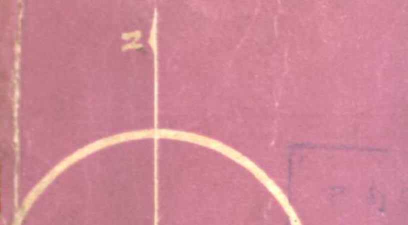
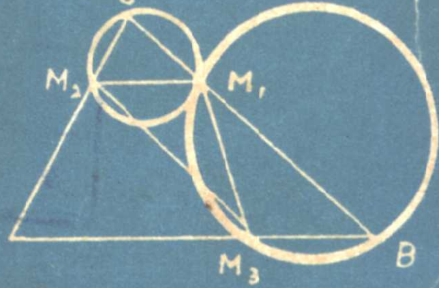




中学数学竞赛习题

ZHONGXUE SHUXUE JINGSAI XITI





中学数学竞赛习题

杭州大学数学系
《中学数学竞赛习题》编写组

上海教育出版社

中学数学竞赛习题

杭州大学数学系
《中学数学竞赛习题》编写组

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　上海中华印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张15.25　字数339,000
1979年6月第1版　1980年1月第2次印刷
印数160,001—210,000本

统一书号：7150·2077　定价：1.10元

前　言

近几十年来，越来越多的国家开始为中学生组织数学竞赛．我们编写这本书的目的，就是为了提供一些国内外数学竞赛习题方面的资料，供中学数学教师和数学爱好者参考．

收集在本书中的800个题目，未作严格的分类，它们中的绝大部分是我国和外国的中学数学竞赛题．对每个题目我们都尽可能提供了解答．但正如题目的来源那样，解答的来源也是多方面的．因此，解答的风格不一致，详略也不相同．不少题目虽有着多种解法，但限于篇幅，我们只提供了其中的一种，选择不一定得当，当然更不一定是最好的解答．我们觉得，本书选入的题目有些是有着比较深刻的理论和实践背景的，只有阐明了它的背景，并对解法作了全面的分析和融会贯通的理解之后，才能提高分析和解题的能力．另一方面，这些题目来自不同的国家和不同的年代，其命题的意图自然不尽相同，需要我们有原则地借鉴．但以上工作不是这样一本资料书所能承担的，而有待广大读者在使用本书时继续进行．

数学竞赛只是提高数学教学质量的一个手段．成功地解答数学竞赛题也只能是长期注意基础知识和基本技能训练的一个结果．不注重基础，把主要精力放在做数学竞赛题上，实践证明，这样做的效果是不好的．

本书由张明樑、王云海、娄志渊、陆传荣、王兴华、叶国权等同志集体编写．骆如枫、邬耀宗两同志也参加了一些工作，并得到我系其他老师的支持和帮助，在此谨致以诚挚的谢忱．

目　　录

题　　目

第 一 部 分

1. 计算：$3\cdot5\cdot17\cdot\cdots\cdot(2^{2^{n-1}}+1)$.

2. 计算：$\dfrac{(9+4\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}+(9-4\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}}{(11+2\sqrt{30})^{\frac{3}{2}}-(11-2\sqrt{30})^{\frac{3}{2}}}$.

3. 设

$$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\ c^2+d^2=1,\\ ac+bd=0.\end{cases}$$

计算：$ab+cd$.

4. 已知 $y=c\sqrt{ax-b}+d\sqrt{b-ax}+ab$，$(a、b、c、d>0)$，求 $\log_b yx$ 的值.

5. 设有 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的值只能是 0，1，2 三个数中的一个，如果记

$$f_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$
$$f_2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,$$

试用 f_1 和 f_2 表示

$$f_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k.$$

6. 作 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 五个数中每两个的和，共得十个数，记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$. 试证：如果知道了十个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$（不知道它们中每一个是哪两个 x_i 的和），可以求

出原数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

7. 证明: $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}$.

8. 设 a, b, c 为不相等的实数, 证明: 若

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b+c & a^4 \\ b & c+a & b^4 \\ c & a+b & c^4 \end{vmatrix}=0,$$

则

$$a+b+c=0.$$

9. 证明: 若 $ad-bc=1$, 则

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1.$$

10. 设 $ax^3=by^3=cz^3$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$, 则

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

11. 证明: 对任何自然数 n, $(\sqrt{2}-1)^n$ 可以写成下列形式: $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$, 其中 m 是自然数.

12. 试证: 若实数 x、y、z, 有 $x+y+z=xyz$, 则

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\,\frac{2y}{1-y^2}\,\frac{2z}{1-z^2}.$$

13. 设 $f(x)=\left[\dfrac{x}{12\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\dfrac{-12\frac{1}{2}}{x}\right]$①, 如果 $0<x<90$, 求 $f(x)$ 的值域.

14. 若自然数 n 能使 $[\sqrt{n}]$ 整除 n, 求所有有这样性质的 n 的表达形式.

15. 解方程: $x^3-[x]=3$.

---

① 符号 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 例如 $[2.5]=2$, $[2]=2$, $[-3]=-3$, $[-3.4]=-4$.

16. 解方程：$ax+b[x]-c=0$，$(a>0,\ b>0)$.

17. 解方程：$4x+3y-2x\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right]=0$.

18. 试证：若 n 是任一自然数，则 $(5+\sqrt{26})^n$ 的小数部分的开始 n 位数码都是一样的.

19. 设 m 为自然数，则 $[(1+\sqrt{3})^{2m+1}]=2^{m+1}A$，其中 A 是一个奇自然数，[ ] 是整数部分.

20. 证明：

(1) 对任何整数 n，则 $[n+x]=n+[x]$；

(2) 对任何正整数 k，则 $\left[\frac{ka}{b}\right]\geqslant k\left[\frac{a}{b}\right]$；

(3) b 是整数，则 $\left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{[a]}{b}\right]$，$(b>0)$.

21. 证明：

(1) $[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]+[x]+[y]$，这里 $x,\ y\geqslant 0$；

(2) 对所有正整数 m 和 n，

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$ 是一个整数.

22. 设 n 是一个给定的正整数，又记 $b(n)$ 为 $k+\frac{n}{k}$ 当 k 跑遍正整数时所取的最小值. 试证：$b(n)$ 和 $\sqrt{4n+1}$ 有相同的整数部分.

23. 一个正整数序列，如果从第三项起每一项等于前二项的差的绝对值，而且每一项都不大于 1979，问，这样的数列最多可含多少项？

24. 设 n 和 k 都是正整数，$r=k+\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}$，试证明：$r^n$ 的整数部分 $[r^n]$ 能被 k 整除.

25. 比较 $\sqrt[8]{8!}$ 和 $\sqrt[9]{9!}$ 哪个大？

26. 解不等式：$\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$.

27. 怎样的整数 a、b、c 可以满足不等式：

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c?$$

28. 试选取适当的整数 a、b、c、d、e、f，使对任意 $R\geqslant 0$，成立不等式：

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|\leqslant|R-\sqrt[3]{2}|.$$

29. 证明：当 n 是自然数时，$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdots\cdots\sqrt[2^n]{2^n}<4$.

30. 证明不等式：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

31. 试证：对于任何正整数 n，成立着

$$\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}_{\text{共 } n \text{ 个根号}}\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

32. 证明：对任意自然数 $n(\geqslant 3)$，成立不等式

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!.$$

33. 设实系数二次式 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$ 之中至少有一个不小于 $\dfrac{1}{2}$.

34. 证明：如果 m，n 是两个自然数，则 $\sqrt[n]{m}$ 和 $\sqrt[m]{n}$ 中较小的一个数不超过 $\sqrt[3]{3}$.

35. 试证：若 a、b、c；p、q、r 都是实数，并且对一切实数 x，都成立：

$$ax^2+2bx+c\geqslant 0,$$

$$px^2+2qx+r\geqslant 0,$$

则对一切实数 x，也成立：

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0.$$

36. 设 x, y, z 都是实数，且满足

$$x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2},\ (a>0).$$

试证：$0\leqslant x, y, z\leqslant \frac{2}{3}a$.

37. 试证：由 $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$ 所组成的三个乘积 $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$.

38. 设 a 和 b 都是正数：

(1) 证明 $\sqrt{2}$ 必在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间；

(2) 试问这二数中哪一个更接近于 $\sqrt{2}$？

39. 设 α, β 为任意数，c 为正数，则

$$|\alpha+\beta|^2\leqslant(1+c)|\alpha|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|\beta|^2.$$

40. 设实数 a_1、b_1、c_1, a_2、b_2、c_2 满足不等式

$$a_1a_2>0,\ a_1c_1\geqslant b_1^2,\ a_2c_2\geqslant b_2^2,$$

试证明：$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant(b_1+b_2)^2$.

41. 证明：若 a、b、c 和 A、B、C 都是实数，且满足：

$$aC\pm 2bB+cA=0, \tag{1}$$

$$ac-b^2>0, \tag{2}$$

则

$$AC-B^2\leqslant 0.$$

42. 设 a_1 和 a_2 是满足 $a_1\geqslant 0$, $a_2\geqslant 0$, $a_1+a_2=1$ 的任意实数，证明：可以找到两个数 b_1 和 b_2，使 $b_1\geqslant 0$, $b_2\geqslant 0$, $b_1+b_2=1$，且

$$\left(\frac{5}{4}-a_1\right)b_1+3\left(\frac{5}{4}-a_2\right)b_2>1.$$

43. 设 a、b 为正数，证明：

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}\leqslant\frac{\sqrt{a}}{b^5\cdot\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{a^5\cdot\sqrt{a}}.$$

44. 设实数 a、b、c 满足: $a>0$, $b>0$, $2c>a+b$, 则 $c^2>ab$, 且 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

45. 若 $|a|<1$, $|b|<1$, 证明:

$$\left|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right|\leqslant1.$$

46. 实数数列 $\{R_n\}$ 中设 $R_1=1$, $R_{n+1}=1+\frac{n}{R_n}$,

求证: $\sqrt{n}\leqslant R_n\leqslant\sqrt{n}+1$.

47. 设 $a>1$, n 为自然数, 试证明:

$$n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)>a^{\frac{1}{n+1}}-1.$$

48. 设 $a>b>0$, n 为自然数, 试证明:

$$a^n-b^n\geqslant n(a-b)(ab)^{\frac{n-1}{2}}.$$

并问等号什么时候成立?

49. 设 n 为整数, $0\leqslant x\leqslant1$, 试证:

(1) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$;

(2) $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+2}\leqslant\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}$.

50. 设 a、b、c 都是正数, 试证:

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

51. 设 a、b、c 为正数, 记 $x=(b+c-a)$, $y=(c+a-b)$, $z=(a+b-c)$.

试证: $(xy+yz+zx)abc\geqslant xyz(ab+bc+ca)$.

52. 设 x、y、z 为正整数, 证明:

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}\geqslant x^xy^yz^z\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}.$$

53. 给定 100 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$，且满足:

$$a_1-3a_2+2a_3\geqslant 0,$$
$$a_2-3a_3+2a_4\geqslant 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_{99}-3a_{100}+2a_1\geqslant 0,$$
$$a_{100}-3a_1+2a_2\geqslant 0.$$

证明: 这 100 个数全相等.

54. 设有 101 个正整数 $a_0, a_1, \cdots, a_{100}$，且 $a_1>a_0$，$a_2=3a_1-2a_0$，$a_3=3a_2-2a_1$，$\cdots$，$a_{100}=3a_{99}-2a_{98}$，

证明: $a_{100}>2^{99}$.

55. 已知数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中所有的项都是正数，又设对于 $n=1, 2, 3, \cdots$ 都有 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$.

证明: 对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，有 $a_n<\frac{1}{n}$.

56. 设实数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 满足

$$a_0=a_n=0,$$
$$a_0-2a_1+a_2\geqslant 0,$$
$$a_1-2a_2+a_3\geqslant 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2}-2a_{n-1}+a_n\geqslant 0.$$

证明: 全部 $a_k\leqslant 0\quad (k=1, 2, \cdots, n-1)$.

57. 证明: 对一切整数 $k\geqslant 1$ 及实数 x，成立不等式:

$$1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^j\frac{x^j}{j!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}>0.$$

58. 证明: n 为自然数，则

(1) $n(n+1)^{\frac{1}{n}}<n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad (n>1)$;

(2) $(n-1)n^{\frac{-1}{n-1}}<n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$, $(n>2)$.

59. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正数，并且是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列，证明：

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

60. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$，为互不相同的自然数，则对任一自然数 n，下面不等式成立：

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

61. 设 $s=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}a_i$, $s>a_i$, $a_i>0$, $n>m$, $n\geqslant 2$.

证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{mn}{n-m}$.

√ **62**. 设 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 都是自然数或 0，且

$$(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_r)>2^t,$$

则
$$b_1+b_2+\cdots+b_r>t.$$

63. 求数列 1, 22, 333, 4444, … 的前 n 项之和.

64. 设

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d},$$

其中 a, b, c, d 为任意的正数．证明：$1<S<2$.

65. 求和：

$$S=m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}.$$

66. 数列的通项 $a_n=\frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$，求该数列前 n 项和.

67. 把自然数 $1, 2, 3, \cdots, k^2$ 排成下列形式的表：

1	2	3	$\cdots$	k
$k+1$	$k+2$	$k+3$	$\cdots$	$2k$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(k-1)k+1$	$(k-1)k+2$	$(k-1)k+3$	$\cdots$	k^2.

现在，从表中任意取出一个数，然后，把这个数所在的行和列全都涂去，剩下一个有 $(k-1)^2$ 个数的表；这样继续 k 次，如果取出的数和涂去的数共 k^2 个. 试求所取出的 k 个数之和.

68. 设 $x_2=1$, $x_3=2$, $x_n=(n-1)(x_{n-1}+x_{n-2})$, $(n\geqslant 4)$. 试写出通项公式.

69. 考察下面表格：

$$
\begin{aligned}
&1 &&=1,\\
&2+3+4 &&=1+8,\\
&5+6+7+8+9 &&=8+27,\\
&10+11+12+13+14+15+16 &&=27+64,\cdots.
\end{aligned}
$$

试确定并用适当的数学符号表示出构成表格的一般规则，再证明这些规则是成立的.

70. 设有数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}.\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

容易看出，$a_n<2$. 如果记 $a_n=2\sin\theta_n$, 且规定 $0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$, (因为 $a_n>0$). 求 a_n 的通项公式.

71. 设在一个由实数组成的有限数列中，任意 7 个相继项的和都是负数，而任意 11 个相继项的和都是正数. 试问，这样的数列最多能包含多少项？

72. 试求一个正数，使它的小数部分、整数部分和它自己构成一个等比数列.

73. 设

$$c_1=a_1+a_2+\cdots+a_s,$$
$$c_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_s^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_s^n.$$

其中 a_1, a_2, $\cdots$, a_s 是不全为 0 的实数. 如果数列 c_1, c_2, $\cdots$ 中有无限多项等于 0, 试求使 $c_n=0$ 的全部 n.

74. 设 n 是一个给定的正整数, 令 $x_0=\dfrac{1}{n}$, $x_j=\dfrac{1}{n-j}\sum\limits_{i=0}^{j-1}x_i$, 其中 $j=1, 2, \cdots, n-1$. 证明:

(1) $\sum\limits_{j=0}^{k}x_j=\dfrac{1}{n-k}$, $(k\leqslant n-1)$;

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n-1}x_j=1$.

75. 给定一个等比数列, 它的公比 $q(\neq 0)$是一个不等于 -1 的整数, 试证, 在这个数列中任意取 $m(\geqslant 2)$ 项(不一定是连续的)之和不在这个数列中.

76. 设数列 a_1, a_2, $\cdots$ 中每项都是自然数, 且 $a_1=1$, 对一切自然数 $k>1$ 都有 $a_k\leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$, 试证所有的自然数都可以表成这数列的某些项之和.

77. 在斐波那契数列:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots$$

中, $u_1=u_2=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, $(n\geqslant 3)$. 求证: 这个数列中的第 $4k$ 项 (k 是自然数)都是 3 的倍数.

78. 数列 $\{u_n\}$ 定义如下:

$$u_0=2,\ u_1=\frac{5}{2},\ u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1,\ (n\geqslant 1).$$

试证: 当 $n\geqslant 1$ 时, $[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$.

79. 试证: 任意一个自然数都能唯一地写成形式:

$$a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+a_3\cdot 3!+\cdots+a_n\cdot n!,$$
$$(a_i \text{ 为整数, 且 } 0\leqslant a_i\leqslant i).$$

80. 设

$$A=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n},$$

其中 n 为正整数. 试证数列 A, $2A$, $4A$, $\cdots$, 2^kA, $\cdots$ 从某一项开始后都是整数.

81. 试证: 不存在具有下列性质的自然数的无限数列: 数列中的各项不全相等, 而从第二项起, 这数列的每一项都是前一项和后一项的调和中项 (数 $\frac{2ab}{a+b}$ 称为 a 和 b 的调和中项).

82. 设数列

$$a_1=1,\ a_2=-1,\ a_n=-a_{n-1}-2a_{n-2},\ (n\geqslant 3).$$

试证: $2^{n+1}-7a_{n-1}^2$ 是一个完全平方数.

83. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个整数列, 定义如下:

$$x_0=1,\ x_1=1,\ x_{n+1}=x_n+2x_{n-1},\ (n=1,\ 2,\ \cdots);$$
$$y_0=1,\ y_1=7,\ y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1},\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是, 这两个数列的前几项分别为

x: 1, 1, 3, 5, 11, 21, $\cdots$;

y: 1, 7, 17, 55, 161, 487, $\cdots$.

证明: 除"1"外, 这两个数列中没有相同的数.

84. 任给一组整数列 a_1, a_2, $\cdots$, $a_n(n>2)$, 它们不全相等, 也不是形如 a, b, a, b, $\cdots$ 的数列, 如果从它们组成新数列

$$\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{a_2+a_3}{2},\ \cdots,\ \frac{a_{n-1}+a_n}{2},\ \frac{a_n+a_1}{2}.$$

然后从新数列用同样方法继续再组成另一个新数列, 试

证明：这样经过若干次之后，一定得到一组数列，其中不是所有的项都是整数.

85. 求 $(1+x)^{2n}+x(1+x)^{2n-1}+\cdots+x^n(1+x)^n$ 展开式里的 x^n 的系数.

86. 证明：在二项式展开中，不存在四个相继的系数 $C_n^r, C_n^{r+1}, C_n^{r+2}, C_n^{r+3}$（$n$, r 为正整数，$r+3\leqslant n$）组成等差数列.

87. 求 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, C_{2n}^5, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 的最大公约数.

88. 试证：对于任何自然数 n，和数

$$2^0\cdot C_{2n+1}^1+2^3\cdot C_{2n+1}^3+\cdots+2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除.

89. 求和：$C_n^1\cdot 1^2+C_n^2\cdot 2^2+\cdots+C_n^n\cdot n^2$.

90. 用一元人民币兑换一分，二分，五分的硬币，共有几种不同的换法？

91. 设有两种图片，每种的张数很多，可以任意取. 现在有次序地从其中取 n 张，组成图片列，要求在这列中每种图片至少含一张，共有多少种取法？

92. 在 $3n$ 个物件中，有 n 个是相同的，其余的都和它们不同，而且相互间也不相同，求每次取 n 个的组合数.

93. 证明：若两个自然数 n 和 k 互素，则 C_n^k 可以被 n 整除.

94. 求证：

(1) $1+C_n^3+C_n^6+\cdots=\dfrac{1}{3}\left(2^n+2\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)$;

(2) $1+C_n^4+C_n^8+\cdots=\dfrac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

95. 证明：如果 $t_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$,

$$S_n=1+\frac{1+q}{2}+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1+q}{2}\right)^n,$$

则 $$C_{n+1}^1+C_{n+1}^2t_1+C_{n+1}^3t_2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}t_n=2^nS_n.$$