当代
杰出青年
科学文库

计算电磁学要论

盛新庆 著

科学出版社
www.sciencep.com

当代杰出青年科学文库

计算电磁学要论

盛新庆 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以剖析典型电磁问题求解过程的方式，对计算电磁学四十余年来发展的重要成果进行了简明扼要的总结和论述。全书共五章。首章阐述电磁规律的各种数学表述，为后续各章的基础；第二、三、四章分别讲述矩量法、有限元法、时域有限差分法，为计算电磁学的核心内容；第五章讲述混合法，为前述各章内容的灵活运用。

本书可供从事电磁场理论和数值计算的研究生、教师、科技工作者阅读参考，也可供从事电磁场应用如天线、微波电路、微波遥感等领域的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算电磁学要论/盛新庆著. —北京：科学出版社，2004
(当代杰出青年科学文库)
ISBN 7-03-012751-X

Ⅰ. 计… Ⅱ. 盛… Ⅲ. 电磁计算 Ⅳ. TM15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 001425 号

策划编辑：李 锋 胡 凯/文案编辑：邱 璐 贾瑞娜/责任校对：朱光光
责任印制：钱玉芬/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004 年 2 月第一次印刷 印张：10 1/4
印数：1—2 500 字数：194 000

定价：32.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

序

盛新庆博士乃中国科技大学徐善驾教授之高足。在科大获得博士学位以后，即赴美国伊利诺依大学任博士后，任职于国际著名的计算电磁学研究中心，在权威教授 J.M.Jin, Weng Chew 的指导下深入研究电磁理论及计算方法，随后往香港城市大学与容启宁教授共同研究电磁计算方法。他因此能深入计算电磁学各家的奥秘，并叠积各派之长，在计算电磁学的领域内，是一个难得的专才。本书是盛博士集三家学派的精华所完成的著作。其优点不仅在其内容广泛，能深入浅出，更可贵的是因为作者曾是数位重量级教授研究小组的研究成员，所以对计算电磁学有其特殊的悟性，上至基本原则，下至编程序的细节他都能了如指掌。毕竟一本工程的著作有别于数学类的著作，书中的方程及函数只求合理推导而不讲究数学分析。重要的是这些方程和函数必须经过计算实验以确定其可应用性。因为本书的作者是一个实干出身的学者，读者可放心地应用本书中的每一个方程或函数，因为它是作者亲身试用过的产物。本书诚可作为初入此行者的指引，并可使他们少走冤枉路。本人因此祝贺此书的出版。

梅冠香

2003 年 11 月于香港

前　言

计算电磁学自20世纪60年代兴起，至今40余年。虽文献浩瀚，所述问题各异，然体例相仿：先述麦克斯韦方程的离散化，再述程序实现的数值结果。盖此二端实为计算电磁学之精要。不离散化，计算机无法运行；无程序实现的数值结果，无法令人信服。就离散化这一端而言，虽计算电磁学文献繁杂，然离散方法大致不出三种：矩量法，有限元法，时域有限差分法。这三种方法离散机制不同，数值性能也绝异。简而言之，离散积分方程形式者为矩量法，离散泛函变分形式者为有限元法，直接离散时域麦克斯韦方程者为时域有限差分法。对这三种方法，已有不少专著进行了总结，然大多是对某一方法进行叙述，通而论之者少。即便有之，或由于出版年份过早未能对近年成果进行总结，或由于体例之故未能简而要。就程序实现这一端而言，现有论著往往只是给出最终的数值结果，对如何将离散化数学表达式转化成计算机程序，程序运行的数值性能如何，论之者少之又少，此实乃计算电磁学之缺憾。因为将离散化数学表达式转化成正确运行的计算机程序并非像想像中的那么容易，实际上计算电磁学每一项工作的大部分时间都在这一步上。而且方法、技巧颇多，编写的程序效率精度往往因人而异。虽然这一步工作通则少、经验多，很难提炼，然细思之，通过典型案例的分析，还是能达到举一反三的目的。论著中数值性能论述的普遍缺少，更是使读者往往对方法的认识止于皮相。兹就作者在计算电磁学多年研究体会并参考已有文献，以典型案例细致完整剖析的方式，对计算电磁学中的三种方法并而述之，成此一书。以期初学者阅后，能尽快上手工作，又能对此学科有一全貌的了解。

本书以电磁领域典型实际问题为中心，从解决问题中引出方法；在解决问题中详述方法原理、增效技术、运用技巧、程序实现；从求解结果中论述方法的计算性能。至于方法在其他问题中的推广应用、严格的数学证明，本书只指出其参考文献，不作仔细论述。

本书以讲清计算电磁学中典型方法、技巧为要，所引文献并非最早、也不全面，望谅解。

盛新庆

2003年11月于北京

目　录

第一章　电磁规律的数学表述

电磁规律有多种数学表述形式，虽原则上等价，然数值性能绝异。本章着重阐述电磁规律的三种数学表述形式：矢量偏微分方程组，矢量波动方程，矢量积分方程，它们分别是时域有限差分法、有限元法、矩量法的基础。

1.1　电磁场的确定性矢量偏微分方程组

一个电磁问题的确定性矢量偏微分方程组应由三部分组成：麦克斯韦方程组，介质本构关系，求解域边界条件。下面依次叙述。

1.1.1　麦克斯韦方程组

麦克斯韦在安培、法拉第等人的基础上，通过引入位移电流，建立了如下完整表述电磁规律的方程组

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(法拉第定律)} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(麦克斯韦 - 安培定律)} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{(电位移高斯定律)} \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(磁感应高斯定律)} \tag{1.4}$$

一般说来，方程左边中的量为描述电磁场的物理量，其中 $\boldsymbol{E}$ 为电场强度 ($\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$)，$\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量 ($\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$)，$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度 ($\mathrm{A{\cdot}m^{-1}}$)，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度 ($\mathrm{Wb{\cdot}m^{-2}}$)；而右边为激励电磁场的源项，其中 $\boldsymbol{J}$ 为电流强度 ($\mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$)，ρ 为电荷密度 ($\mathrm{C{\cdot}m^{-3}}$)。由电荷守恒可写出电流连续性方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1.5}$$

将方程 (1.1) 两边同取散度便可得方程 (1.4)；将方程 (1.2) 两边同取散度并结合方程 (1.5) 便可得方程 (1.3)，因此不难看出上述五个方程只有三个是独立的。这三个独立方程也并非在解决具体问题上都有用，而且对于不同问题的求解，方程的选择也有所不同。譬如，对于静电问题我们往往只用 (1.1) 、 (1.3) 两个方程，因为此问题中磁场不存在，其他方程实际上是毫无意义的；对于静磁问题我们往往只用

(1.2) 、 (1.4) 两个方程，因为此问题中电场不存在，其他方程也就毫无意义；对于时变电流、时变等效电流或时变等效磁流产生的电磁波问题，我们往往用 (1.1) 、 (1.2) 两个方程，因为其他方程并不能给我们求解 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{H}$ 、 $\boldsymbol{D}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 提供帮助。很明显，这些方程并不足以确定未知物理量。以电磁波问题为例，矢量方程 (1.1) 、 (1.2) 只能给出 6 个标量方程，远不足以确定 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{H}$ 、 $\boldsymbol{D}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 所含的 12 个未知标量。因此要确定未知量，我们还必须提供其他关系，这便是下节要讲述的介质本构关系：即 $\boldsymbol{D}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{H}$ 的关系， $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系。

1.1.2 介质本构关系

介质本构关系通常是由试验确定或根据介质的微观结构推导而得。一般来说，对于很多介质，它们的本构关系都可写成

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.8}$$

这里 ϵ 、 μ 和 σ 分别称为介电常数 $(\mathrm{F{\cdot}m^{-1}})$, 磁导率 $(\mathrm{H{\cdot}m^{-1}})$ 和电导率 $(\mathrm{S{\cdot}m^{-1}})$ 。如果介质中这些本构参数随空间位置而变，则此类介质称为非均匀介质，反之，则为均匀介质；如果介质中这些本构参数是频率的函数，则此类介质称色散介质，如等离子体、水、生物肌体组织和雷达吸波材料，反之，则为非色散介质；如果介质中这些本构参数是张量形式，则此类介质称为各向异性介质，如等离子体的介电常数，铁氧体中的磁导率等都是张量。当然也有些介质的本构关系更复杂，不能写成方程 (1.6)~(1.8) 的形式，如手征介质，这种介质中的电位移矢量不仅与电场强度有关，而且还与磁场强度有关；磁感应强度不仅与磁场强度有关，也与电场强度有关。限于本书所限范围，在此就不详述了。有了上述介质的本构关系，如果本构参数不随时间变化，确定电磁波的方程 (1.1) 和 (1.2) 便可简化为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1.9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \tag{1.10}$$

1.1.3 求解域的边界条件

有了描述电磁规律的麦克斯韦方程组以及反映介质特征的本构关系，还不足以确定电磁场。要确定电磁场，还须给出求解域的边界条件。边界条件多种多样，因问题而异。下面例举几种常见的边界条件。在电磁领域中，很多闭域问题的求解域边界都是金属，如腔本征值问题，金属体的散射问题等。如果视金属为理想电导体，那么此类问题的边界条件就可写成

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.11}$$

或

$$\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.12}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是边界的单位法向矢量。数学上常称式 (1.11) 为第一类边界条件，其特征为未知量在边界为已知固定值；式 (1.12) 为第二类边界条件，其特征为未知量的导数在边界为已知固定值。在某些问题中，可将边界等效地视为理想磁导体，此时便有

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.13}$$

或

$$\boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.14}$$

与闭域问题不同，开域问题 (如辐射和散射问题) 的边界条件通常不能写成第一或第二类边界条件，而是第三类边界条件。这类边界的特征为未知量和未知量的导数在边界有确定的关系。如自由空间的辐射和散射问题，其无限远处的边界条件为

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla \times \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix} + \mathrm{j}k_0\hat{\boldsymbol{r}} \times \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix}\right] = 0 \tag{1.15}$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。这也就是我们通常所说的索末菲辐射条件。实际上，电磁学中还有很多根据问题的物理特征，以简化问题为目的，推导出的各种各样的第三类边界条件。如将海洋、地表等有耗介质视为阻抗边界；根据散射场特征导出的局域吸收边界条件；根据波导传输模式导出的吸收边界条件。限于本书所定范围，在此就不详述了。如有兴趣者，可在文献 [1] 中了解阻抗边界条件，在文献 [2] 的 11.7~11.9 节中了解局域吸收边界条件，在文献 [3] 中了解由波导模式导出的吸收边界条件。

1.1.4 频域中的麦克斯韦方程

前面三小节讲述了确定任意时变电磁场的麦克斯韦方程组、本构关系以及边界条件。实际上，在很多时候我们只关心单一频率电磁场即正弦电磁场的特征；或者为了简化问题，我们先只研究正弦电磁场的特征，然后通过傅里叶逆变换得到任意时变电磁场的特征。对于正弦电磁场，其场便可表示成一个与时间无关的复矢量和一个约定时因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 相乘，这里 ω 是角频率。这样方程 (1.9) 、 (1.10) 便可简化为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{1.16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\epsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \tag{1.17}$$

上式中已略去了约定时因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 。为了使上述方程有更明确的物理意义，我们引入包括位移电流和位移磁流的广义电磁流概念。在这种概念下，感应电磁流便可写成

$$\boldsymbol{J} = (\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon)\boldsymbol{E} = y\boldsymbol{E} \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H} = z\boldsymbol{H} \tag{1.19}$$

这里参数 y 与单位长度导纳有相同量纲，称其为导纳率；参数 z 与单位长度阻抗有相同量纲，称其为阻抗率。这样上述方程便可统一地理解成：电场是由变化磁流产生，磁场是由变化电流产生。更具体些，将感应电磁流与外加电磁流 (即源) 分开，上述方程便可写成

$$-\nabla \times \boldsymbol{E} = z\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{i}} \tag{1.20}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = y\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}^{\mathrm{i}} \tag{1.21}$$

这里 z 和 y 代表了介质的特征，而 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{i}}$ 分别表示外加电流和磁流。方程 (1.20) 和 (1.21) 是我们常用的描述正弦电磁场的方程，常常也被称做频域中的麦克斯韦方程。

1.1.5 惟一性定理

我们已经说明，在给出介质的本构关系以及求解域的边界条件后，就可以求解麦克斯韦方程，确定出电磁场的分布和变化。在这一小节，我们将进一步说明在何种边界条件下，电磁场是惟一的。下面以频域中的电磁场为例来说明。至于时域中的电磁场的惟一性条件可仿照进行获得，也可参阅文献 [4] 。

假设被曲面 S 包围的区域里有一组激励源 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 。这组源激励的场一定满足方程 (1.20) 和 (1.21) 。假设此问题有两组解 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{a}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{a}}$ 和 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{b}}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{b}}$ 。它们的差记为

$$\delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{a}} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{b}} \tag{1.22}$$

$$\delta \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{a}} - \boldsymbol{H}^{\mathrm{b}} \tag{1.23}$$

将解 'a' 满足的方程减去解 'b' 满足的方程便得

$$\nabla \times \delta \boldsymbol{E} = -z \delta \boldsymbol{H} \tag{1.24}$$

$$\nabla \times \delta \boldsymbol{H} = y \delta \boldsymbol{E} \tag{1.25}$$

将式 (1.24) 乘上 $\delta \boldsymbol{H}^*$ ，再将式 (1.25) 先取共轭后乘上 $\delta \boldsymbol{E}$ ，最后将所得方程式相减得

$$\delta \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \delta \boldsymbol{H}^* - \delta \boldsymbol{H}^* \cdot \nabla \times \delta \boldsymbol{E} = z|\delta \boldsymbol{H}|^2 + y^*|\delta \boldsymbol{E}|^2 \tag{1.26}$$

由矢量恒等式可知上式左边为 $-\nabla \cdot (\delta \boldsymbol{E} \times \delta \boldsymbol{H}^*)$ ，这样便有

$$\nabla \cdot (\delta \boldsymbol{E} \times \delta \boldsymbol{H}^*) + z|\delta \boldsymbol{H}|^2 + y^*|\delta \boldsymbol{E}|^2 = 0 \tag{1.27}$$

对上式在 S 所围区域作积分，并利用高斯散度定律，可得

$$\oint (\delta \boldsymbol{E} \times \delta \boldsymbol{H}^*) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int (z|\delta \boldsymbol{H}|^2 + y^*|\delta \boldsymbol{E}|^2) \mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.28}$$

如果式 (1.28) 中的面积分项为零，那么体积分项也一定为零。于是便有

$$\int [\mathrm{Re}(z)|\delta \boldsymbol{H}|^2 + \mathrm{Re}(y^*)|\delta \boldsymbol{E}|^2] \mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.29}$$

$$\int [\mathrm{Im}(z)|\delta \boldsymbol{H}|^2 - \mathrm{Im}(y^*)|\delta \boldsymbol{E}|^2] \mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.30}$$

对于有耗介质， $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Re}(y)$ 是正数。因此如果介质中处处有耗，不论多么小，方程 (1.29) 只有在处处 $\delta\boldsymbol{E}=\delta\boldsymbol{H}=0$ 时成立。对于无耗介质，我们可以看出只要域中所储电能和所储磁能相等，方程 (1.30) 便能成立。这意味着在谐振情形，电磁场不惟一。这种不惟一给数值计算中带来了一定的困难，如矩量法中的内谐振问题。它的具体情形，解决办法，将在第二章中讲述。

根据上面论述，我们可得下面惟一性定律：对于有耗介质，如果区域边界的切向电场确定，或切向磁场确定，或部分切向电场确定，其他部分切向磁场确定，那么此区域中的电磁场是惟一确定的。对于无耗介质，存在无数谐振解。

1.2 电磁场的矢量波动方程

前述电磁规律的描述方程，不论是时域中的方程 (1.9)、(1.10)，还是频域中的方程 (1.20)、(1.21)，都是由两个方程组成的方程组形式，同时含有两个未知矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。这一节将设法消除一个未知矢量，将两个方程组成的方程组转化成一个方程。这里还是以频域中的 (1.20)、(1.21) 为例来讲述。为了消除方程 (1.20) 中的未知矢量 $\boldsymbol{H}$，可先将方程两边同除以 z，再同取旋度，然后利用式 (1.21) 便得

$$\nabla\times\left(\frac{1}{z}\nabla\times\boldsymbol{E}\right)+y\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}-\nabla\times\left(\frac{1}{z}\boldsymbol{M}^{\mathrm{i}}\right) \tag{1.31}$$

同样，将方程 (1.21) 两边同除以 y，再取旋度，然后代入式 (1.20) 便得

$$\nabla\times\left(\frac{1}{y}\nabla\times\boldsymbol{H}\right)+z\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{M}^{\mathrm{i}}+\nabla\times\left(\frac{1}{y}\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}\right) \tag{1.32}$$

方程 (1.31) 和 (1.32) 称为非均匀矢量波动方程。在均匀介质中，方程 (1.31) 和 (1.32) 可简化为

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})-k^2\boldsymbol{E}=-z\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}-\nabla\times\boldsymbol{M}^{\mathrm{i}} \tag{1.33}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})-k^2\boldsymbol{H}=-y\boldsymbol{M}^{\mathrm{i}}+\nabla\times\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}} \tag{1.34}$$

这里 $k=\sqrt{-zy}$ 被称为介质中的波数。

1.3 电磁场的矢量积分方程

积分方程的形式因问题而异，但大体可用一种模式来建立。即先用等效原理将问题分成规则和不规则两部分，然后解析求解出规则部分，最后利用规则部分的解建立未知等效源在不规则部分的方程。下面讲述如何建立自由空间中物体散射的积分方程，以说明建立积分方程的方法。我们先阐述分解问题的等效原理，再讲述源在自由空间中产生的场，即自由空间中麦克斯韦方程的解，最后按三类不同的物体：金属体、均匀介质体、非均匀介质体，分别建立描述它们的积分方程。

1.3.1 等效原理

等效原理是由惟一性定律引申而来，它的一个重要用途就是告诉我们如何分解问题才能保证与原问题一致。等效原理形式多种多样，下面主要介绍三种形式。如图 1-1(a) 所示，S 是一个虚构的边界面，其内有源且介质非均匀，其外无源且

介质均匀。显然，这是一个源在非均匀介质中产生场的复杂问题。如果我们只关心 S 外的场，那么便可将此问题等效成一个只有在 S 上有源的规则问题，此问题的解与原问题的解在 S 外是一样的。这有下面三种等效形式。

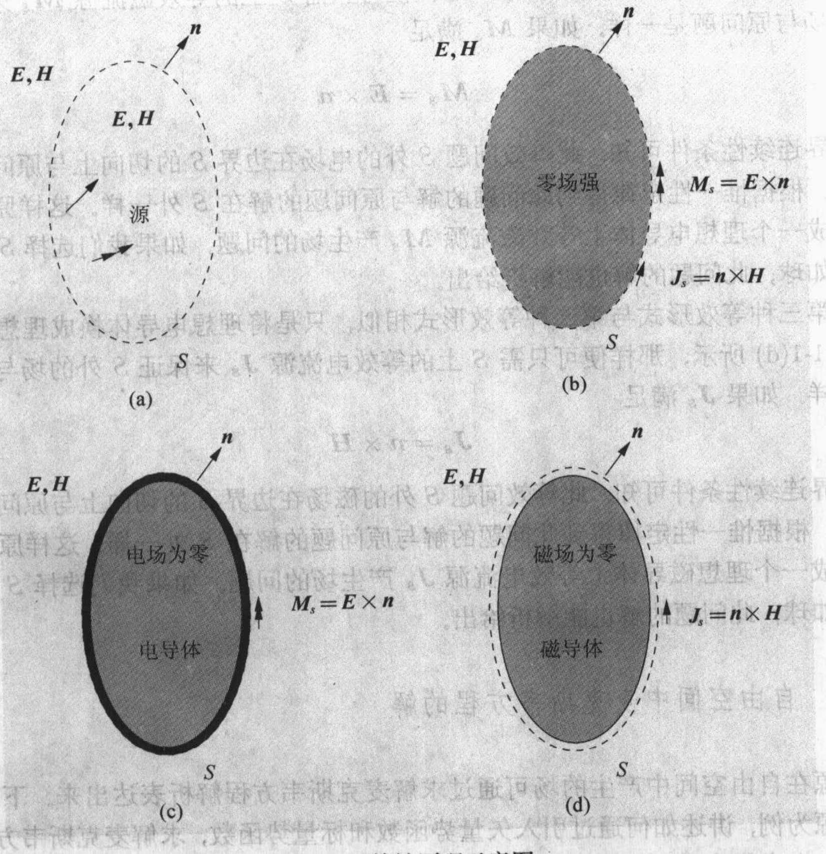

图 1-1 等效原理示意图

第一种形式是如图 1-1(b) 所示，假设 S 内的场为零， S 上有一组等效源 $\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$，他们满足

$$\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} \tag{1.36}$$

由边界连续性条件可知，此等效问题中 S 外的场在边界 S 的切向上与原问题一样的。根据惟一性定律可知此问题的解与原问题的解在 S 外一样。又此等效问题中 S 内的场为零，因而我们可以进一步假设 S 内是均匀介质，且与 S 外相同。这样原问题便等效成一个 S 上一组等效源 $\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$ 在均匀介质中产生场的问题。这是一个规则问题，下节将给出解析解。这是一种常用的等效形式，又称为惠更斯原

理。注意此等效形式既需等效电流源，又需等效磁流源，除此无法保证既要 S 内的场为零，又要 S 外的场在边界 S 上与原问题一样。

与第一种形式不同，第二种等效形式是假设 S 内为理想电导体，从而保证 S 内的电场为零，如图 1-1(c) 所示。这样便可只需 S 上的等效磁流源 $\boldsymbol{M}_s$ 来保证 S 外的场与原问题是一样。如果 $\boldsymbol{M}_s$ 满足

$$\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \tag{1.37}$$

由边界连续性条件可知，此等效问题 S 外的电场在边界 S 的切向上与原问题是一样的。根据惟一性定律得到此问题的解与原问题的解在 S 外一样。这样原问题便等效成一个理想电导体上等效磁流源 $\boldsymbol{M}_s$ 产生场的问题。如果我们选择 S 为规则形状如球，此问题的解也能解析给出。

第三种等效形式与第二种等效形式相似，只是将理想电导体换成理想磁导体如图 1-1(d) 所示，那样便可只需 S 上的等效电流源 $\boldsymbol{J}_s$ 来保证 S 外的场与原问题是一样。如果 $\boldsymbol{J}_s$ 满足

$$\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} \tag{1.38}$$

由边界连续性条件可知，此等效问题 S 外的磁场在边界 S 的切向上与原问题是一样的。根据惟一性定律得到此问题的解与原问题的解在 S 外一样。这样原问题便等效成一个理想磁导体上等效电流源 $\boldsymbol{J}_s$ 产生场的问题。如果我们选择 S 为规则形状如球，此问题的解也能解析给出。

1.3.2 自由空间中麦克斯韦方程的解

源在自由空间中产生的场可通过求解麦克斯韦方程解析表达出来。下面就以电流源为例，讲述如何通过引入矢量势函数和标量势函数，求解麦克斯韦方程。因为在自由空间中有下面方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{1.39}$$

根据矢量恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$, 可以定义矢量势 $\boldsymbol{A}$ 使

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.40}$$

将上式代入式 (1.16) 便有

$$\nabla \times (\boldsymbol{E} - \mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.41}$$

注意任何梯度场的旋度为零，即有矢量恒等式 $\nabla \times \nabla\phi = 0$, 因而为表达电场 $\boldsymbol{E}$，需再引入一个标量势 ϕ，这样 $\boldsymbol{E}$ 便可表达为

$$\boldsymbol{E} - \mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{A} = -\nabla\phi \tag{1.42}$$

将式 (1.40) 和 (1.42) 代入式 (1.17) 便有

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} - k^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\epsilon\nabla\phi \tag{1.43}$$

这里 $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 。使用矢量恒等式，式 (1.43) 可改写为

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} - k^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\epsilon\nabla\phi \tag{1.44}$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 不能由关系式 (1.40) 惟一确定。要确定 $\boldsymbol{A}$ 还需给出 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 。为求解方便，这里我们选择

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{j}\omega\epsilon\phi \tag{1.45}$$

于是方程 (1.44) 便简化为只是含有矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的矢量偏微分方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J} \tag{1.46}$$

这便是矢量亥姆霍兹方程。通过对方程 (1.43) 取散度，以及利用 (1.45), 便可得到关于标量势 ϕ 的标量亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla \cdot \boldsymbol{J} \tag{1.47}$$

此时引入矢量势 $\boldsymbol{A}$ 的意义便可看出，因为在某些正交曲线坐标系下，矢量亥姆霍兹方程可简化为标量亥姆霍兹方程。在直角坐标系下有

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = J_x \tag{1.48}$$

$$\nabla^2 A_y + k^2 A_y = J_y \tag{1.49}$$

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = J_z \tag{1.50}$$

这里 A_x, A_y, A_z 和 J_x, J_y, J_z 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 在直角坐标系下的分量。因为标量亥姆霍兹方程的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{1.51}$$

这里 $\boldsymbol{r}'$ 代表源点位置， $\boldsymbol{r}$代表场点位置，这样便有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{1.52}$$

标量势 ϕ 可由式 (1.45) 直接得到

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.53}$$