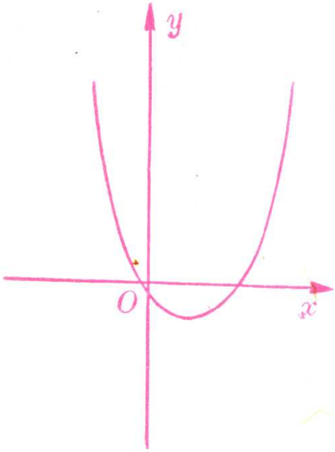
SHU

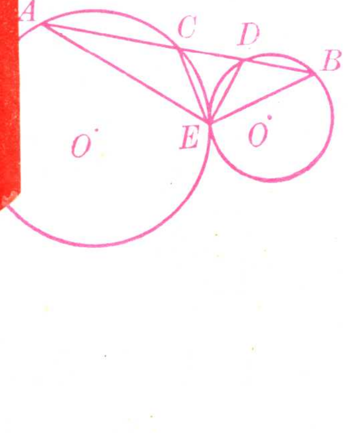


你能正确选择吗？

（五）

——漫谈数学选择题的解法

李根水　编



XUE

你能正确选择吗？（五）

——漫谈数学选择题的解法

李根水　编

上 海 科 学 技 术 出 版 社

责任编辑　周玉刚

你能正确选择吗？（五）

——漫谈数学选择题的解法

李根水　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海东方印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张4.25　字数93,000

1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷

印数：1—35,000

统一书号：13119·1414　　定价：0.81元

编者的话

《你能正确选择吗?》是奉献给正在学习初等数学的成人学校学员和自学青年的一套知识性和训练性相结合的丛书。

目前，在初等数学的学习、训练、测试和知识或智力竞赛中，有一种题型很具特色，这就是带有判断、选择性的题型，通常叫做选择题。这种题型，在题中就已提供了好几个答案，其中只有一个是对的，要求你作出正确的选择。

这类题型，答题很简单，只需指出哪一个对就行了，但要答对很不容易。这要求有清晰的概念辨析能力，或有熟练的运算能力，或有较强的逻辑推理能力，在思维上还要有相当的严密性、深刻性和灵活性。常做这种题型，对知识掌握、能力提高和思维训练，都有独特的作用。此外，由于这种题型带有客观性，即不管什么人答的题，不管由哪个人批改、评卷、评分标准都一样，不会带有评卷人的主观因素，因此这种题型就在数学学习成绩的测量和数学知识竞赛或智力竞赛的试卷中被广泛采用，也成为“标准化考试”中的一种重要题型。

但是，目前广大的读者尤其是成人中等学校的学员和自学青年，大都缺少解这种题型的训练，不掌握它的特点和解题方法、规律。遇到这种题型往往很不适应，束手无策。大家都盼望得到既有解这种题型的方法指导、又能受到较系统训练的小册子。

正是为了满足读者的上述需要，我们编写了这套数学丛书。它根据初等数学的主要学习内容和学习顺序编排，共分

六册．本书是其中的第五册，基本上是高中《立体几何》和《平面解析几何》的内容，供学习高中年级数学的学员和自学青年训练用，也可供广大中学数学教师和研究数学标准化考试命题与从事建立题库工作的人员参考。

本书共分两部分。第一部分是《数学选择题解法漫谈》，深入浅出地分析了这种题型的一些主要特点，介绍了几种基本解法。第二部分是训练题，各题都有代号为A、B、C、D的四个答案，其中有且只有一个是正确的，请你把正确的一个答案代号填入题中的(　　)里。

《你能正确选择吗？》小册子的知识、方法介绍和训练，将使你知识更牢固，技能更熟练，思路更敏捷，成绩更进步！

《你能正确选择吗？》的书后还附了正确答案、提示或略解，你可以检测自己选对了几个，如果不对，就分析一下原因，从中找出学习的不足，加以改进，这样你的数学学习将有更大提高。

欢迎大家一道一道试一试，看你“能正确选择吗”？本书中《数学选择题解法漫谈》是由唐盛昌、杨安澜、张福生同志执笔写的，张福生、杨安澜同志对全书作了审阅并进行了修改，在此谨表谢意。

虽然在编写中尽了自己的努力，但由于水平不高、时间仓促，书中定有不少缺点错误，恳请读者指正。

编　　者

一九八六年一月

目　录

漫谈数学选择题的解法

你做过选择题吗？它是一种很有意思的题型．它在题目里就把正确的结论告诉你，但这个结论又和好几个错误结论混在一起，要求把它选择出来．这种题目的结构包括两个部分：一部分叫题干，由完整的或不完整的陈述句或问句所构成；另一部分叫选项(也叫备选答案或选择支)，其中通常有一个并且只有一个选项是正确的．解选择题时，不要求写出具体过程，只要指出哪个选项是正确结论就行．做选择题看来很省事，但要做对却不容易．先看一个例子：

例 1 对于整数 a，下列结论中一定正确的只有(　　)．

(A) 分式的分子与分母同乘以 $|a|$，分式值不变；

(B) 分式的分子与分母同除以 $a+1$，分式值不变；

(C) 分式的分子与分母同乘以 $|a+1|$，分式值不变；

(D) 分式的分子与分母同除以 $|a|+1$，分式值不变．

这里四个结论好象都不错，其实只有(D)是对的，因为 a 是整数，它可以是正值，也可以是零或负值，所以只有 $|a|+1$ 一定不会等于零，另外的 $|a|$、$a+1$、$|a+1|$ 都可能取到零值，而根据分式的基本性质，分式的分子与分母同时乘以或除以不等于零的数，分式值才不变．

答题省事，但容易出错，这是选择题的明显特点．答题省事，可以节省答题时间，提高解题效率；容易出错，可以检验知识掌握得好不好，能力强不强．另外，选择题还具有题小面

宽、灵活多样、便于批阅、评分客观等特点。

但是，当你对选择题的解法很陌生时，就常常会想当然，象猜谜似地猜答案；有时是每道题都象解常规题那样直接做出答案，再作选择；甚至把每个选项都当作一道小题或一个求解的结论，一个一个地去解、去证，结果一题变成好几题。由于不知道解选择题还有别的有效的方法，所以弄得不是出错就是费时费力太多。这里，我们向大家介绍一些常见的选择题解法。有了这些方法，再做本书里的一些练习进行训练，你解选择题的本领一定会有明显的提高。

(一) 直 接 法

这种解法，就是直接从已知条件出发，运用数学概念与理论进行运算或推理，求得结果后，再与各选项作比较，确定正确的答案。

例 2 函数 $y=7^x+2$ 的反函数是(　　)。

(A) $x=\log_7 y-2$；　　(B) $y=\log_7(x-2)$；

(C) $y=\log_7 x-2$；　　(D) $y=\log_7(x+2)$。

解 由 $y=7^x+2$，得 $7^x=y-2$，$\therefore$ $x=\log_7(y-2)$，即函数 $y=7^x+2$ 的反函数是 $y=\log_7(x-2)$。故选择(B)。

这道题主要检查反函数的概念与求法，以及指数函数与对数函数的互化。由于各选项的形式相近，如果概念不清或运算错误，哪怕符号有错，就都可能得到错误结果，从而作出错误的选择、选择题命题时，是根据可能得到的错误结果而编拟选项的，解题中稍有疏误，它便会诱使你作错误选择。这种命题办法，通常叫做“诱误”。要避免落入诱误的圈套，就必须对概念有透彻的理解，有分析辨别的能力；还必须对运算过

程和基本的解题方法有熟练的掌握，做到合理、正确。解这种考查基本概念和运算的选择题，通常先可用直接法。

例 3 正方体 AC_1 中，各面的对角线与正方体的对角线 AC_1 垂直的共有（ ）。

(A) 12 条；(B) 6 条；

(C) 4 条；(D) 2 条；

(E) 以上答案都不对。

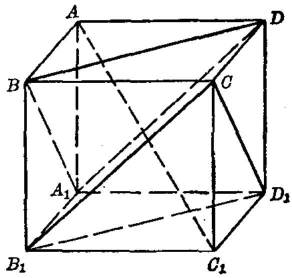


图 1

解 正方体各面正方形的对角线互相垂直，其中一条是正方体对角线 AC_1 在这个面上的射影。故由三垂线定理知，面上的另一条对角线必垂直于 AC_1。这样的对角线有 BD、B_1D_1、CD_1、A_1B、B_1C、A_1D，共 6 条。(图 1)

故答：(B)。

例 3 出现了“以上答案都不对”这样的选项。这有两种可能：一是为了不给解答的人过多的暗示，故意把正确答案隐藏在这一选项中；二是正确答案虽在其他选项中，但用“以上答案都不对”来干扰答题的人。这种题，也常常要用直接法解，以便决定哪个选项是正确的。

用直接法解选择题虽然是以条件为主进行考虑的，但解题时还应注意选项所提供的暗示。也就是说，审题时要对所有选项作一番认真仔细的观察、分析，从中发现一些解题的线索或思考的方向，使解题少走弯路，更迅速、正确、简捷。

例 4 已知二次函数

$$y=2(m+1)x^2+4mx+m^2+3n+2.$$

当函数图象经过原点时，m 的值只能是（ ）。

(A) $m=-2, m=-1$； (B) $m=-2$；

(*C*) $m=-1$；　　　　(*D*) 以上答案都不对。

解 ∵ 函数图象经过原点，∴ $(0,0)$满足函数式，代入得 $m^2+3m+2=0$，$(m+2)(m+1)=0$，即 $m=-2$，$m=-1$。但 ∵ x^2 的系数 $2(m+1)\neq0$，否则不是二次函数，∴ $m\neq-1$。

故答：(*B*)。

这里，用直接法解得 $m=-2$，$m=-1$ 时，很可能落入(*A*)的诱误。但如果注意到：(*B*)、(*C*) 实际上给出了“在 $m=-2$、$m=-1$ 中舍去一个”的暗示，那么就容易考虑到二次函数的二次项系数不能为零，从而舍去 $m=-1$，选择(*B*)。

例 5 互不重合的三个平面把空间分成(　　)。

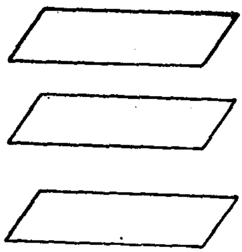
(*A*) 4个部分；　　　　(*B*) 6个或8个部分；

(*C*) 4个或6个或8个部分；

(*D*) 4个或6个或7个或8个部分。

解 如图2(1)，互不重合的三个平面把空间分成4个部分是可能的。由于“6个”、“8个”部分在选项(*B*)、(*C*)、(*D*)中都出现了，故先验证“7个部分”是否可能。如图2(2)所示，这是可能的。

故答：(*D*)。


(1)

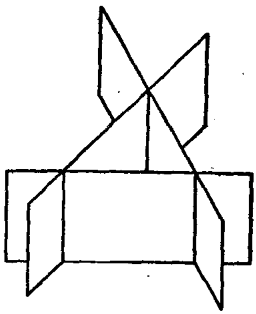

(2)

图 2

还需要说明的是，当运用直接法求得的答案与所有选项的答案都不相同时，就应该检查解题过程，看哪里出了毛病。当求得的结果与某选项一致时，通常就按它作答。但如果解题过程有误，或基本概念理解有问题，或运算出差错等，使求得的错误答案恰是某个用来诱误的选项，那就会作出错误的选择，解题者本人往往难以发觉。这是用直接法解选择题时一个比较困难的地方。克服这个困难的办法，除了要正确理解基本概念，正确进行运算、推理，以保证求得的结果正确无误外，还应当象例 4 、例 5 那样认真审题，仔细分析各选项的答案，利用它的暗示作用，帮助我们避免错误。

（二）筛 选 法

筛选法是把已知条件与各个选项所提供的答案结合起来，根据有关知识进行判断，将不可能成立的答案一个一个否定掉。由于一般的选择题在各选项中有且仅有一个答案正确，就可把剩下的那个正确答案筛选出来。

例 6 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$。若它的图象经过点$(1,\ -8)$，$(0,\ -7)$，且对称轴为 $x=\frac{1}{3}$，则（ ）。

(A) $a=-3,\ b=2,\ c=-7$；

(B) $a=\frac{1}{2},\ b=-2,\ c=7$；

(C) $a=1,\ b=2,\ c=-7$； (D) $a=b=c=5$。

解 $\because$ 这个函数的图象经过 $(0,\ -7)$，故知 $c=-7$，由此排除(B)、(D)；由于对称轴 $x=\frac{1}{3}$，即 $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$，故知 a、b 异号，排除(C)。所以正确答案是(A)。

例 7 方程 $x^2+(k-1)y^2-3ky+2k=0$ 表示两条相交直线时，k 的值只能是(　　)。

(A) 0；(B) 0，-8；(C) 0，8；(D) 8，-8。

解 按题意，$x^2+(k-1)y^2-3ky+2k=0$ 必定能分解成两个一次因式的积，而此式中 x^2 项的系数为1，且不含 xy 项，故必须 y^2 的系数 $k-1\leqslant 0$。由于(C)、(D)都有 $k=8$，$8-1>0$，排除(C)、(D)。由于(A)、(B)都含有0，故只要验证 $k=-8$。将 $k=-8$ 代入方程左边，得 $x^2-9y^2+24y-16=0$，即 $(x+3y-4)(x-3y+4)=0$，符合题意。故答：(B)。

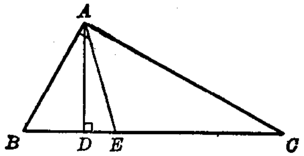


图 3

例 8 如图3所示，在以 A 为直角顶点的直角三角形 ABC 中，$\angle B=60°$，$AB=a$，$AD\perp BC$，AE 平分 $\angle BAC$。则 $DE=$(　　)。

(A) $(\sqrt{3}-1)a$；(B) $\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)a$；

(C) $(\sqrt{3}+1)a$；(D) $\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$。

解 在直角三角形 ABC 中，易知 $BD=\frac{a}{2}$。在 $\triangle ABE$ 中，$\angle AEB=75°$，即 $\angle AEB>\angle ABE$，$\therefore AE<AB$，$\therefore DE<BD=\frac{a}{2}$。对各个选项进行检验，发现除(D)外，其他各选项的答案都大于 $\frac{a}{2}$。故正确答案为(D)。

你一定已经发现，运用筛选法常常可以避免不少繁复的运算过程，从而迅速作出正确的选择。这里解题的关键是需要找到某种方便的筛选、鉴别的准则，如例6中的 c 值和 a、b

的符号，例 7 中关于参变数 k 的取值范围，例 8 中由 $DE<AB=\frac{a}{2}$，选 $\frac{a}{2}$ 为准则等，这样就可很快排除那些不正确的答案，使供选择的可能减少到最低限度。这里还应当注意，由于多个选项中只有一个是正确的，而在筛选过程中，往往排除一个选项还可连着排除几个，这就更有利于较快找到正确答案。筛选法是解数学选择题时又一个常用方法。

（三）特例判定法

有些选择题的条件、结论带有普遍性，适合于一般范围，包括数值区间、图象范围、几何图形的类别、形状等等。解这类题，用直接法比较困难，有时运算或推理过程比较繁复。这时，可以用取一个或一组特殊值，或画特殊图形，或确定特殊位置等办法，加以判断。我们知道，要否定某个带普遍性的结论，只需举一个反例。为此，如果其他选项都可以举反例加以否定，那么剩下的那一个选项提供的就是正确答案了。这种解选择题的方法，通常称为特例判定法。

例 9 设 $xy=a$，$xz=b$，$yz=c$，且 $abcxyz\neq 0$，则 $x^2+y^2+z^2=($　　$)$。

(A) $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$；　　(B) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$；

(C) $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$；　　(D) $\dfrac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$；

(E) $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$。

解 取特殊值。令 $x=1$，$y=2$，$z=-1$，则 $a=2$，$b=-1$，$c=-2$。计算得 $x^2+y^2+z^2=6$。这时，(A)、(B)、(C)、

(D)、(E)各选项，分别取值-1，$\frac{9}{4}$，$\frac{1}{4}$，4，6。除(E)外都不正确。由于选择支中必有一个是正确的，所以正确答案是(E)。

有时，题中出现“以上答案都不对”或“答案不确定”那样的选项，而正确的选择又恰好是这个选项，这时也有可能用特例法去解，但往往不能只取一个特例即作出选择。

例 10 设a、b是两个不相等的正数，下列三个代数式

(I)：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$；　(II)：$\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$；

(III)：$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2$，其中最大的一个(　　)。

(A)　必定是(I)；　(B)　必定是(II)；

(C)　必定是(III)；　(D)　不能确定，与a、b取值有关。

解　取$a=1$，$b=2$，则(I)、(II)、(III)式分别取值5，$4\frac{1}{2}$，$4\frac{25}{36}$，于是(B)、(C)被排除。再取$a=2$，$b=3$，则(I)、(II)、(III)式又分别取值$8\frac{1}{3}$，$8\frac{1}{6}$，8.41。于是(A)被排除。故正确答案是(D)。

例 11　已知直线$y=kx+2k+1$与直线$y=-\frac{1}{2}x+2$的交点位于第一象限，则k的范围是(　　)。

(A)　$-6<k<2$；　(B)　$-\frac{1}{6}<k<0$；

(C)　$-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$；　(D)　$\frac{1}{2}<k<+\infty$。

解　设位于第一象限又在直线$y=-\frac{1}{2}x+2$上的点为$(2,1)$。把$(2,1)$代入$y=kx+2k+1$，得$k=0$，即$k=0$时，两

直线交点(2,1)在第一象限。由此排除(B)、(D)。再在(C)的范围外、(A)的范围内取 $k=1$，代入 $y=kx+2k+1$，得 $y=x+3$，求出它与 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的交点横坐标 $x=-\frac{2}{3}<0$，故排除(A)。所以正确答案是(C)。

运用特例判定法的关键是寻找适当的特殊值、特殊图形或图形的特殊位置，根据有且只有一个结论正确的约定，作出正确的判断。特例判定法往往可以使运算简捷、推理简化，是很有特点的一种方法。

有的选择题的解法，可以将各选项分别代入命题题干进行检验，亦可反过来将命题题干中的条件分别代入各选项加以检验，从而作出正确的判断。这种方法称为代入法。特例判定法是一种特殊的代入法。

例 12 抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $2x-y=4$ 距离最短的点的坐标是(　　)。

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$；　　($B$) $(1, 1)$；

(C) $(1.5, 2.25)$；　　(D) $(2, 4)$。

解 设抛物线上一点 $P(x_0, y_0)$，它到 $2x-y=4$ 的距离为 $d=\frac{|2x_0-y_0-4|}{\sqrt{5}}$，分别将 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$，$(1,1)$，$(1.5,2.25)$，$(2, 4)$ 一一代入，经比较，$(1, 1)$ 代入所得值最小。故选择(B)。

例 13 若动点 $P(x, y)$ 在抛物线 $y=2x^2+1$ 上移动，则 P 到点 $A(0, -1)$的联结线段的中点轨迹方程是(　　)。

(A) $y=2x^2$；　　(B) $y=4x^2$；　　(C) $y=6x^2$；

(D) $y=8x^2$；　　(E) $y=10x^2$。

解 在抛物线 $y=2x^2+1$ 上取一点 $P(1, 3)$，则 PA 的

中点为 $Q\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 将 Q 的坐标代入五个选项中一一检验，排除(A)、(C)、(D)、(E)，故答案是(B).

(四) 逆 推 法

有些选择题从条件出发不易入手，可以从结论着手来考虑问题。这种方法是先假设其选项提供的结论成立，然后把它当作命题的条件，通过恒等变形、同解变形或逻辑推理，向条件或某些已知关系式方向逆推，观察得到的结果是否满足题目要求。如果不满足，这个选项就被否定；如果有一个选项满足，那它就是正确答案。有时，还可以从条件、结论两个方面同时出发，顺推与逆推相结合，达到判定选项是否正确的目的。当然，只有在命题推导过程可逆，条件与结论可逆时，才能用逆推法。

例 14 当 α 为锐角时，下列结论中可能成立的是( )。

(A) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，且 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$；(B) $\sin\alpha=9^{\log_3\sqrt{2}}$；

(C) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{3}$； (D) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

解 若(A)成立，则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\neq1$，这不可能。$(A)$被否定；若$(B)$成立，$\because 9^{\log_3\sqrt{2}}=3^{2\log_3\sqrt{2}}=2$，则 $\sin\alpha>1$，(B)被否定；如果(D)成立，左边平方得

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha,$$

右边平方得 $\frac{1}{4}$，$\because$ α 为锐角，$\sin\alpha\cos\alpha>0$，故上式左边平方与右边平方不可能相等，否定(D)。所以正确答案应选择(C)。

例 15 如果 $\sin x+\cos x=-\frac{1}{5}$，且 $0<x<\pi$，那么 $\mathrm{tg}x$ 的值是(　　)。

(A) $\frac{4}{3}$；(B) $\frac{3}{4}$；(C) $-\frac{4}{3}$；(D) $-\frac{3}{4}$；

(E) 不能确定。

解 假设 $\mathrm{tg}\,x=\frac{4}{3}$，在 $0<x<\pi$ 的条件下，必有 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求得 $\sin x=\frac{4}{5}$，$\cos x=\frac{3}{5}$，$\therefore$ $\sin x+\cos x=\frac{7}{5}\neq-\frac{1}{5}$，故否定(A)。同理可否定(B)。又设 $\mathrm{tg}\,x=-\frac{4}{3}$，在 $0<x<\pi$ 的条件下，必有 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$，求得 $\sin x=\frac{4}{5}$，$\cos x=-\frac{3}{5}$，$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}\neq-\frac{1}{5}$，故否定(C)。$\therefore$ 正确答案为(D)。

以上我们介绍了解选择题的四种常用方法。直接法是从肯定某个结论着手的，而筛选法、特例判定法与逆推法则是从否定某些结论，或者寻找某些结论加以逆推得到正确结论来进行的。在具体解题时，要“因题制宜”，采用适当的方法，常常还要把几种方法结合起来，灵活运用，这样才能收到事半功倍的效果。

作为本文的结束，我们还要指出，上面介绍的各种方法，只是帮助大家初步了解，可以用哪些方法对选择题进行分析求解，但运用这些方法不能死套硬搬，更离不开对数学基础知识与基本技能的牢固掌握。在双基熟练的基础上再学会灵活运用适当的方法，才可能较好地解答各种选择题。