弹性壳体计算的基本理论

[苏] H. B. 科尔库诺夫著
张　维　嶽　译

高　等　教　育　出　版　社

弹性壳体计算的基本理论

[苏] H. B. 科尔库诺夫著
张　维　嶽　译

高 等 教 育 出 版 社

5

本书系根据苏联国家"高等学校"出版社(Государственное издательство «Высшая школа») 1963 年莫斯科出版的 Н.В.科尔庫諾夫(Н.В.Колкунов)所著"彈性壳体計算的基本理論"(Основы расчета упругих оболочек)一书譯出。

原书在苏联是作为高等学校土建类专业学生的教学参考书之用的。

书中簡短地闡述了彈性壳体計算的基本理論。书中各理論章节均有从建筑实踐中选出的結构計算实例和說明。

本书可供高等学校土建类专业学生作为"材料力学和彈性理論基础"課程的教学参考书。

弹性壳体计算的基本理论

Н.В. 科尔庫諾夫著

張 維 嶽 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版(北京沙滩后街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号K15010·1192 开本 850×1168 1/32 印张 7 7/16

字数 185,000 印数 0,001—4,450 定价(7)¥0.85

1966年2月第1版 1966年3月北京第1次印刷

序　　言

壳体理论是结构力学——关于结构物的强度、稳定和刚度的科学——中最现实的和最引人注意的部分之一。

壳体及其他薄壁空间结构在各种不同的技术部门中得到了日益广泛的应用。建筑、航空、造船等结构的发展，在很多情况下是与薄壁体系的利用相关联的。

这种结构的经济效果在实践中得到了证明。

薄壁空间体系——壳体，其自身格外地轻，同时是一种非常坚固的结构形式。

壳体在建筑中的应用具有特殊意义。可以有把握地说，壳体已成为世界建筑实践中最有代表性的结构方案之一。薄壁顶盖能够跨过很大跨度而不需中间支柱，这使得壳体在特种结构建设中有时成为不可代替的。大规模的住宅建筑要求设计人员特别仔细地从经济利益观点来对待结构形式的选择。钢筋混凝土扁壳楼盖（帆形板）是很好的，在实践中得到了广泛的应用。

结构物的装配化及扩大一些单独构件的尺寸的思想，直接导致在建筑中利用板与壳。

工程师和建筑师们的探索，导致了建立新的结构形式与建筑形式。但是不能认为在这方面的发展已经到了头了。

我们周围的大自然，给出了多少绝妙的而又多种多样的壳体形式啊！例如，值得我们看一看各色花瓣的“结构”，它经受着莫大的（相对而言）荷载。土建工程师们还远没有利用在无限的大自然中提供给他们的那些形式。

有关壳体的科学还是比较年轻的。关于壳体计算理论方面最初的

一些著作,是在上世纪末出现在德国和英国[60],[67]。壳体理论曾作为纯数学的科学得到发展,到开始广泛实际应用壳体的时候,就已经有了编制好的计算工具。本世纪三十年代可以认为是一个转折时期,此时,土建工作者开始广泛采用壳体作为顶盖,而钢筋混凝土成了制做壳体的主要材料。壳体理论开始沿着建立实用计算方法和在深入分析结构受力情况的基础上创立简化理论的道路蓬勃发展。

目前壳体理论计算工具的研究已经达到了这样的程度,就是实际上能够相当精确地计算建筑中所采用的各种形式的壳体结构。

壳体计算方面的实用手册:"薄壁顶盖和楼盖计算规程"[17],以及在A.A.乌曼斯基主编下集体创作的"设计人员手册"计算-理论部分[50],在实际利用无数的理论与实验研究成果方面起着很大作用。

莫斯科建筑工程学院的著作集体,曾创作了钢筋混凝土结构专门教程的巨著[31],他们在推广钢筋混凝土壳体的现代计算方法方面作出了很大贡献。

壳体理论还在继续发展着。产生了许多新的科学分枝,并正在出现许多新的课题。

苏联学者在壳体理论方面作出了非常宝贵的贡献。可以不夸大地说,在壳体计算新方法的思想丰富性和多种多样性方面我国的科学是无比的。

苏联的壳体文献拥有下列一些名著,如:B.З.符拉索夫著"壳体的一般理论及其在技术中的应用",B.B.诺沃日洛夫著"薄壳理论",A.Л.戈尔登魏泽尔著"弹性薄壳理论",X.M.穆什塔里和K.З.加利莫夫著"壳体非线性理论",A.C.沃利米尔著"柔板与壳"等。

在许多国际会议上,苏联学者的报告以其所提问题的深入性和求解问题的独创性而引起了注意,这些国际会议的结果就证明了苏联学者的成就。

苏联学者B.З.符拉索夫,B.B.诺沃日洛夫,X.M.穆什塔里,A.Л.

戈尔登魏泽尔，A. C. 沃尔米尔等都建立了自己的学派，他们的名字闻名于广大工程界。

本书的目的在于向读者介绍弹性壳体计算的基本理论。

本参考书是按照高等土建学校的材料力学和弹性理论课程教学大纲编写的，也可在研究一些应用弹性理论问题时使用。

作为本书所述全部理论的基础是古典弹性理论所依据的一些假设，那就是关于结构材料具有理想弹性、各向同性和连续性，以及壳体弹性位移远较壳体尺寸为小等假设。本书只研究厚度与曲面的最小曲率半径之比值为 $\frac{1}{30}\sim\frac{1}{100}$ 的薄壳。

壳体的计算是一个具有一定难度的工程问题，它关系到数学分析工具的利用。这里也象在其他的力学科学中一样，证实了伟大的辽纳尔多·达·芬奇的一句话："力学，这是数学科学的天堂，因为我们在力学中得到数学的成果"。

作者没有滥用复杂的数学工具，为的是对于阅读壳体计算第一本书的读者来说不至于把天堂变成地狱。设想读者已经掌握了高等工业学校教学大纲范围内的数学以及结构力学和弹性理论的基本理论。书中在许多情况下给出了必要的解释。

H. И. 别祖霍夫教授和П. A. 卢卡什讲师给与作者很大帮助，他们仔细地读完了手稿并提出了许多宝贵意见。作者向他们表示衷心感谢。

我要感谢地指出 B. H. 帕斯图希欣讲师的劳动，他在校阅本书方面作了大量的工作。

目　录

序言……………………………………………………………………………………………………v
第一章　弹性壳体理论的基本方程……………………………………………………………………1
§1. 曲面理論的某些概念………………………………………………………………………1
§2. 壳体理論的基本假設………………………………………………………………………6
§3. 平衡方程……………………………………………………………………………………7
§4. 壳体理論的几何方程………………………………………………………………………18
§5. 壳体一般理論的物理方程…………………………………………………………………27
§6. 問題的边界条件……………………………………………………………………………29
§7. 壳体理論基本方程汇总……………………………………………………………………33
第二章　壳体的无矩理论………………………………………………………………………………36
§1. 无矩应力状态及其存在条件………………………………………………………………36
§2. 壳体无矩理論的基本方程…………………………………………………………………38
§3. 旋轉壳无矩理論的一般方程………………………………………………………………39
§4. 旋轉壳的軸对称問題………………………………………………………………………41
§5. 柱形壳的无矩理論…………………………………………………………………………47
§6. 旋轉壳在沿环向周期变化的静荷載下的計算……………………………………………56
§7. 任意旋轉壳在沿环向展成富里叶級數的荷載作用下的待解方程的推导…………64
§8. 单叶旋轉双曲面壳在法向荷載 $p_3=p_{3n}(z)\sin n\theta$ 作用下的計算·用初始条件法求非齐次問題的解……………………………………………………………………68
§9. 直角坐标中任意形状壳体按无矩理論的計算……………………………………………77
第三章　圆柱形壳的计算………………………………………………………………………………88
§1. 圓柱形壳理論的一般方程…………………………………………………………………88
§2. 在軸对称荷載作用下的圓柱形壳…………………………………………………………90
§3. 計算例題……………………………………………………………………………………96
§4. 开口和閉口圓柱形壳应力状态的特征……………………………………………………98
§5. 柱形壳基本方程組的变换…………………………………………………………………101
§6. 开口柱形壳的計算…………………………………………………………………………103
§7. 柱形壳問題特解的建立……………………………………………………………………106
§8. 齐次問題解的建立…………………………………………………………………………109
§9. 壳体直綫边界处的边界条件………………………………………………………………115
§10. 計算例題…………………………………………………………………………………117
§11. B.З.符拉索夫的柱形壳“半无矩”理論…………………………………………………130

§ 12. 待解方程……133
§ 13. 基本方程解的建立……134
§ 14. 基本梁函数及其性质……135
§ 15. 續——全解的建立……141
§ 16. 第三章的附加語……146
第四章 旋转壳在轴对称荷载下按有矩理论的计算……151
§ 1. 边界效应的概念……151
§ 2. 旋轉壳考慮边界效应的計算程序……154
§ 3. 边界效应理論的基本方程……154
§ 4. 球壳的边界效应……159
§ 5. 計算例題……163
§ 6. 任意旋轉壳边界效应的近似計算法……169
§ 7. 第四章的附加語……170
第五章 扁壳理论基础……172
§ 1. 扁壳理論的基本假設和前提……172
§ 2. 扁壳理論基本方程的建立……173
§ 3. 扁壳方程組的解法……177
§ 4. 变分方程及其与結构力学能量原理的关系……182
§ 5. 边界条件及基本梁函数的选擇……191
§ 6. 扁壳計算例題……194
§ 7. 第五章的附加語……197
第六章 壳体稳定性的概念·壳体理论的一些方向……200
§ 1. 柱形壳的稳定性……200
§ 2. 壳体的大撓度稳定問題·壳体的非綫性理論……204
§ 3. 壳体按极限状态計算的概念……207
§ 4. 关于近似方法及計算机在壳体計算中的应用……211
§ 5. 壳体理論与实踐发展簡述……213
引用文献……226

第一章　弹性壳体理論的基本方程

§1. 曲面理论的某些概念

所谓壳体系由两个曲面所限定的物体，这两个曲面间的距离（壳体的厚度）与壳体其他尺度相比是较小的。

与壳体内外表面等距的曲面，称为中面。

本书将只研究等厚度 h 的壳体。在这种情况下，只要中面的形状、壳体厚度和周边轮廓一经给定，壳体的几何性质就完全确定了。

在某点 M 我们作曲面①的法线（图 I-1）。

在曲面的某点M处，以含有此处的法线的平面截切曲面所得的截线，称为 M 点处的法截线。法截线就是壳体表面上的某一曲线。

曲面微分几何中证明，在曲面的任一点 M 处都可以指出两个正交的（即互相垂直的）方向，在这两个方向上，相邻点的曲面法线均与M点的法线相交。图 I-1 用数字 *1* 和 *2* 表示了这两个方向。

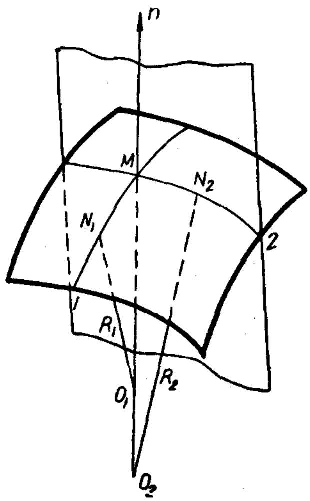

图　I-1

在曲面上平行于这两个方向画一些线，则可得到两族正交线，即所谓曲率线。在任一给定点 M 上，有每一族的一根曲线通过。

现在研究曲率线上某一点M和与其无限邻近的一点 N_1。画出这两个点的曲面法线。这两根法线的交点 O_1 称为曲面上

① 以后我們把曲面这一詞即理解为壳体的中面。

M点的主法截面的曲率中心。由曲率中心至M点的距离称为曲面上M点沿 1 线方向的主曲率半径 R_1; 而主曲率半径的倒数称为曲面在该点的主曲率。

可以证明, M 点的两个主曲率是与其两个主方向相对应的; 在这两个主曲率中, 对于通过该点的所有曲线的曲率来说, 一个是最大曲率, 另一个是最小曲率。

壳体曲面上任意一点的位置, 可以由曲面上两根线的交点(即两个曲线坐标)来确定。

通常采用壳体的未变形曲面的主曲率线作为曲线坐标。

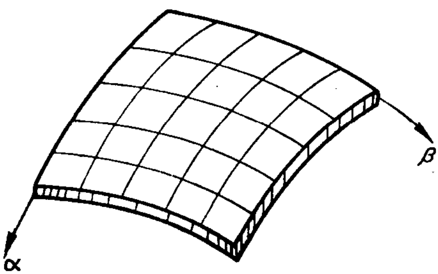

图 I-2

曲面上点的位置, 由两个特征参数来确定 (图 I-2)。根据这两个参数 (以 α 和 β 表示之)的选法的不同, 将会有各种不同的曲线坐标系。

在工程实践中广泛应用一种由任意曲线绕某轴 Oz 旋转而形成的壳体。现在来研究这种壳体的中面 (图 I-3)。形成所谓地理坐标网的经线和纬线, 即为主曲率线。这些主曲率线用来作为曲线坐标。主曲率线的位置可以用不同的形式给出。

我们采取如下的两个基本参数: $\alpha=z$, 即由 O 点算起的竖直距离; $\beta=\theta$, 即通过 Oz 轴的两竖直平面(起始平面 OCD_0 和平面 OCD)之间的夹角。$z=\text{const}$ 的每一值将对应于某一纬线, 而 $\theta=\text{const}$ 的每一值将对应于某一经线。它们的交点即确定 M 点的位置。

所选取的这种坐标系(z, θ, r)称为柱面坐标系。

对于同样的壳体, 球面坐标系中主曲率线的位置, 由以下两个参数来确定: 一个是对应于某纬线的角 φ, 另一个是表征经线位置的角 θ

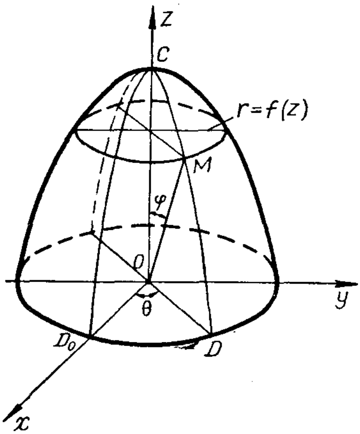

图 I-3

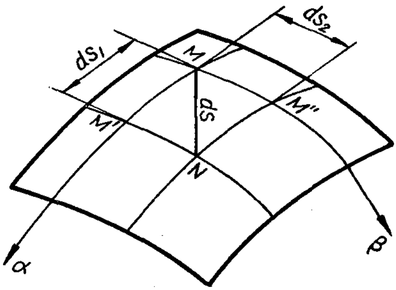

图 I-4

(图 I-3)。

为了获得任意曲面的一般几何特征，我们在某点 M 附近用四根坐标线划出一个无限小的曲面微元来研究，如图 I-4 所示。

N 点与给定的M点之间沿曲面相距一无限小的距离 ds。这个无限小的线段在曲面理论中称为**线度微元**。

在很小的单元内把问题线性化，这是用微分学解决任何物理课题的一般方法；这样，就可以把一些复杂的关系在无限小的微元内取为线性关系，把无限小的曲线线段作为直线线段，等等。

在正交坐标系中，无限小线度微元的平方等于

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2, \tag{1.1}$$

式中 ds_1 和 ds_2——对应于曲线坐标 α 和 β 的增量的线度微元。

这些增量选为无限小的。于是，与其对应的微元 ds_1 和 ds_2 将与自变量的微分成正比

$$ds_1 = A d\alpha, \quad ds_2 = B d\beta. \tag{1.2}$$

A 和 B 可以理解为把曲线坐标增量化成直线线段的畸变系数。线度微元 ds 的平方的表达式成为:

$$ds^2=A^2d\alpha^2+B^2d\beta^2. \tag{1.3}$$

式(1.3)称为在正交坐标 α,β 内曲面的第一个二次式；A 和 B 是第一个二次式的系数①。

这些系数，在任意曲面的一般性情况下，是坐标 α 和 β 的函数。

现在我们来求上述的任意旋转壳在柱面坐标系内的二次式系数值 A 和 B。此壳体系由某平面曲线旋转而形成，此平面曲线的位置可以由作为坐标 z 的函数的旋转半径来确定。

我们用彼此相距无限小距离 dz 的两个纬线平面和彼此间夹角为 $d\theta$ 的两个经线平面切取一壳体曲面微元来研究。

由图 I-5, a 可以直接求得:

$$ds_2=rd\theta. \tag{1.4}$$

由图 I-5, b 求得

$$ds_1=dz\frac{1}{\sin\varphi}=dz\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi},$$

又因 $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{dr}{dz}$, 故

$$ds_1=\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}dz; \tag{1.5}$$

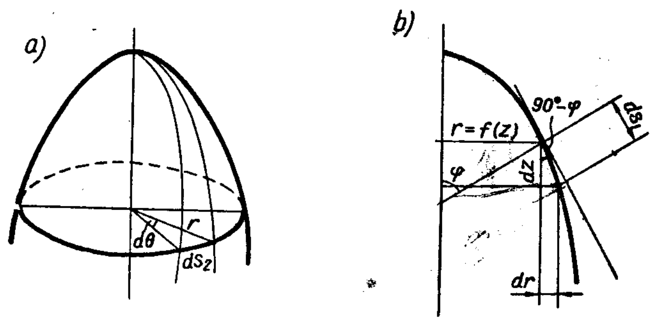

图　I-5

① 在此处所引的初淺叙述中，其他一些重要关系未予考虑。

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}};\qquad \cos\varphi=\frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}.$$

因此，曲面上线度微元的平方等于

$$ds^2=\left[1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz^2+r^2d\theta^2. \tag{1.6}$$

旋转壳在柱面坐标系内的二次式系数值等于

$$A=\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2},\quad B=r. \tag{1.7}$$

不难证明，旋转壳在球面坐标系内的二次式系数值等于

$$A=\frac{r}{\sin\varphi},\quad B=r, \tag{1.8}$$

式中 r 为 φ 的函数。

以后我们把坐标线 α 和 β 的曲率表示为 k_1 和 k_2，而把相应的曲率半径表示为 R_1 和 R_2。

在建筑实践中采用的壳体曲面形式，可按其高斯曲率来分类。所谓壳体曲面的高斯曲率就是两个主曲率的乘积

$$K=k_1\cdot k_2. \tag{1.9}$$

图 I-6 给出了在建筑实践中采用的几种壳体形式的直观图式。

第一类（A）是零高斯曲率的壳体（壳体曲面内有一个坐标方向的曲率为零）。柱形和锥形即属此类。

属于第二类（B）的有各种各样的双曲率曲面。

双曲率壳体又可分为两类：

I）正高斯曲率的（凸形的）；

II）负高斯曲率的（一方向凸、一方向凹的）。

实践中常采用以下两种双曲壳体形式，它们既可以属于第 I 类，也可以属于第 II 类，即：

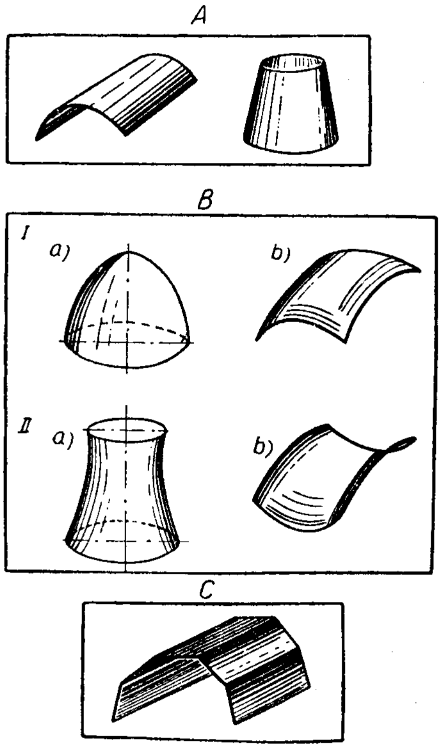

图　I-6

a）旋转壳；

b）移动壳。

移动壳的曲面是由某一母曲线沿任一导线移动而形成，移动时其母线所在的各平面始终保持着相互平行。

应当特别划分出褶板(即第三类 C)，它是沿某一直线具有集中曲率的壳体。

§2. 壳体理论的基本假设

作为弹性壳体理论基础的，有这样一些假设，其物理意义表明梁、

板和壳问题的原则性提法的共同性。

这些假设可表述如下：

1. 变形前垂直于中面的直线微元，在变形后仍保持为直线并垂直于变形后的中面，而且本身的长度不变。

$\gamma_{13}=\gamma_{23}=0$

$\varepsilon_3=0$

2. 平行于中面的各面上的法向应力，与其他应力相比，是可以忽略的小量。

这些假设，实质上是把作为梁计算理论基础的物理原则运用到二维体——板和壳上来。

这些简化的假设，在受弯板理论中也曾有同样的表述。所不同的只在于现在我们研究的问题是“曲板”——壳体。

§ 3. 平衡方程

现在研究由坐标系 α, β, z（图 I-7）给定的任意形状壳体的微体的平衡。

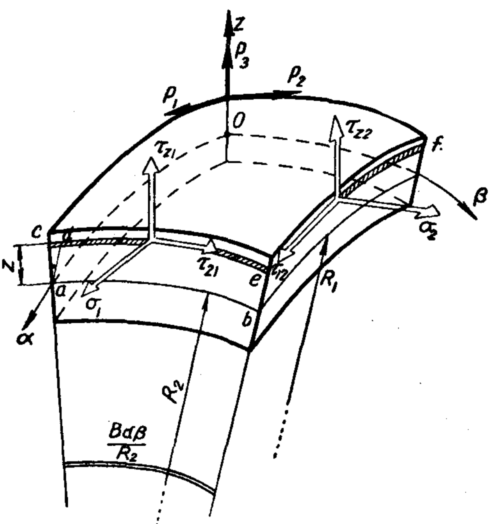

图 I-7

设外荷载是沿壳体曲面连续分布的任意荷载。荷载集度在 x, y, z 三方向(即 O 点坐标线 α, β 和 z 的切线方向)上的投影，分别以 p_1, p_2 和 p_3 来表示。荷载的这些分量，都是自变量 α 和 β 的任意连续函数。

为了研究内力的分布，从壳体中以四个法平面 $\alpha=\text{const}$, $\alpha+d\alpha=$ $=\text{const}$, $\beta=\text{const}$, $\beta+d\beta=\text{const}$ 割出一个无限小的微体。设：σ_1——$\alpha=\text{const}$ 边上的法向应力；σ_2——$\beta=\text{const}$ 边上的法向应力；$\tau_{12}=\tau_{21}$——分别为 $\beta=\text{const}$ 边和 $\alpha=\text{const}$ 边上沿曲率线切线方向的剪应力；τ_{z1} 和 τ_{z2}——沿壳体曲面法线方向的剪应力。

应力的正向如图 I-7 所示。

中面位置上微体各边的长度为

$$Ad\alpha \quad 和 \quad Bd\beta.$$

O 点的主曲率半径为 R_1 和 R_2。

微体上离中面距离为 z 的 ce 边的长度，可由图 I-7 求得

$$ce=ab+cd=Bd\beta+\frac{Bd\beta}{R_2}z=\left(1+\frac{z}{R_2}\right)Bd\beta.$$

用同样的方法，可以求得同一微体在另一平面 $\beta=\text{const}$ 上的 ef 边的长度为$\left(1+\frac{z}{R_1}\right)Ad\alpha$.

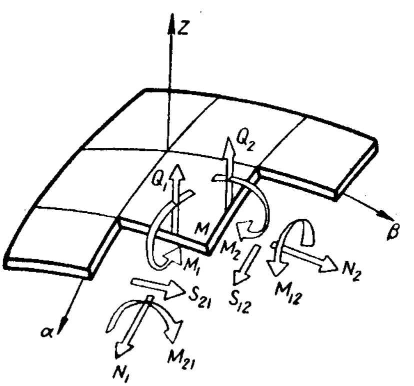

图　I-8

每个边上的应力可合成为在静力上相当的合内力：力和力矩(图 I-8)。

求各边面积上法向应力 σ_1 和 σ_2 及剪应力 $\tau_{12}=\tau_{21}$ 之和，即求得合内力

$$N_1Bd\beta=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_1\left(1+\frac{z}{R_2}\right)Bd\beta dz,$$

或

$$N_1=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_1\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz,$$

其中 N_1——$\alpha=\mathrm{const}$ 边上壳体截面单位长度上的法向内力(因此，N_1 的量纲为 t/m 或 kg/cm)。

同理可得

$$N_2=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_2\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz,\quad S_{12}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{12}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)dz,$$

$$S_{21}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{21}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz. \tag{1.10}$$

内力的正向与相应应力的正向相同(图 I-8)。

象在薄板理论中一样引用直法线假设，则可将壳体的应力状态问题归结为壳体中面的应力状态问题。

由直法线假设可以导得法向应力沿壳体截面高度是线性分布的，于是可以把力矩写成如下形式

$$\left.\begin{aligned}M_1&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_1\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz,\\M_2&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_2\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz,\\M_{12}&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{12}\left(1+\frac{z}{R_1}\right)zdz,\\M_{21}&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{21}\left(1+\frac{z}{R_2}\right)zdz.\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$