林金木　编著

有限单元法
变分原理与应用

湖南大学出版社

有限单元法变分原理与应用

林金木　　编著

湖南大学出版社
2003年·长沙

内 容 简 介

本书包括位移变分法、应力变分法、广义变分原理、有限单元法在传热学中的应用和边界单元法等，很多内容来自编者发表的论文，是编者多年来教学和科研的成果。在传热学章节中，应用有限元的子空间解法，解决了瞬态温度场解的振荡问题，对隐式解的时间步长限制提出了新的观点。本书取材广泛，内容丰富，编写安排由浅入深，便于自学。涉及的内容既有深入的理论分析，又有浅出易懂的工程应用，适用于高等工科院校大学本科生和研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法变分原理与应用/林金木编著．—长沙：湖南大学出版社，2003.6

ISBN 7—81053—666—4

Ⅰ.有...　Ⅱ.林...　Ⅲ.有限元法—变分(数学)—高等学校—教材　Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 048337 号

有限单元法变分原理与应用

Youxian Danyuanfa Bianfen Yuanli yu Yingyong

林金木　编著

□ 责任编辑　厉　亚
□ 特约编辑　何哲辉
□ 封面设计　张　毅
□ 出版发行　湖南大学出版社
　　社址　长沙市岳麓山　　邮码　410082
　　电话　0731—8821691　　0731—8821315
□ 经　　销　湖南省新华书店
□ 印　　装　湖南大学印刷厂

□ 开本　787×1092　16 开　□ 印张　9.75　□ 字数　225 千
□ 版次　2003 年 8 月第 1 版　□ 2003 年 8 月第 1 次印刷
□ 印数　1—5 000 册
□ 书号　ISBN 7—81053—666—4/O·48
□ 定价　18.00 元

目　　次

第 1 章　绪　　论 ……………………………………………………………… (1)

第 2 章　变分法简介

2.1　泛函与变分 ……………………………………………………………… (4)
2.2　固定边界的泛函驻值问题 ………………………………………………… (7)
2.3　边界部分固定的泛函驻值问题 …………………………………………… (8)
2.4　重积分的泛函驻值问题 …………………………………………………… (9)
2.5　泛函的条件驻值问题 ……………………………………………………… (10)

第 3 章　弹性力学的基本方程

3.1　爱因斯坦角标表示法 ……………………………………………………… (13)
3.2　弹性力学基本方程 ………………………………………………………… (15)
3.3　小位移弹性理论的应变势能和应变余能 ………………………………… (21)

第 4 章　位移变分法

4.1　位移变分法的能量原理 …………………………………………………… (23)
4.2　空间梁单元的有限单元法 ………………………………………………… (27)
4.3　平面问题的有限单元法 …………………………………………………… (45)
4.4　小挠度薄板弯曲有限单元法 ……………………………………………… (62)
4.5　单元刚度矩阵的特性 ……………………………………………………… (74)
4.6　单元等效结点载荷列阵 …………………………………………………… (76)
4.7　等参数单元 ………………………………………………………………… (77)
4.8　空间单元和平板壳体单元 ………………………………………………… (81)

第 5 章　应力变分法

5.1　应力变分法的能量原理 …………………………………………………… (89)
5.2　最小余能原理的应用 ……………………………………………………… (92)

第6章 广义变分原理
6.1 梁广义变分原理 …… (98)
6.2 胡海昌-鹫津广义变分原理(广义势能变分原理) …… (104)
6.3 Hellinger - Reissner 变分原理(广义余能变分原理) …… (106)
6.4 非协调元变分原理 …… (108)
6.5 广义变分原理在薄板弯曲有限元中的应用 …… (111)

第7章 有限单元法在传热学中的应用
7.1 稳态温度场 …… (119)
7.2 瞬态温度场 …… (121)
7.3 瞬态温度场的有限元离散和泛函变分矩阵表达式 …… (122)
7.4 差分格式 …… (125)
7.5 解的振荡和迭代步长的限制 …… (128)
7.6 热应力计算 …… (131)

第8章 边界单元法
8.1 引言 …… (134)
8.2 边界单元法基础 …… (134)

习 题 …… (144)

参考文献 …… (150)

第1章 绪 论

弹性力学研究弹性体受到外力作用或温度改变等原因而使弹性体发生的位移、应变和应力。在本教材中，假定结构是完全弹性的，即材料服从虎克定律、材料是连续均匀和各向同性的，而且结构受载荷后位移和变形是微小的，即结构的位移远远小于结构的原来尺寸，应变和转角都远远小于1，应变和转角的二次幂或乘积都忽略不计。这样，在求解中可以用变形前的结构尺寸代替变形后的尺寸，而且能使弹性力学中的代数方程和微分方程都简化为线性方程。

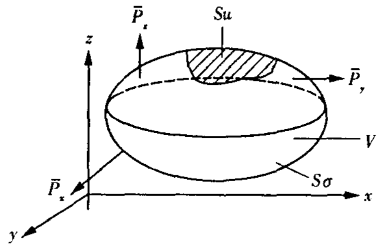

图 1-1

在图 1-1 中，V—弹性体空间域；Su—弹性体已知位移的边界；$S\sigma$—弹性体已知外力的边界。S—弹性体边界，显然，$S=Su+S\sigma$。取 x 方向位移为 $u=u(x,y,z)$，y 方向位移为 $v=v(x,y,z)$，z 方向位移为 $w=w(x,y,z)$。弹性力学边值问题的提法是：

微分方程

$$f_i(u,v,w,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z},\cdots)=0 \quad \in V \quad i=1\sim 3 \tag{1-1}$$

位移边界条件：$u=\overline{u} \quad v=\overline{v} \quad w=\overline{w} \qquad \in Su$ (1-2)

外力边界条件：$P_x=\overline{P_x} \quad P_y=\overline{P_y} \quad P_z=\overline{P_z} \qquad \in S\sigma$ (1-3)

求出满足式(1-1)、式(1-2)和式(1-3)的解就是弹性力学的解答。弹性力学边值问题的解法可分为解析法和近似解法两大类，已经证明，弹性力学的解答是惟一的。

1. 解析法(精确解法)

解析法的解完全精确地满足微分方程式(1-1)、位移边界条件式(1-2)和外力边界条件式(1-3)，但因微分方程式和边界条件的复杂性，求解过程相当困难，只能解决少数边界条件简单的结构问题。对于复杂的结构，只能在过分简化的条件下求出某些简单的解答，计算条件与实际工程相差甚远，在工程上不能得到广泛地应用。

2. 近似解法

(1) 有限差分法

在微分方程式(1-1)中应用差分代替微分，适用于边界规则的工程问题，程序简单，收敛性也较好，但对边界条件复杂的问题仍无能为力。

(2) 瑞利-里兹法

瑞利-里兹法的理论基础是泛函极值法,应用泛函极值原理在整个域内求近似解或精确解。应用此法求解时,首先要在整个域内找出一组序列容许位移函数,把弹性力学的解写成:$u=\sum_{i=1}^{\infty}a_iu_i$,$v=\sum_{i=1}^{\infty}b_iv_i$,$w=\sum_{i=1}^{\infty}c_iw_i$,其中 u_i,v_i,w_i 应满足位移边界条件式(1-2),a_i,b_i,c_i 为待定系数,它们可应用泛函极值原理求得。当边界形状复杂时,在整个域内找出一组满足位移边界条件的序列位移函数并非易事,而且解的收敛性证明也十分困难,因此,瑞利-里兹法在工程中的应用也受到很大的限制。

(3) 有限单元法

把弹性体简化为由有限个单元组成的离散化模型,应用泛函极值法对离散化模型求数值解。此法物理概念清晰,有很强的机动灵活性和适应性,不仅能处理力学分析中杆件、板件、壳体等不同构件以及由它们组成的复杂的组合结构,还能用于求解流体力学、热传导和电磁场等连续介质和场的问题。引进位移边界条件非常简便,不受几何形状的限制。在求解中采用矩阵表达方式,格式统一简单便于计算机编程。随着计算机的高速发展和计算软件包不断更新,有限单元法在工程中得到广泛地应用。

(4) 边界单元法

在边界单元法中仅对弹性体的边界进行离散处理,弹性体的域无须离散处理。边界参数用边界单元法求数值解,域内参数用边界积分法求近似解。边界单元法的理论基础是加权余量法和寻找基本解,要求较高的数学和力学基础。与有限单元法比较,划分单元的数目少得多,特别适用于无穷边界问题,不必在无穷远处划分单元;边界单元法所求得的域内变量值是连续的,可以较好地分析应力集中区域,这些都是有限单元法所不及的。

现代有限单元法的第一篇论文"Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structure"在 1956 年由 Turner 和 Clough 共同发表的。他们在分析飞机结构时,把机身离散为三角形和矩形单元,应用结构力学中刚架位移法思路来解弹性力学的平面问题。1960 年 Clough 发表论文"The Finit Element Method in Plane Stress Analysis",首次把这种解决弹性力学问题的方法称为"Finit Element Method",简称 FEM。在 20 世纪 60 年代,我国数学家冯康等人对有限单元法理论作了奠基性的工作,应用变分原理为有限单元法作了严格的数学解释,证明了有限单元法解的收敛性。在 1960～1970 年,Besseling、Melosh、Jones、Gallagher、Fraeijs de Veubeke、Herrmann、Prager、董平和卞学璜等人根据各种不同变分原理提出不同的有限单元法的公式,为有限单元法应用向纵深发展做了重大贡献。然而,有限单元法的公式不一定都要建立在变分原理的基础上。Oden 在 1969 年从能量平衡法成功地导出了热弹性问题有限单元解析方程组。Szabo 和 Lee 在 1969 年利用迦辽金法得到平面弹性问题的有限元解。目前,有限单元法的应用已大大地超出

弹性力学范围，它几乎适用于求解所有连续介质和场的问题。塑性力学、汽车碰撞、冲压成形、流体力学、传热学、生物传热学、热弹性力学、粘塑性力学、电磁场、声学和眼球力学等工程领域都可应用有限单元法求解，有限单元法已经成为一种强有力的近似计算工具。

边界单元法(Boundary Element Method) 简称 BEM，边界单元法由积分方程演变而来。1953 年 Kellogg 首次应用积分方程求解拉普拉斯方程，1965 年 Kupradze 建立了积分方程直接法，1968 年 Cruse 和 Rizzo 将该法应用于弹性静力学，1978 年 Brebbia 发表了第一本边界单元法著作"The Boundary Element Method for Engineers"，直至此时，BEM 这个名称才为力学界所公认。在 20 世纪 70 年代，清华大学杜庆华教授首先把边界单元法介绍到国内。边界单元法要求较高的数学和力学基础，它的推广和应用远不如有限单元法那样广泛。

第2章　变分法简介

本章引入变分法的基本概念，目的是在更高的层次上来理解有限单元法。为了便于理解，尽量避免过多的数学描述和证明，突出基本概念的几何意义和物理意义，有数学兴趣的读者可参阅参考文献[18]。

2.1　泛函与变分

最速下降线问题：在图 2－1 中，小球从 A 点沿轨道 AB 自由下降，不计小球与轨道之间摩擦，求自 $A(x_1, y_1)$ 点下降到 $B(x_2, y_2)$ 点所须时间最短的轨道曲线 $y(x)$。

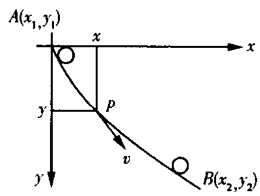

图 2－1

设小球的质量为 m，g 为重力加速度，s 为轨道曲线的弧长，小球下降到任一点 P 处的速度为 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。根据能量守恒，$mgy=\frac{mv^2}{2}$，有

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}=\sqrt{\frac{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

小球自 A 点下降到 B 点所须时间 T 为

$$T=\int_0^t \mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}{2gy}}\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}F(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\mathrm{d}x \qquad (2-1)$$

显然，对于不同的轨道曲线 $y(x)$，对应的下降时间 T 也不同，只有特定的某一轨道曲线 $y(x)$ 才能使下降时间最短。

2.1.1　泛函定义

以函数或函数导数作为变量的函数称为泛函，故又称为函数的函数。泛函中的变量称为自变函数，当自变函数确定时，通过积分后泛函的值是一个确定的实数。

由泛函定义可知，式(2－1)就是一个泛函表达式。

泛函的一般形式

一维泛函　$I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots)\mathrm{d}x$

二维泛函 $I=\int_{\Omega}F(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\cdots)\mathrm{d}\Omega$

三维泛函 $I=\int_{V}F(x,y,z,w(x,y,z),\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z},\cdots)\mathrm{d}v$

2.1.2 自变函数的变分

在图 2-2 中，过 A,B 两点的曲线为 $y(x)$，$\overline{y}(x)$是它的一条近旁曲线。两条曲线之间的垂直距离是函数 $y(x)$的改变量，称此改变量为自变函数的变分，记为 δy。显然，变分 δy 是 x 的函数，$\delta y(x)=\overline{y}(x)-y(x)$。

显然，过 A,B 两点的近旁曲线有无穷多条，可以应用含有参数 α 的曲线族方程表达过 A 和 B 点的曲线族 $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y(x)$。当 $\alpha=0$ 时，$y(x,\alpha)=y(x)$；当 $\alpha=1$ 时，$y(x,\alpha)=\overline{y}(x)$。自变函数 $y(x)$可能有 k 阶变分，它们分别定义为

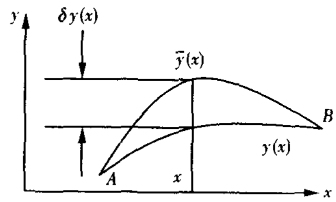

图 2-2

零阶变分 $\delta y(x)=\overline{y}(x)-y(x)$

一阶变分 $\delta y'(x)=\frac{\mathrm{d}\overline{y}(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$

……

k 阶变分 $\delta y^{(k)}(x)=\frac{\mathrm{d}\overline{y}^{k}(x)}{\mathrm{d}x^{k}}-\frac{\mathrm{d}y^{k}(x)}{\mathrm{d}x^{k}}$

若 $\delta y(x)$,$\delta y'(x)$,$\cdots$,$\delta y^{(k)}(x)$都很小，则称 $\overline{y}(x)$与 $y(x)$具有 k 阶接近度。图 2-3 中两条曲线具有一阶以上接近度(函数和一阶导数都很接近)，而图 2-4 中两条曲线仅有零阶接近度(仅有函数接近)。显然，接近度的阶数越高，两条曲线的近似的程度越好。

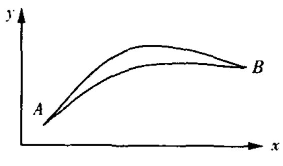

图 2-3

图 2-4

2.1.3 复合函数和泛函的变分

设复合函数 $F=F(x,y(x))$，按拉格朗日变分定义，复合函数 F 的变分可写成对参数 α 求偏导数的形式，即

$$\delta F=\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,(y+\alpha\delta y))\mid_{\alpha=0}$$

$$= \frac{\partial F(x,(y+\alpha\delta y))}{\partial(y+\alpha\delta y)} \frac{\partial(y+\alpha\delta y)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\delta y \qquad (2-2)$$

式(2-2)可以推广到含多个自变函数的复合函数，即

设复合函数　$F=F(x,u(x),v(x))$

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,(u+\alpha\delta u),(v+\alpha\delta v))\big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F(x,u,v)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F(x,u,v)}{\partial v}\delta v$$

设复合函数　$F=F(x,y(x),y'(x))$

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,(y+\alpha\delta y),(y'+\alpha\delta y'))\big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\delta y'$$

设复合函数 $F=F(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y))$，其中，$z$ 是 x 和 y 的二元函数，不是坐标值；$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$，$z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,y,(z+\alpha\delta z),(z_x+\alpha\delta z_x),(z_y+\alpha\delta z_y))\big|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{\partial F(x,y,z,z_x,z_y)}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F(x,y,z,z_x,z_y)}{\partial z_x}\delta z_x + \frac{\partial F(x,y,z,z_x,z_y)}{\partial z_y}\delta z_y$$

在变分计算中，坐标值 x、y 和 z 都不是自变函数，相当于函数中的常量。但上式中的 z 不是坐标值，而是自变函数。设泛函 $I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x$，被积函数连续可微，则对 α 的偏导数可移到积分号内进行，故泛函的变分可写成

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_{x_1}^{x_2}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\mathrm{d}x\right)\bigg|_{\alpha=0} \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\bigg|_{\alpha=0}\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2.1.4　变分算子的性质

A. $\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2$

B. $\delta(F_1F_2)=F_2\delta F_1+F_1\delta F_2$

C. $\delta(xF)=x\delta F$

D. $\delta(F^n)=nF^{n-1}\delta F$

E. $\delta(F^{(n)})=(\delta F)^{(n)}$

根据拉格朗日变分定义，很容易证明变分算子性质 A、B、C 和 D。性质 E 证明如下：

在图 2-5 中，A、B 和 C 的纵坐标分别为 y、$y+\delta y$ 和 $y+\mathrm{d}y$。若从 C 点算 D 点，D 点的纵坐标为 $y+\mathrm{d}y+\delta(y+\mathrm{d}y)$；若从 B 点算 D 点，D 点的纵坐标为 $y+\delta y+\mathrm{d}(y+\delta y)$。显然，两种计算结果应相等，即

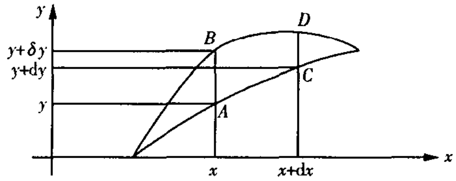

图 2-5

$$y+\mathrm{d}y+\delta(y+\mathrm{d}y)=y+\delta y+\mathrm{d}(y+\delta y)$$

应用变分算子的性质 A 和微分算子的性质简化上式，可得 $\delta(y'\mathrm{d}x)=(\delta y)'\mathrm{d}x$，再应用变分算子的性质 C，则有

$$\delta(y')=(\delta y)' \tag{2-3}$$

推广式(2-3)，可得 $\delta(F^{(n)})=(\delta F)^{(n)}$。性质 E 表明，导数的变分等于变分的导数，变分和导数算子可以互换，这是十分有用的结论。

2.2 固定边界的泛函驻值问题

在图 2-6 中，(x_1,y_1)和(x_2,y_2)是 xy 坐标平面中的两个固定点 A 和 B 的坐标值。

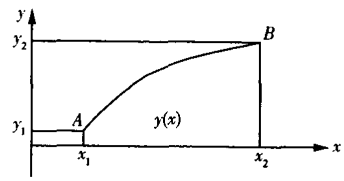

图 2-6

设有泛函 $I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x$，求在自变量 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 内确定一个自变函数$y(x)$，使它满足 $y_1=y(x_1)$，$y_2=y(x_2)$ 并使泛函 I 取驻值。

因为
$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\delta F\,\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x$$

又因为
$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\mathrm{d}x \quad \text{(变分算子性质 }E\text{)}$$
$$=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x \quad \text{(分部积分)}$$

所以
$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_2}-\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1} \tag{2-4}$$

当泛函取驻值时，必有 $\delta I=0$。因为 δy 是任意的且不恒为 0，所以式(2-4)右边各项都应为 0。即

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \quad \in x_1\leqslant x\leqslant x_2 \tag{2-5}$$

因为 A 和 B 是两个固定端点，$\delta y|_{x_1}=\delta y|_{x_2}=0$，所以式(2-4)右边后两项自然为零。可见，式(2-4)泛函取驻值等价于微分方程式(2-5)，即

$$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \in x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \qquad (2-6)$$

2.3 边界部分固定的泛函驻值问题

在图 2-7 中，(x_1, y_1)是 xy 坐标平面中的固定点 A 坐标值，B 是可变点，它的 x 坐标值为 x_2，y 坐标值 y_2 待定。设有泛函 $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$，求在自变量 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 内确定一个自变函数$y(x)$，使它满足 $y(x_1) = y_1$ 并使泛函 I 取驻值。

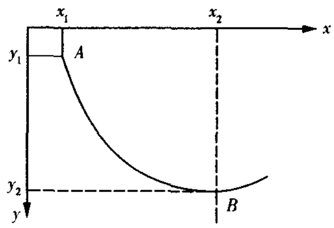

图 2-7

因为
$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_2} - \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}$$

因为 $\delta y\,|_{x_1} = 0$ 但 $\delta y\,|_{x_2} \neq 0$

所以
$$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 & \in x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2} = 0 & \in B \text{ 点} \end{cases} \qquad (2-7)$$

式(2-7)表明，泛函取驻值等价于微分方程和 B 点的边界条件。习惯上，把$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2} = 0$ 称为自然边界条件，因为它是在泛函取驻值的过程中自然得到的边界条件，而不是强加的边界条件。

例 求在自变量 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 内，$A(x_1, y_1)$点固定，B 点可变（x_2 已知，y_2 待定）的最速下降线。变分式(2-1)，可得

$$\delta T = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_2} - \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}$$

令 $\delta T = 0$，得 $\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 & \in x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2} = 0 & \in B \text{ 点} \end{cases}$

式中：
$$F = \sqrt{\frac{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}{2gy}}$$

因为 $\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2} = \frac{y'}{2gyF}\Big|_{x_2} = 0$ 所以 $y'\,|_{x_2} = 0$

上式表明，$y(x)$在 x_2 点的导数为 0，即在 B 点曲线 $y(x)$与直线 $y = x_2$ 必须正交（见图 2-7）。

2.4 重积分的泛函驻值问题

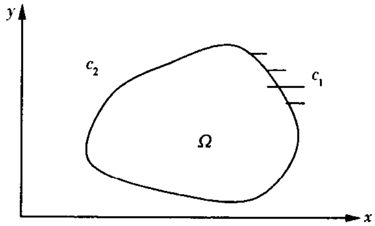

图 2-8

设在 xy 平面上有域 Ω，其边界为 $c=c_1+c_2$。设有泛函 $I=\int_\Omega F(x,y,w,w_x,w_y)\mathrm{d}\Omega$，求在 Ω 域内确定一个自变函数 $w(x,y)$，使它满足 $w=\overline{w} \quad \in c_1$ 并使泛函 I 取驻值。其中 $w_x=\frac{\partial w}{\partial x}, w_y=\frac{\partial w}{\partial y}$；在边界 c_2 上 w 可自由变化。变分泛函，可得

$$\delta I=\int_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w_x+\frac{\partial F}{\partial w_y}\delta w_y\right)\mathrm{d}\Omega$$

因为
$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w_x\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\mathrm{d}\Omega \quad \text{（变分算子性质 }E\text{）}$$
$$=\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w\mathrm{d}\Omega \quad \text{（分部积分）}$$
$$=\oint_C \frac{\partial F}{\partial w_x}l\delta w\mathrm{d}s-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w\mathrm{d}\Omega \quad \text{（格林公式）}$$

同理
$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial w_y}\delta w_y\mathrm{d}\Omega=\oint_C \frac{\partial F}{\partial w_y}m\delta w\mathrm{d}s-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_y}\delta w\mathrm{d}\Omega$$

式中：$l=\cos\alpha$ —边界外法线与 x 轴正方向的夹角余弦；

$m=\cos\beta$ —边界外法线与 y 轴正方向的夹角余弦。

所以
$$\delta I=\int_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)\delta w\mathrm{d}\Omega+\oint_C\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}l+\frac{\partial F}{\partial w_y}m\right)\delta w\mathrm{d}s$$

又因为
$$\delta w\,|_{c_1}=0 \quad \text{但} \quad \delta w\,|_{c_2}\neq 0$$

所以
$$\delta I=\int_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial w_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)\delta w\mathrm{d}\Omega+\int_{C_2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}l+\frac{\partial F}{\partial w_y}m\right)\delta w\mathrm{d}s$$

令 $\delta I=0$，得
$$\delta I=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial w}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial w_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial w_y}=0 & \in\Omega \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial w_x}l+\dfrac{\partial F}{\partial w_y}m=0 & \in c_2\end{cases} \qquad (2-8)$$

其中，$\frac{\partial F}{\partial w_x}l+\frac{\partial F}{\partial w_y}m=0 \quad \in c_2$ 为自然边界条件。

式(2-8)表明，泛函取驻值等价于微分方程和 c_2 上的自然边界条件。上述方法和结果可以推广到三维或高阶重积分的泛函驻值问题。

2.5　泛函的条件驻值问题

以上讨论的泛函驻值问题习惯上称为无条件驻值问题，所谓无条件，并不是说在确定自变函数时可以不满足任何条件。事实上，自变函数首先必须连续可微，而且要满足部分边界条件(如自变函数边界值已知，或自变函数在边界上法向导数已知等)；不过这类条件很容易满足，以至于人们往往不把它们看成一种条件。本节所指的条件是较为复杂的约束条件。在叙述泛函的条件驻值问题之前，为了便于理解拉格朗日乘子法，先叙述一般函数的条件驻值问题。

设函数
$$F(x,y)=x^2+2y^2+2xy+3x+5 \tag{2-9}$$
求在它满足
$$x+y=0 \tag{2-10}$$
时函数的最小值。

若没有式(2-10)约束，式(2-9)的绝对最小值可按多元函数极值理论求解，即 $\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2y+3=0$，$\frac{\partial F}{\partial y}=4y+2x=0$。解此二阶方程组，可得 $x=-3$，$y=\frac{3}{2}$，$F(-3,\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$。这是对点$(x,y)$不加任何约束条件下的最小值，所以是绝对最小值。如果点(x,y)要满足式(2-10)条件，则显然缩小了点(x,y)的选择范围，其最小值必然不会小于绝对最小值。对于像本例简单的约束，可用代入法求解。即用 $y=-x$ 代入式(2-9)求极值，可得 $x=-y=-\frac{3}{2}$，$F(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{11}{4}$。显然，$\frac{11}{4}>\frac{1}{2}$。若约束很复杂，用代入法求解会遇到很大困难，改用拉格朗日乘子法求解却很方便。把式(2-10)乘以拉格朗日乘子 λ 后与式(2-9)相加，可得新函数 F^* 为
$$F^*(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+2xy+3x+5+\lambda(x+y) \tag{2-11}$$
如果式(2-10)条件满足，则 $F^*(x,y,\lambda)$恒等于 $F(x,y)$。把 x，y 和 λ 看做独立变量，要使式(2-11)为驻值，则就要求
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F^*}{\partial x}&=2x+2y+3+\lambda=0\\ \frac{\partial F^*}{\partial y}&=4y+2x+\lambda=0\\ \frac{\partial F^*}{\partial \lambda}&=x+y=0\end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$
式(2-12)中的第 3 式就是约束方程式(2-10)。所以，只要 λ 是任选的，约束方程式(2-10)就是式(2-11)的驻值条件之一。解此三阶方程组，可得 $x=-y=-\frac{3}{2}$，$\lambda=-3$，

$F(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{11}{4}$，这与用代入法求解结果相同。一般来说，$F(x,y)$的极值条件和约束条件可分别写为

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \tag{2-13}$$

$$\phi(x,y)=0 \tag{2-14}$$

因为式(2-13)中的$\mathrm{d}x$和$\mathrm{d}y$不是独立的，而是由式(2-14)的微分关系式$\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y=0$联系着的。假定$\frac{\partial \phi}{\partial y}\neq 0$，则有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}$，把此式代入式(2-13)，可得

$$\mathrm{d}F=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\text{因为}\quad \mathrm{d}x\neq 0\qquad \text{所以}\quad \frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}=0 \tag{2-15}$$

联立式(2-14)和式(2-15)，可得求解极值点(x,y)的方程组。如果用拉格朗日乘子法，构新函数$F^*(x,y,\lambda)=F(x,y)+\lambda\phi(x,y)$，因为新函数线性地依赖于$\lambda$，不可能有极大或极小点，$\mathrm{d}F^*(x,y,\lambda)=0$只能是驻值点。此新函数驻值条件为

$$\mathrm{d}F^*=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\phi(x,y)\mathrm{d}\lambda=0 \tag{2-16}$$

把$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$和$\mathrm{d}\lambda$看做独立的任意变量，从式(2-16)可得$\frac{\partial F}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}=0$，$\frac{\partial F}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}=0$，$\phi(x,y)=0$。从前两式中消去$\lambda$，可得$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}=0$，$\phi(x,y)=0$。这与式(2-15)和式(2-14)完全相同，因此，对于条件极值问题，拉格朗日乘子法与代入法本质上是一回事。虽然应用拉格朗日乘子法会增加方程组的阶数，但避免了代入法可能产生的麻烦。对于泛函的条件驻值问题，完全可以参照函数的条件驻值问题的思路来处理。

设$I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x$，约束条件为$\int_{x_1}^{x_2}\phi(x,y,y')\mathrm{d}x=d$。$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$都是可变点，构造新泛函$\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F\mathrm{d}x+\lambda(\int_{x_1}^{x_2}\phi\mathrm{d}x-d)=\int_{x_1}^{x_2}F^*(x,y,y',\lambda)\mathrm{d}x-\lambda d$。这是带有定积分的约束条件的驻值问题，其中，$d$是常数，拉格朗日乘子$\lambda$是一个数，把$\lambda$看成一个独立自变函数参与变分计算，可得

$$\delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F^*}{\partial\lambda}\delta\lambda\right)\mathrm{d}x-d\delta\lambda$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x+\delta\lambda\left(\int_{x_1}^{x_2}\phi\mathrm{d}x-\mathrm{d}\right)+\frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2}$$

令 $\delta\Pi=0$，可得 $\delta\Pi=0\quad\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F^*}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F^*}{\partial y'}=0\\ \displaystyle\int_{X_1}^{X_2}\phi(x,y,y')\mathrm{d}x=d\\ \dfrac{\partial F^*}{\partial y'}\bigg|_{x_1}=0,\dfrac{\partial F^*}{\partial y'}\bigg|_{x_2}=0\end{cases}\tag{2-17}$$

若把约束条件改为 $\phi(x,y,y')=0$，因为约束条件是一个微分方程，在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 内点点都有约束，所以 λ 是 x 的函数。$\lambda(x)\phi$ 也不是简单地与原泛函相加，而是应从 x_1 到 x_2 积分后相加。构造新泛函 $\Lambda=\int_{x_1}^{x_2}F\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\lambda(x)\phi\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}F^*(x,y,y',\lambda)\mathrm{d}x$，变分后可得

$$\delta\Lambda=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\delta y\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\phi\delta\lambda(x)\mathrm{d}x+\frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2}$$

令 $\delta\Lambda=0$，可得 $\delta\Lambda=0\quad\Leftrightarrow$
$$\begin{cases}\dfrac{\partial F^*}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F^*}{\partial y'}=0\\ \phi(x,y,y')=0\\ \dfrac{\partial F^*}{\partial y'}\bigg|_{x_1}=0,\dfrac{\partial F^*}{\partial y'}\bigg|_{x_2}=0\end{cases}\tag{2-18}$$

式(2-17)表明，新泛函 Π 取驻值等价于微分方程、带有定积分的约束条件和两个端点 A 和 B 的自然边界条件。式(2-18)表明，新泛函 Λ 取驻值等价于微分方程、带有微分方程的约束条件和两个端点 A 和 B 的自然边界条件。引进拉格朗日乘子，把约束条件并入原泛函构成新泛函，解决了约束条件带来的问题，把原泛函的条件驻值问题都转化为新泛函的无条件驻值问题，这种方法称为泛函的条件驻值问题的拉格朗日乘子法。这个方法可以推广到带有多个约束条件的高维泛函驻值问题。