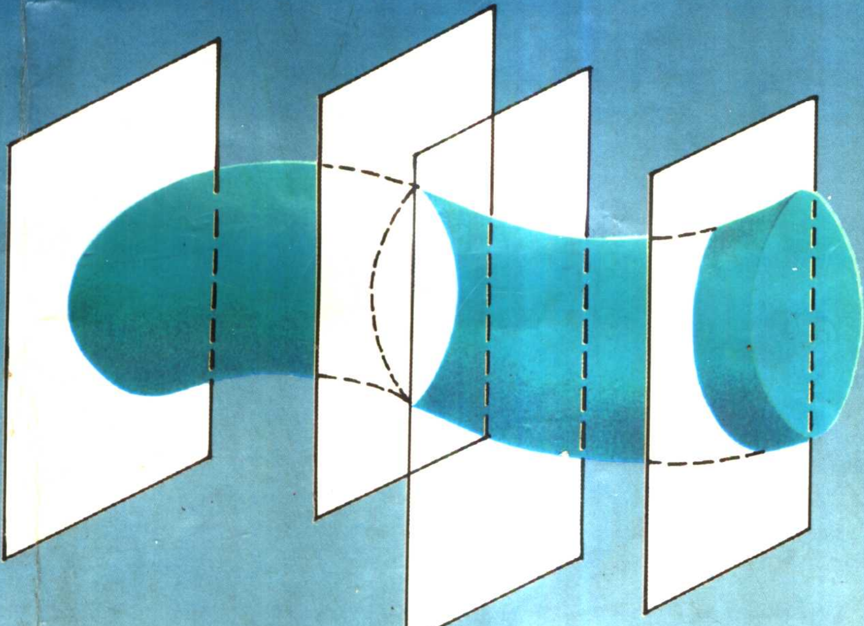
高等数学习题课指南

北京工业大学工程数学教研室



北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书是高等工科院校学生必修的一门重要基础课。它不仅为未来的科研人员和工程技术人员提供必要的、不可或缺的基本数学概念、理论和方法，而且在锻炼思维、培养能力上具有任何别的课程所不可取代的作用。本书共分十二章，每章由内容提要、教学要求、例题、练习题、练习题答案等五部分组成。读者从内容提要中可以扼要地了解有关定义、定理、公式等。在教学要求中叙述了学习该章内容时的不同要求以及应注意的问题。所有选编的例题、练习题都能较好地体现教学要求，读者不难从中掌握高等数学的基本理论及解题的方法和技巧。因此本书不仅可以作为习题课参考教材，供在校工科学生使用，也可作为报考硕士研究生和自学高等数学的读者的复习参考用书。

高等数学习题课指南

北京工业大学工程数学教研室编

※

北京工业大学出版社出版发行

各 地 新 华 书 店 经 销

徐水宏远印刷厂印刷

※

1994 年 9 月第 1 版　1997 年 9 月第 2 次印刷

787×1092 毫米 32 开本　15.75 印张　355 千字

印数：5001～10000 册

ISBN 7－5639－0401－8/O・18

定价：15.00 元

编者的话

为加强高等数学习题课的教学，参照高校工科数学课程委员会审订的《高等数学课程基本要求》，我们编写了这本《高等数学习题课指南》。

本书共十二章，每章由内容提要、教学要求、例题、练习题、练习题答案等五部分组成。读者从内容提要中，可以扼要地了解有关定义、定理、公式等。在教学要求中叙述了学习该章内容时的不同要求以及应注意的问题。所有选编的例题、练习题能较好地体现教学要求的内容，读者不难从中掌握高等数学的基本理论及解题的方法和技巧。因此本书不仅可以作为习题课参考教材，供在校工科学生使用，也可作为报考硕士研究生和自学高等数学的读者的复习参考用书。

为了便于读者查阅常用的平面曲线图形和空间曲面所围立体图形，我们增编了两个附录，供读者参考。

北京工业大学应用数学系工程数学教研室部分教师参加了本书的编写。他们是：叶志金（第一章）、周大琼（第二章）、刘殿和（第三章）、王中良（第四、八章）、王惠竹（第五、九章）、张弘（第六、十二章）、李静（第七章）、唐虎（第十章）、陈立萍（第十一章）。

在编写过程中，得到系、教研室领导和教研室许多同志的支持和帮助。黄天任、梁在中副教授参与了部分内容的审阅，特别是沈永欢教授、许履瑚副教授对全书进行了详细审阅，并提出了许多宝贵意见，在此我们表示衷心感谢。还要

特别提出的是，沈永欢教授很高兴地为本书作了序，他在序言中所谈到的，对教与学均有极大的帮助。

限于教学经验不足、水平有限，编写时间也比较仓促，本书中一定存在不少缺点和不足，敬请读者批评指正。

编　者

一九九二年十二月

序

高等数学是高等工科院校学生必修的一门重要基础课。它不仅为未来的工程师提供必要的、不可或缺的基本数学概念、理论和方法，而且在锻炼思维、培养能力上具有任何别的课程所不可取代的潜在作用。

学数学就是做数学。凡是对学习数学稍有心得的人都能体会到：学习数学的过程，必须是对数学进行操作、演习和思维实验的过程。这样，做习题就成为学习数学中不可逾越的一个基本阶段；这往往也是很多同学最头痛的阶段。为帮助同学渡过这一难关，就有高等数学习题课之设。

上完一堂好的习题课后，同学们会有豁然开朗、融会贯通之感。上好习题课的基本要素有二：精心设计的材料；灵活高超的方法。由工程数学教研室几位教师编写的这本《高等数学习题课指南》，总结了作者们几十年从事高等数学教学的经验，精心编制了很多能配合大课的，具有典型意义的例题，提供了不少具有启发性的解题方法，也选编了大量习题，是进行高等数学习题课教学的一本良好的参考书。广大同学也能从这本书中得到很多教益。

由于习题课学时不多，能上的例题数量有限，而本书搜集的例题较多，因此不同程度的同学可以针对自己的情况从书中再选择一些例题进行学习或试做；读书中每章前的内容提要和教学要求，可以帮助同学领会有关章节的基本内涵。书中选编了不少好的习题，同学们可以再选做一些，以加深理

解，更好掌握。由于所有习题都附有答案，有些习题还给出提示，所以极便于同学们自学。

由此看来，这本《高等数学习题课指南》确实是对高等数学教和学两个方面都很有裨益的书籍，所以我很高兴地为之作序。

沈永欢

一九九三年一月

目　　录

第一章 极限与连续

极限概念是高等数学最基本的概念。因为数学分析的其他基本概念可用极限概念来表达，且解析运算（微分法、积分法）都可用极限运算来描述，所以掌握极限概念与极限运算是很重要的。

函数的连续性是与函数的极限概念有着密切联系的另一个基本概念。连续性是函数的重要性态之一，它反映了我们所观察到的许多自然现象的共同特性，如生物的连续生长、流体的连续流动等；以安排三次习题课为宜。

一、内容提要

1. 数列的极限

数列极限的定义 给定数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果存在常数 A，对任给 $\varepsilon>0$，存在序号 N，使当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称 A 是数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n = A.$$

如果数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有极限，就说数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是发散的。

收敛数列的性质：

(1) 收敛数列的极限是唯一的.

(2) 收敛数列是有界的.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，且 $A>0$，则存在序号 N，当 $n>N$ 时，

有 $x_n>0$.

(4) 若数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于 A，则它的任一个子数列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$也收敛于 A.

数列极限存在的判别法：

(1) 柯西准则　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在$\leftrightarrows$任意给定 $\varepsilon>0$，存在序号 N，当 n、$m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$.

(2) 单调有界准则　单调有界数列必有极限.

(3) 夹逼准则　若存在序号 k，当 $n>k$ 时，有 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

2. 函数的极限

自变量 $x\to x_0$ 时的极限定义：

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义(点 x_0 可除外)，且有常数 A.

若对任给的 $\varepsilon>0$,存在着 $\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

自变量 $x\to\infty$时的极限定义：

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且有常数 A. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在着 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称当 $x\to\infty$时函数 $f(x)$以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

单侧极限定义

名　称	表达式	任给	存在	当…时	恒　有
当 $x\to x_0+0$ 时，$f(x)$以 A 为右极限	$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A\overset{\text{记}}{=}f(x_0+0)$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$x_0<x<x_0+\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
当 $x\to x_0-0$ 时，$f(x)$以 A 为左极限	$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A\overset{\text{记}}{=}f(x_0-0)$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$x_0-\delta<x<x_0$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$以 A 为极限	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$以 A 为极限	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$x<-X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数极限存在的判别法：

(1) **海涅定理**　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\leftrightarrows$对任意一串 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0,\ n=1,2,\cdots)$，

都有
$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\leftrightarrows\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A.$

(3) **柯西准则**　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\leftrightarrows$对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x_1-x_0|<\delta$，$0<|x_2-x_0|<\delta$ 时，有
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

(4) **夹逼准则**　若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，

则 $$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

3. 无穷小量

若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$,则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小量.

4. 无穷大量

若对于任意给定的正数 M,总存在正数 δ(或 X),使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$)的一切 x,$|f(x)| > M$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大量,记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty.$$

5. 无穷小量的比较

设变量 $\alpha = \alpha(x) > 0$、$\beta = \beta(x)$ 都是在自变量同一变化过程中的无穷小量.

如　　果	则　　称	记　　为
$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$	β 是比 α 高阶的无穷小	$\beta = o(\alpha)$
$\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$	β 与 α 是同阶的无穷小	$\beta = O(\alpha)$
$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$	β 是 α 的等阶的无穷小	$\beta \sim \alpha$
$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$	β 是 α 的 k 阶无穷小	$\beta = O(\alpha^k)$.

6. 函数极限的四则运算

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在自变量同一变化过程中极限存在且 $f(x) \to A$,$g(x) \to B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$($B\neq 0$ 时).

7. 无穷小量的运算法则

在自变量的同一变化过程中：

(1) 有限个无穷小量之和仍为无穷小量；

(2) 有限个无穷小量之积仍为无穷小量；

(3) 无穷小量与有界函数的乘积为无穷小量；

(4) 非零无穷小量的倒数是无穷大量，无穷大量的倒数是无穷小量.

8. $\lim f(x)=A \leftrightarrows f(x)=A+\alpha(x)$

其中$\lim\alpha(x)=0$

9. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e=2.718281828459045\cdots$.

10. 函数连续性的定义

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，称 x_0 为连续点。或者，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，记 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

(3)如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续.

(4)如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(5)如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点.

11. 间断点的分类

间断点的分类

间断点类型		条件	例子
第一类间断点	可去间断点	$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$	$x=0$ 是 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的可去间断点
	跳跃间断点	$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$	$x=0$ 是 $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ 的跳跃间断点
第二类间断点		非第一类间断点	$x=0$ 是 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，也是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的第二类间断点

12. 连续函数的定理

(1)连续函数的和、差、积、商也是连续函数(在商的运算中分母函数在连续点处函数值不为零).

(2)反函数的连续性：若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单值、单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应区间上也单值、单调增加(或单调减少)且连续.

(3)复合函数的连续性：若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，$\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续.

(4)初等函数的连续性：一切初等函数在其定义区间内是

连续的.

13. 闭区间上连续函数的性质

(1)闭区间$[a,b]$上连续函数$f(x)$必有界.

(2)闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$必取到最大值、最小值. 即存在$x_1,x_2\in[a,b]$,使$\forall\ x\in[a,b]$,均有

$$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2).$$

(3)介值定理　设$f(x)$在$[a,b]$上连续,μ介于$f(a)$与$f(b)$之间,则存在$\zeta\in[a,b]$,使$f(\zeta)=\mu$.

特别,若$f(a)\cdot f(b)<0$,则存在$\zeta\in(a,b)$,使$f(\zeta)=0$.

二、数学要求

1. 领会数列极限定义的实质,知道"$\varepsilon-N$"表达式的确切性.

2. 领会函数极限定义的实质,知道"$\varepsilon-X$"和"$\varepsilon-\delta$"表达式的确切性.

3. 能够利用极限定义,证明一些比较简单的数列、函数极限.

4. 能熟练地运用极限的四则运算法则求极限.

5. 会用两个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$和$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$(或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$)计算函数的极限.

6. 理解无穷小量和无穷大量的概念. 掌握无穷小的比较,并能利用等价无穷小替代的方法求极限.

7. 了解极限存在准则. 数列有界是数列收敛的必要条件,而夹逼定理的条件和数列单调有界是数列收敛的充分条件. 会用夹逼定理和单调有界数列必有极限这两个准则求一些函数的极限.

8. 理解函数连续性定义及间断点定义．对于给定的具体函数能找到它的连续区间及间断点，并能判断间断点的类型．若是可去间断点，会补充或改变函数在该点的定义使其变为连续函数．

区分第一类间断点与第二类间断点的关键是判断函数在该点处的左、右极限是否存在．

9. 能利用函数的连续性求函数的极限．

10. 了解闭区间上连续函数的性质．会用介值定理验证方程根的存在性．

三、例题

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}=0$ 问下列证法都正确吗？为什么？

证法一 任意给定一个很小很小的正数，如 10^{-4}，显然，当 $n>20000$ 时，恒有

$$\left|\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

所以结论成立．

证法二 对于 $\forall\ \varepsilon>0$，要

$$\left|\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}<\varepsilon.$$

因为
$$\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}>\frac{1}{n}.$$

所以有 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,

故 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,恒有
$$\left|\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

于是结论成立.

证法三 $\forall\ \varepsilon>0$,要
$$\left|\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}<\varepsilon.$$

而
$$1+\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}<2$$

所以
$$\frac{1+\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}<\frac{2}{n}.$$

只要$\frac{2}{n}<\varepsilon$. 也即 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,就有

$\forall \varepsilon>0, \exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\frac{1+\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

所以结论成立.

解 证法一不对. 它只是对 $\varepsilon=10^{-4}$找到 N,而没有证明对任意给定的 ε(要多么小有多么小的正数),找到相应的 N.

证法二也不对. 因为

$$\frac{1+\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}>\frac{1}{n},$$

$\frac{1}{n}<\varepsilon$,不能保证

$$\frac{1+\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{n}<\varepsilon$$

成立.

证法三是正确的.

2. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$,问 n 从何值开始使$|u_n-1|<10^{-4}$.

证明 $\forall \varepsilon>0$,欲使$\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon$,只要$\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|=\frac{2}{n+1}<\varepsilon$,即 $n>\frac{2}{\varepsilon}-1$,取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$,有 $\forall \varepsilon>0, \exists N=\left[\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,有